D. STANOMIR

O. STĂNĂȘILĂ

Conf. dr. ing. **D. STANOMIR** Prof. dr. **O. STĂNĂȘILĂ**

Biblioteca personală HORGA VASILE

METODE MATEMATICE ÎN TEORIA SEMNALELOR

Editura tehnică
București

Control științific: Prof. dr. **Ion Cuculescu**
Redactor: **Valentina Creţu**
Tehnoredactor: **Elena Geru**
Coperta și supracoperta: **Alexandru Banu**

Bun de tipar: 22. II. 1980. Coli de tipar: 24
C. Z. 621. 391

c. 199 — I. P. Informația
Str. Brezoianu nr. 23—25
București

PREFAȚĂ

În ultimii ani, studiul sistematic al semnalelor s-a constituit într-o teorie de sine stătătoare, utilizînd un aparat matematic modern. Se poate spune că orice progres pe linia cunoașterii general umane are corespondent în lărgirea problematicii teoriei semnalelor. Chiar dacă uneori în practica stocării, prelucrării, transmiterii semnalelor aspectele teoretice se dizolvă în scheme tipice cît mai ușor de aplicat sau în algoritmi programabili, totuși se impune permanent aderența la metodele noi, care pot conduce la modificări de tehnologii, atîta timp cît informația teoretică valoroasă este consecința condensată a unei practici valoroase.

Sperăm că eventualele dificultăți legate de notații și de asimilarea stilului de expunere vor fi depășite, iar cititorii vor ajunge la rezultatele de fond cuprinse în lucrare; menționăm că absolut toate noțiunile și rezultatele importante sînt ilustrate prin exemple sugestive. Scriind această carte, ne adresăm unui cerc larg de specialiști (ingineri, fizicieni, matematicieni, biologi etc.), punînd totodată la dispoziția studenților din facultățile tehnice de profil electric sau mecanic, ca și celor din facultățile de fizică și matematică un material didactico-științific pe care îl dorim util.

Dată fiind specialitatea celor doi autori, lucrarea încearcă o permanentă mediere între spiritul de rigoare al matematicienilor și spiritul ingineresc de funcționalitate și finalizare, nu în sine, a conceptelor și metodelor. O prezentare a structurii lucrării este făcută în capitolul I; bibliografia este alcătuită pe capitole.

Autorii țin să mulțumească referentului științific, prof. dr. I. Cuculescu și inginerului V. Breazu pentru observațiile făcute asupra manuscrisului. Deosebit de utile în elaborarea acestei lucrări ne-au fost discuțiile cu unii studenți, cu colegi de catedră, cu cei pe care i-am simțit alături de noi și îi rugăm pe toți care se regăsesc aici să primească mulțumirile noastre.

AUTORII

Institutul Politehnic București, februarie 1980

CUPRINS

Capitolul I. **Conceptul de semnal** 9

1. Model matematic 9
2. Sisteme şi semnale 11

Capitolul II. **Transformări integrale ale semnalelor (funcţii şi distribuţii)** . . . 13

A. *Distribuţii, operaţii cu distribuţii* 13
1. Clase remarcabile de semnale continuale 14
2. Funcţii-test; clasificarea distribuţiilor, exemple 20
3. Operaţiile principale cu distribuţii 29
4. Şiruri reprezentative pentru δ; convergenţa şirurilor şi seriilor de distribuţii 36
5. Convoluţia semnalelor 49
B. *Teoria elementară a transformărilor integrale* 67
6. Transformarea Laplace a semnalelor-funcţie 67
7. Transformarea Fourier a semnalelor-funcţie din L_1 76
8. Transformarea Fourier a semnalelor-funcţii din $\mathscr{S}$ 87
9. Transformarea Hilbert a semnalelor-funcţie din L_2 88
C. *Transformări integrale ale distribuţiilor* 94
10. Noţiunea generală de semnal; transformarea Fourier în $\mathscr{S}'$ 95
11. Transformarea Laplace a distribuţiilor 100

Capitolul III. **Studiul semnalelor discrete** 104

A. *Transformări ale semnalelor discrete* 104
1. Clase remarcabile de semnale discrete 105
2. Transformarea z 111
3. Transformarea Fourier discretă 118
4. Transformarea Hilbert discretă 124
B. *Studiul comparativ al semnalelor discrete şi continuale* 133
5. Corespondenţe între semnale discrete şi semnale continuale 134
6. Studiul tematic al eşantionării semnalelor continuale 140
C. *Reprezentări ale semnalelor discrete cu durată finită* 151
7. Noţiunea de bază standard de semnale discrete 152
8. Elemente de analiză Fourier relativ la o bază standard 156
9. Funcţii Walsh şi aplicaţii ale lor 161

Capitolul IV. **Studiul matematic al realizabilităţii unor sisteme liniare** . . . 171

A. *Circuite electrice* 171
1. Circuite elctrice, funcţii de circuit 171
2. Funcţii energetice ale circuitelor electrice 176
3. Formalisme de descriere a circuitelor electrice 178
4. O teoremă fundamentală a circuitelor electrice pasive 183
B. *Realizabilitate; punctul de vedere distribuţional* 186
5. Cauzalitatea şi pasivitatea, constrîngeri esenţiale ale sistemelor fizice 187
6. Sisteme pasive liniare şi invariante în timp 197
7. Valori frontieră ale funcţiilor olomorfe şi aplicaţii 224
C. *Realizabilitate şi operatori pe spaţii Hilbert cu rezoluţie* 236
8. Cauzalitate în spaţii Hilbert 237
9. Pasivitate, disipativitate 249

Capitolul V. **Studiul semnalelor aleatoare** 256

A. *Caracteristici statistice ale semnalelor aleatoare* 256
1. Preliminarii 256
2. Clase de semnale aleatoare 268
3. Funcţia de covarianţă a unui semnal aleator 272
4. Semnale staţionare 275
B. *Reprezentări spectrale şi proprietăţi energetice* 288
5. Reprezentări spectrale ale semnalelor staţionare 288
6. Zgomot alb 303
C. *Filtrare şi predicţie* 308
7. Problema de optimalitate 309
8. Soluţii ale problemelor filtrării şi predicţiei 312

Capitolul VI. **Tehnici de prelucrare şi algoritmi în teoria semnalelor** 321
1. Eşantionarea semnalelor 321
2. Cuantizarea semnalelor 337
3. Algoritmul de transformare Fourier rapidă (TFR) 344

Anexe 363

1. Aplicaţii liniare şi matrice 363
2. Integrabilitate Lebesgue 366
3. Spaţii Hilbert 371

NOTAȚII

a.p. — aproape peste tot (o proprietate are loc a.p. dacă mulțimea punctelor care nu o verifică este de măsură nulă)
D^{α} — operator de derivare de ordin α
$\triangleq$ — egalitate definitorie (prin definiție)
not — notație
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{R}$ — clasele de numere naturale, întregi, reale, complexe
sup — margine superioară (sau supremum)
esssup — supremum esențial, definit în anexa 2
v.a. — variabilă aleatoare
$\|.\|$ — normă
$\langle .,. \rangle$ — produs scalar
$A \xrightarrow{f} B$, $x \rightarrow y$ semnifică faptul că funcția f este definită pe mulțimea A, are valorile în B și pentru orice $x \in A$ avem $y = f(x)$.

Capitolul I

CONCEPTUL DE SEMNAL

§1. Model matematic

Noțiunea de semnal este foarte generală și constituie obiect de considerații multidisciplinare; se vorbește curent de semnale acustice, semnale optice, tensiuni și curenți electrici, impulsuri, zgomote, unde seismice, neurosemnale etc.; pentru a putea prezenta definiții precise, permițînd clasificări și un studiu sistematic al proprietăților semnalelor, este indispensabilă adoptarea limbajului matematic [1, 2, 3, 5, 6, 7].

Fie $\mathcal{T}$ o mulțime înzestrată cu o relație de ordine totală $\leqslant$, numită mulțime de *momente*. Dacă M este o mulțime oarecare fixată, atunci prin *semnal* definit pe mulțimea-timp $\mathcal{T}$ cu valori în M se înțelege orice aplicație

$$x : \mathcal{T} \to M, \; t \mapsto x(t),$$

care asociază fiecărui moment $t \in \mathcal{T}$ un element $x(t)$ din M, bine determinat, numit *eșantionul* semnalului x la momentul t [5]. Această definiție este totuși restrictivă (de exemplu, nu cuprinde semnalele multidimensionale și nici impulsurile), totuși ea poate constitui o bază de discuție și arată că studiul semnalelor este strîns legat de studiul funcțiilor, de analiza reală și complexă, ca și de analiza funcțională [2, 7, 8], pentru $\mathcal{T}$ și M particulare.

În cercetarea sistemelor fizice, sînt de regulă reținute faptele esențiale legate de comportarea sistemelor (dinamică, răspuns la diverse tipuri de excitații, comandă, sinteză și optimizare etc.). Orice model matematic, oricît de perfecționat, nu poate cuprinde întreaga complexitate a sistemelor fizice (cu atît mai mult a celor biologice sau sociale) și este necesară adaptarea permanentă a instrumentelor teoretice la faptul concret [6].

În limitele definiției precedente, se poate indica o primă clasificare a semnalelor, după domeniul lor de definiție $\mathcal{T}$, deci după modul de dependență de timp. În cazul cînd $\mathcal{T} \subset \mathbb{Z}$ (de exemplu $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$, $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$), orice semnal definit pe $\mathcal{T}$ se numește *discret*, iar dacă $\mathcal{T}$ este un interval al axei reale $\mathbb{R}$, semnalul se numește *continuu* (sau mai corect, *continual*, pentru a indica distincția de noțiunea de funcție continuă). Cazul cel mai important în aplicații este $M = \mathbb{R}$ și atunci semnalele au valori reale, reprezentînd măsuri ale unor mărimi de stare din realitatea înconjurătoare. Astfel, semnalele sinusoidale, treapta unitate, polinoamele, funcțiile spline etc. sînt semnale continuale, în timp ce selecții de eșantioane ale acestora, indexate după o submulțime a lui $\mathbb{Z}$, sînt asimilate cu semnale discrete. Studiul sistematic al semnalelor discrete a fost impus cu precădere de dezvoltarea tehnicii moderne de calcul [2, 4, 8]. În prezenta lucrare sînt considerate în special semnale unidimensionale (cu alte cuvinte, se consideră funcții de o singură variabilă temporală).

Este posibilă și o clasificare a semnalelor după valorile sau nivelurile acestora; un semnal avînd un număr finit de valori se numește *cuantizat* (sau *în scară*). Orice semnal poate fi aproximat printr-un semnal cuantizat pe un număr finit de niveluri și această operație este esențială în reprezentarea (codificarea) numerică a semnalelor, care asigură posibilitatea de stocare, prelucrare și transmisie de informație, prin mijloacele cele mai perfecționate actuale [2, 4].

O altă clasificare a semnalelor poate fi făcută după criteriul dependenței lor de alte evenimente; se disting semnale *deterministice*, ale căror valori sînt bine determinate și semnale *aleatoare*, ale căror valori pot fi măsurate doar cu o anumită probabilitate. Semnalele aleatoare (esențialmente echivalente cu procesele stochastice) constituie obiect de studiu intens în ultimul timp, pentru că realitatea fizică confirmă prezența lor universală; dealtfel semnalele deterministice sînt idealizări matematice, indispensabile înțelegerii cazului aleator. Cea mai generală clasă a semnalelor deterministice (care cuprinde toate semnalele uzuale, continuale sau discrete, inclusiv impulsuri de diverse ordine) este spațiul $\mathcal{S}'$ al distribuțiilor temperate, care admite disponibilități fundamentale pentru dezvoltarea aparatului transformării Fourier [7]. Capitolele II și III ale acestei lucrări sînt consacrate studiului matematic al semnalelor deterministice continue și discrete, în care sînt prezentate operațiile principale cu semnale, în special convoluția și transformările integrale; în cazul discret sînt subliniate cîteva metode de tratare, implementabile pe calculator. Un loc aparte îl au transformarea z, precum și reprezentările Fourier discretă și Walsh, asimilate de curînd în tehnică, cu

posibilități mari de dezvoltare și aplicare, în care proprietatea de ortogonalitate joacă un rol decisiv, permițînd extinderea metodelor analizei spectrale clasice, ca și o proliferare a tehnicilor moderne de calcul (algoritmul de transformare Fourier rapidă sau transformare Walsh rapidă etc.). În capitolul IV se indică succint astfel de tehnici fundamentale de prelucrare a semnalelor și algoritmi specifici care pot fi traduși în programe de calcul. Capitolul V se referă mai ales la proprietățile energetice ale semnalelor aleatoare, în cadrul unei expuneri care să nu necesite o pregătire specială de teoria probabilităților din partea cititorului; dealtfel pentru citirea lucrării sînt necesare și aproape suficiente cunoștințele de analiză matematică reală și complexă, algebră liniară, teoria ecuațiilor diferențiale, la nivelul programelor actuale pentru anii I și II ai facultăților de profil electric sau mecanic. Trebuie remarcat că în ultimii ani au fost dezvoltate metode noi de prelucrare a semnalelor aleatoare (modulație, detecție, filtrare, extragere din zgomot, compresia datelor, recunoașterea formelor, detectarea zăcămintelor subterane, prelucrarea semnalelor radio etc.) cu o gamă vastă de aplicații. Autorii și-au propus trecerea în revistă numai a principalelor metode matematice cunoscute, prezentate în condiții de rigoare științifică, printr-un limbaj neformalizat dar formalizabil, care, odată asimilat, înlesnește comunicarea. De asemenea, trebuie subliniată încrederea autorilor în forța de convingere a exemplelor ilustrative, răspîndite dealtfel pe tot parcursul lucrării. Uneori este adoptată o terminologie mai puțin simbolică, preferînd, de exemplu, termenul de semnal de energie finită celui de semnal din clasa L_2, semnal cu bandă mărginită de frecvență în loc de semnal din L_1 avînd transformata Fourier cu suport compact etc., tocmai pentru a dovedi preocuparea în a diminua dificultățile legate de comunicarea către ingineri a faptelor matematice; un argument în plus este utilizarea sistematică, în spiritul teoriei circuitelor electrice, a notației j pentru numărul complex $i = (0, 1)$.

§ 2. Sisteme și semnale

Conceptul de semnal este strîns legat de cel de sistem. O clasificare a sistemelor poate fi făcută în funcție de comportarea lor la diversele semnale de intrare care li se aplică și după răspunsul corespunzător; în acest sens, sistemele liniare, invariante în timp, cauzale, disipative etc. au proprietăți externe specifice, diferite de proprietățile intrinseci de tipul controlabilității sau stabilității [3, 5, 8].

Sistemele informaționale complexe constituie astăzi o realitate manifestă, iar problema organizării lor științifice, prin utilizarea mijloacelor moderne oferite de calculatoare, este de mare actualitate. Semnalele sînt purtătoare materiale de informație, mai precis semnalele determină caracteristicile informaționale ale sistemelor de transmitere și de recepție. Informația, semnalul și sistemul sînt concepte inseparabile. În lucrarea de față am adoptat un punct de vedere sistemic în prezentarea rezultatelor teoretice relativ la semnale, ca și în aplicațiile menționate.

Un salt calitativ important în privința aplicării unor metode matematice moderne l-a constituit asimilarea unor clase de sisteme prin operatori asociați între spații de semnale [7]. Aspecte ale acestui proces de modelare sînt discutate în capitolul IV, consacrat studiului realizabilității circuitelor electrice, prin metode aplicabile în esență unor clase mai largi de sisteme. Pentru definirea unor proprietăți de bază ale sistemelor (cauzalitate, pasivitate, disipativitate etc.), un cadru adecvat îl constituie spațiile Hilbert cu rezoluție, considerate în § 8 al capitolului IV. Proprietățile de cauzalitate și fizic-realizabilitate ale unui sistem sînt strîns legate de asemenea de olomorfia funcției de transfer, fapt important în micro ca și în macrocosmos; pentru o serie de descrieri fizice, chiar și aparatul teoriei distribuțiilor se dovedește deja a fi insuficient și se cere lărgit cu entități noi (de exemplu, hiperfuncțiile).

Se poate spune că în întreaga lucrare este prezentată cu precădere teoria semnalelor în sisteme liniare; sistemele neliniare (sau mai corect spus, nu neapărat liniare) constituie un obiect de reflexie în permanentă dezvoltare, cu un aparat matematic specific în lipsa principiului suprapunerii, necesitînd modificări ale metodelor de analiză a raportului între sisteme și semnale [3, 4, 6, 8].

BIBLIOGRAFIE

1. Cartianu, Gh. *Analiza și sinteza circuitelor electrice*. București, Editura didactică și pedagogică, 1972.
2. Franks, L. E. *Signal theory*. Prentice Hall, New Jersey, 1969.
3. Drujinin, V. V., Kontorov, D. C. *Problemî sistemologhii*. Moscova, Sov. Radio, 1976.
4. Gonorovski, I. S. *Radiotehniceskie țepi i signalî*. Moscova, Sov. Radio, 1976.
5. Pichler, F. *Mathematische Systemtheorie*. Walter de Gruyter, 1975.
6. Teodorescu, D. *Ingineria biosistemelor*. Timișoara, Editura Facla, 1978.
7. Vladimirov, V. S. *Obobșcionnîe funkții v matematiceskoi fizike*. Moscova, Nauka, 1976.
8. Zadeh, L. A., Polak, E. *Teoria sistemelor*, București. Editura tehnică, 1973.

Capitolul II

TRANSFORMĂRI INTEGRALE ALE SEMNALELOR (FUNCȚII ȘI DISTRIBUȚII)

A. DISTRIBUȚII, OPERAȚII CU DISTRIBUȚII

Teoria distribuțiilor s-a dezvoltat, pe de o parte, ca o teorie matematică de interes neîndoielnic pentru cunoaștere și, pe de alta, sub impulsul necesității de a elabora modele matematice îmbunătățite pentru o clasă largă de fenomene din fizică și din tehnică. Se întîlnesc adeseori funcții discontinue, funcții spline (funcții polinomiale pe porțiuni, ale căror derivate de la un ordin încolo nu mai pot fi studiate în sens clasic), impulsuri, integrale cu singularități etc., cărora nu li se pot aplica direct rezultatele analizei matematice elementare sau ale teoriei clasice a ecuațiilor diferențiale.

O funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se consideră cunoscută de îndată ce se cunosc valorile ei $f(x)$ în toate punctele-test $x \in \mathbb{R}$; o distribuție $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ se consideră cunoscută prin valorile ei $f(\varphi) \overset{\text{not}}{=} \langle f, \varphi \rangle$ calculate pentru toate funcțiile-test $\varphi \in \mathscr{D}$, cu ipoteze suplimentare de liniaritate și continuitate. Un fapt remarcabil este acela că funcțiile din L_1^{loc}, care pot fi numite funcții uzuale (în sensul că sînt întîlnite în diversele descrieri matematice și cuprind funcțiile elementare, funcțiile continue pe porțiuni etc.), pot fi asimilate cu distribuții, deci

$$\{\text{funcțiile uzuale}\} \subset \{\text{distribuții}\}.$$

Se petrece aici un fenomen matematic similar cu incluziunea $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, intrată definitiv în conștiința noastră matematică (adică trecerea de la numere raționale la numere reale, înlesnită de un procedeu de completare a mulțimii $\mathbb{Q}$ cu mulțimea tuturor limitelor de șiruri convergente de elemente din $\mathbb{Q}$).

O noțiune nouă este justificată mai ales prin disponibilitățile ei superioare de operare și se dovedește utilă numai dacă este dezvoltată într-un cadru natural. Astfel, cadrul natural al teoriei distribuțiilor este analiza funcțională, în care, alături de spații de esență geometrică de tipul $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, sînt studiate diverse spații de funcții, cu probleme specifice. Printre disponibilitățile noi create, menționăm, pe de o parte, operația de derivare, care în cadrul distribuțional capătă o largă aplicabilitate (de exemplu, se derivează chiar și unele funcții discontinue) și, pe de altă parte, transformarea Fourier, care în contextul distribuțional al spațiului $\mathscr{S}'$, permite depășirea dificultăților deosebite întîlnite în teoria clasică a semnalelor, la trecerea din domeniul-timp în domeniul-frecvență (sau invers).

Transformările integrale constituie un indispensabil mijloc teoretic și practic de prelucrare a diverselor clase de semnale, într-un cadru funcțional specific în care noțiunea de distribuție are un rol important.

În înțelegerea și în utilizarea teoriei și calculului cu distribuții există dificultăți mai mult psihologice, datorite încărcăturii de tehnică specifică și rafinament matematic. Vom insista pe exemple și pe aplicații semnificative, incluzînd folosirea sistematică a ideilor simple fizice, dealtfel generatoare ale întregii teorii.

§ 1. Clase remarcabile de semnale continuale

În cele ce urmează, se vor considera distribuții de o singură variabilă, cu valori reale sau complexe, cu excepția unor situații care vor fi menționate explicit. Scalarii din $\mathbb{C}$ pot fi înlocuiți peste tot cu scalari din $\mathbb{R}$, dar acest fapt constituie doar psihologic o simplificare a considerațiilor.

Pentru o funcție $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se notează cu $Z\varphi$ interiorul mulțimii de anulare a lui φ și cu $\operatorname{supp} \varphi$ *suportul lui* φ. Așadar, $Z\varphi = \operatorname{int}\{t \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) = 0\}$, $\operatorname{supp} \varphi = \{t \in \mathbb{R} \mid \varphi(t) \neq 0\}^- = \complement(Z\varphi)$, deci $\operatorname{supp} \varphi$ este complementara celui mai mare deschis pe care φ se anulează.

Dacă $A \subset \mathbb{R}$ și $\operatorname{supp} \varphi \subset A$, atunci φ se anulează în afara lui A și reciproc.

Funcția $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este *cu suport mărginit* (sau echivalent, *cu suport compact*) dacă mulțimea închisă $\operatorname{supp} \varphi$ este în plus mărginită, adică φ se anulează în afara unui interval mărginit.

Vom considera cîteva clase importante de funcții $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ care pot fi asimilate totodată cu semnale continuale, în sensul precizat în cap. I. Pentru fiecare din aceste clase, notată K, și pentru o funcție $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $\varphi = u + jv$, avem $\varphi \in K$ dacă și numai dacă u și v aparțin lui K ($u = \operatorname{Re} \varphi$, $v = \operatorname{Im} \varphi$).

C^k = mulțimea funcțiilor $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, derivabile cu derivate continue pînă la ordinul k inclusiv, în fiecare punct din $\mathbb{R}$ (indicele k reprezintă orice număr întreg $\geqslant 0$ fixat);

C_0^k = submulțimea lui C^k formată din funcțiile cu suport mărginit;

L_1 = mulțimea funcțiilor integrabile Lebesgue pe $\mathbb{R}$. Așadar, o funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aparține clasei L_1 dacă și numai dacă este măsurabilă și $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$.

L_1^{loc} = mulțimea funcțiilor $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ care sînt măsurabile și integrabile Lebesgue pe orice interval compact din $\mathbb{R}$ (funcțiile din L_1^{loc} se mai numesc *local integrabile* sau cu un termen mai ambiguu, *uzuale*).

Evident, $C_0^k \subset C^k$, $C_0^{k+1} \subset C_0^k$, $C^{k+1} \subset C^k$, $C_0^k \subset L_1 \subset L_1^{loc}$ și $C^k \subset L_1^{loc}$, $(\forall) k \geqslant 0$.

Vom nota de asemenea prin C^∞ (respectiv C_0^∞) mulțimea funcțiilor $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ care sînt infinit derivabile (respectiv infinit derivabile cu suport mărginit).

1.1. **Exemple.** a) În întreaga lucrare vom nota prin σ *treapta unitate* a lui Heaviside, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < 0, \\ 1, & \text{dacă } t \geqslant 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

cu graficul reprezentat în fig. 2.1, a. Evident, $\sigma \in L_1^{loc}$, $\sigma \notin L_1$, $\sigma \notin C^k$ ($k \geqslant 0$); de asemenea, $\operatorname{supp} \sigma = [0, \infty)$.

b) Considerăm funcția $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$\varphi(t) = t^{n+1} \cdot \sigma(t), \quad (\forall) t \in \mathbb{R}, \; n \geqslant 0 \text{ fiind un întreg fixat.}$$

Avem $\varphi \in C^n$, $\varphi \notin C^{n+1}$, $\varphi \in L_1^{loc}$, $\varphi \notin L_1$, $\operatorname{supp} \varphi = [0, \infty)$ (v. fig. 2.1, b).

c) Fie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = A[\sigma(t) - \sigma(t - \pi)] \sin t$, $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, A fiind o constantă reală. În acest caz, $\varphi \in C_0^0$, $\operatorname{supp} \varphi = [0, \pi]$ (v. fig. 2.1, c).

d) Reamintim că orice funcție de forma $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ cu A, ω, φ constante reale ($A > 0$, $\omega > 0$) se numește semnal sinusoidal cu perioada principală $2\pi/\omega$; evident, $\varphi \in C^\infty$, $\operatorname{supp} \varphi = \mathbb{R}$, $\varphi \in L_1^{loc}$, dar $\varphi \notin L_1$.

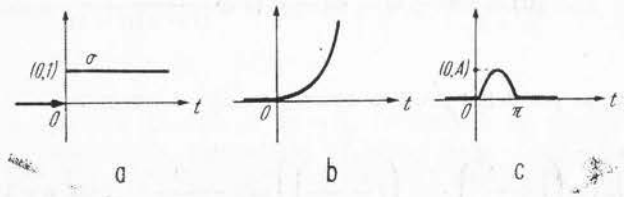


Fig. 2.1. Semnale $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Semnalele continuale $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu suport mărginit, au proprietatea că există un interval $[\alpha, \beta]$, $\alpha < \beta$, astfel încît $\varphi(t) = 0$ pentru $t < \alpha$ și pentru $t > \beta$, deci ele modelează semnale fizice cu durată mărginită. Pentru dezvoltarea teoriei distribuțiilor un

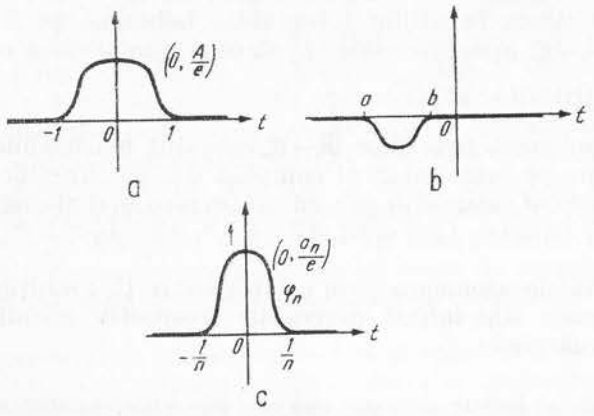


Fig. 2.2. Exemple de funcții din $\mathcal{D} = C_0^\infty$.

rol deosebit îl au funcțiile din C_0^∞, adică funcțiile $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ care sînt infinit derivabile și au suport mărginit. Dăm un exemplu tipic de funcție nenulă din C_0^∞:

e) Considerăm funcția $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\varphi(t) = A[\sigma(t+1) - \sigma(t-1)] \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), \quad t \in \mathbb{R},$$

A fiind o constantă reală nenulă. Graficul ei este reprezentat în fig. 2.2, a; evident, $\varphi \in C_0^\infty$, $\operatorname{supp} \varphi = [-1, 1]$. Modificînd puțin acest exemplu, putem defini funcții din C_0^∞ care au ca suport orice interval $[a, b]$ dat, $a < b$, de exemplu luînd

$$\psi(t) = [\sigma(t-b) - \sigma(t-a)] \exp \frac{1}{(t-a)(t-b)} \qquad \text{(v. fig. 2.2, b)}$$

și, mai general, se pot defini șiruri de funcții din C_0^∞, de exemplu

$$\varphi_n(t) = a_n \left[\sigma\left(t + \frac{1}{n}\right) - \sigma\left(t - \frac{1}{n}\right)\right] \exp \frac{1}{n^2 t^2 - 1}, \quad t \in \mathbb{R}, \; n \geqslant 1 \text{ întreg.}$$

Constantele reale a_n pot fi alese astfel încît $a_n > 0$ și $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\, dt = 1$, $(\forall) n \geqslant 1$ și avem atunci $a_n \geqslant \frac{ne}{2}$, deci $a_n \to \infty$ pentru $n \to \infty$. Graficele funcțiilor φ_n sînt indicate în fig. 2.2, c. Mai tîrziu vor fi utilizate și alte clase de funcții $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, anume L_2 și L_2^{loc}:

$$L_2 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ măsurabilă și } \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty, \text{ adică } f^2 \in L_1 \right\},$$

$$L_2^{loc} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid f \text{ măsurabilă și } f \in L_2(I) \text{ pentru orice interval compact } I \subset \mathbb{R} \}.$$

În general, $L_2 \not\subset L_1$, $L_1 \not\subset L_2$, dar $L_2^{loc} \subset L_1^{loc}$ (pentru orice interval mărginit $I \subset \mathbb{R}$ și pentru orice $f \in L_2^{loc}$ avem $f \in L_2(I)$ și cum $1 \in L_2(I)$, rezultă că produsul scalar $\langle |f|, 1 \rangle$ există; așadar $\int_I |f(t)|\, dt < \infty$, adică $f \in L_1(I)$, deci $f \in L_1^{loc}$).

f) Considerăm *funcția de eșantionare* $\operatorname{Sa} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (numită uneori *funcție de fantă*) definită prin

$$\operatorname{Sa}(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t}, & \text{dacă } t \neq 0, \\ 1, & \text{dacă } t = 0. \end{cases} \qquad (2.2)$$

Notația provine de la „sinus atenuat". Avem $\operatorname{Sa} \in L_2$, $\operatorname{Sa} \notin L_1$ (v. fig. 2.3, a).

g) Pentru funcția

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \; f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} [\sigma(t) - \sigma(t-1)]$$

al cărei grafic este indicat în fig. 2.3, b, avem $f \in L_1$, $f \notin L_2$.

h) În fine, pentru funcția $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită prin $g(t) = \dfrac{1}{1+jt}$, $t \in \mathbb{R}$, avem $g \in L_2$ și $g \notin L_1$.

Mulțimea tuturor funcțiilor $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ formează un spațiu vectorial complex V, relativ la operațiile $(f, g) \mapsto f + g$, $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$. Clasele C^k, C_0^k, L_1, L_1^{loc}, C^∞, C_0^∞, L_2, L_2^{loc} sînt evident subspații vectoriale ale lui V.

În cele ce urmează, două din aceste clase de funcții $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ vor fi utilizate cu precădere și vor fi înzestrate cu structuri de spațiu vectorial topologic (SVT), anume :

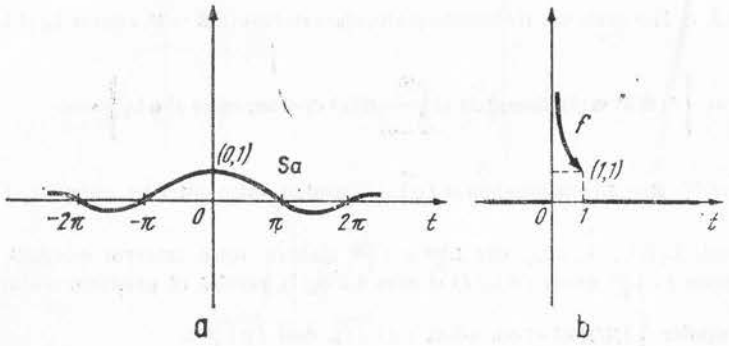


Fig. 2.3. Semnale $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a – funcția de eșantionare Sa $\in L_2\setminus L_1$; b – funcție $f\in L_1\setminus L_2$.

1) $\mathcal{D}$ = spațiul vectorial C_0^∞, în care un șir de funcții $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 0}$ din $\mathcal{D}$ se consideră *convergent către* 0 *în* $\mathcal{D}$ dacă este verificată condiția :

> există un interval mărginit $I\subset\mathbb{R}$ astfel încît toate funcțiile φ_n, $n\geqslant 0$, să fie nule în afara lui I și pentru orice întreg fixat $k\geqslant 0$, șirul derivatelor $\varphi_n^{(k)} = D^k\varphi_n$ să fie uniform convergent către 0 în I. (2.3)

Se va scrie pe scurt : $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ pentru $n\to\infty$.

2) $\mathcal{E}$ = spațiul vectorial C^∞, în care un șir de funcții $\{\psi_n\}_{n\geqslant 0}$ din $\mathcal{E}$ se consideră *convergent către* 0 *în* $\mathcal{E}$ dacă este verificată condiția :

> pentru orice întreg fixat $k\geqslant 0$, șirul derivatelor $\psi_n^{(k)}$ este uniform convergent către 0, pe orice interval mărginit fixat. (2.4)

Se va scrie pe scurt : $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$ pentru $n\to\infty$.

1.2. **Exemple.** a) Considerăm funcția $\varphi\in\mathcal{D}$ din exemplul 1.1, e) ; considerăm șirul $\{\varphi_n\}$, $n\geqslant 1$, de funcții din $\mathcal{D}$ definit prin

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n}\,\varphi\left(\frac{t}{n}\right),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Se observă că supp $\varphi_n = [-n, n]$, prin urmare, șirul $\{\varphi_n\}$ nu converge către 0 în $\mathcal{D}$, deoarece nu există un interval mărginit în afara căruia toate funcțiile φ_n, $n\geqslant 1$, să fie nule. Dar funcțiile φ, φ_n, $n\geqslant 1$, aparțin lui $\mathcal{E}$ și este evident că $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} 0$, pentru $n\to\infty$.

b) Pornind de la aceeași funcție φ, se poate considera șirul ψ_n, $n\geqslant 1$, de funcții din $\mathcal{D}$ definit prin

$$\psi_n(t) = \frac{1}{n}\,\varphi(t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

În acest caz, supp $\psi_n = [-1, 1]$ și avem $\psi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ pentru $n\to\infty$.

1.3. **Observații.** Am indicat în (2.3), (2.4) structura de convergență în spațiile $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$. Desigur, convergența către 0 este suficientă pentru a defini convergența către orice element ($\varphi_n\to\varphi$ dacă și numai dacă $\varphi_n - \varphi\to 0$ etc.). Cele două spații au însă o structură SVT, adică admit topologii relativ la care adunarea și înmulțirea cu scalar devin operații continue.

Fixăm un șir $\{K_n\}_{n\geqslant 1}$ de mulțimi compacte (mărginite și închise) în $\mathbb{R}$, astfel încît $K_n\subset\overset{\circ}{K}_{n+1}$, $(\forall)n\geqslant 1$ și $\bigcup_{n\geqslant 1} K_n = \mathbb{R}$; de exemplu, $K_n = [-n, n]$, $n\geqslant 1$. Pentru orice $\psi\in\mathcal{E}$ și pentru orice $n\geqslant 1$ notăm

$$p_n(\psi) = \sup_{t\in K_n,\ m\leqslant n} |\psi^{(m)}(t)|.$$

Pe spațiul vectorial $\mathcal{E}$ se consideră de obicei topologia definită de familia numărabilă de seminorme p_n, $n\geqslant 1$, și se poate arăta că, înzestrat cu această topologie, spațiul $\mathcal{E}$ devine un SVT metrizabil complet, iar structura corespunzătoare de convergență este tocmai cea indicată anterior.

Pentru a defini topologia uzuală pe $\mathcal{D}$, considerăm mai întîi pentru orice compact $K\subset\mathbb{R}$, subspațiul $\mathcal{D}_K$ al lui $\mathcal{E}$ format din toate funcțiile avînd suportul conținut în K. Se vede că $\mathcal{D}_K$ este un subspațiu închis al lui $\mathcal{E}$, deci are o structură SVT metrizabil complet. Pe reuniunea $\bigcup_{n\geqslant 1}\mathcal{D}_{K_n}$ egală evident cu $\mathcal{D}$, se poate defini topologia de limită inductivă strictă, care induce tocmai structura de convergență definită anterior pe $\mathcal{D}$.

Trebuie remarcat faptul că din existența topologiilor anterioare pe spațiile $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ rezultă structura de convergență, dar reciproca nu este adevărată.

În cele ce urmează, nu vom folosi explicit topologiile anterioare pe spațiile $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$ și sîntem interesați cu deosebire în aplicațiile distribuțiilor. Pentru detalii trimitem la [5, 6, 20].

Reamintim că o funcție $h : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ se numește *analitică* dacă pentru orice punct $a\in\mathbb{R}$ există un șir de numere complexe $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ astfel încît seria $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ să fie convergentă într-o vecinătate a lui a și să aibă suma $h(x)$. Orice funcție analitică este în $\mathcal{E}$. O proprietate specifică a funcțiilor analitice este *principiul identității*, conform căruia dacă $h : \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ este analitică și dacă h se anulează în punctele unui interval deschis, atunci h se anulează pe tot $\mathbb{R}$. Această proprietate arată că singura funcție analitică aparținînd lui $\mathcal{D}$ este funcția identic nulă. Polinoamele, exp, sin, cos etc. sînt funcții analitice.

O altă clasă remarcabilă de funcții o constituie funcțiile spline. Dacă $I = [a, b]$ este un interval și dacă $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ este o diviziune a intervalului I, se numește *funcție spline de grad* k ($k \geqslant 1$) relativ la această diviziune orice funcție $s : [a, b] \to \mathbb{C}$ astfel încît $s \in C^{k-1}(I)$ și în orice interval $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leqslant i \leqslant n$, funcția s să coincidă cu un polinom de grad cel mult k. Așadar, funcțiile spline sînt funcții polinomiale pe porțiuni; ele sînt utilizate în teoria interpolărilor (trimitem cititorul la lucrarea: Micula, Gh. *Funcții spline și aplicații*, București, Editura tehnică, 1978).

§ 2. Funcții-test; clasificarea distribuțiilor, exemple

Funcțiile-test sînt funcții „cu comportare bună" și nu au o definiție ca atare.

Există patru spații principale de funcții-test $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ și anume $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$, C_0^k ($k \geqslant 0$ întreg fixat) și $\mathscr{S}$, utilizate în funcție de scopul urmărit. Primele două au fost studiate anterior.

Pe spațiul C_0^k se introduce următoarea convergență:

un șir $\{f_n\}_{n \geqslant 0}$ de funcții din C_0^k se spune *convergent către* 0 *în* C_0^k dacă există un interval mărginit $I \subset \mathbb{R}$ în **afara** căruia toate funcțiile f_n, $n \geqslant 1$, sînt nule și, în plus, șirurile $\{f_n\}$, $\{f_n'\}$, $\{f_n''\}$, ..., $\{f_n^{(k)}\}$ converg uniform către 0 pe I. (2.5)

Se mai scrie $f_n \xrightarrow{C_0^k} 0$ pentru $n \to \infty$.

Spațiul $\mathscr{S}$ va fi studiat în detaliu ulterior, în legătură cu definiția generală a transformării Fourier. Aici amintim succint definiția funcțiilor din $\mathscr{S}$, numite și funcții rapid descrescătoare la zero: o funcție $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numește *rapid descrescătoare la zero* dacă $g \in \mathscr{E} = C^\infty$ și dacă pentru orice polinom P și pentru orice n, funcția $P \cdot g^{(n)}$ este mărginită. Așadar, o funcție $g \in \mathscr{S}$ descrește la zero, pentru $|t| \to \infty$, împreună cu toate derivatele, mai repede decît orice putere a lui t^{-1}. De exemplu, funcția $t \mapsto \exp(-t^2)$ aparține lui $\mathscr{S}$ și, de asemenea, orice funcție din $\mathscr{D}$ aparține lui $\mathscr{S}$.

Se verifică imediat că $\mathscr{S}$ este un spațiu vectorial complex și definim structura de convergență pe $\mathscr{S}$ după cum urmează:

un șir $\{g_n\}_{n \geqslant 1}$ de funcții din $\mathscr{S}$ se numește *convergent către* 0 *în* $\mathscr{S}$ dacă pentru orice numere întregi h, $k \geqslant 0$ șirul de funcții $\{t^h \cdot g_n^{(k)}\}_{n \geqslant 1}$ converge uniform către 0 pe $\mathbb{R}$. (2.6)

Au loc incluziunile

$$\mathscr{D} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{E}, \quad \mathscr{D} \subset C_0^k. \tag{2.7}$$

Acestea trebuie înțelese într-un sens mai strict, anume nu doar ca incluziuni de mulțimi dar și cu păstrarea șirurilor convergente; mai precis, dacă $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, atunci $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{S}} 0$ și $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{E}} 0$, iar dacă $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, atunci $\varphi_n \xrightarrow{C_0^k} 0$, pentru $n \to \infty$, ceea ce rezultă din definițiile date în (2.3)–(2.6).

Notăm cu W oricare din aceste patru spații de funcții-test. Vom nota cu W' mulțimea tuturor funcționalelor liniare pe W, care sînt continue prin șiruri. Așadar, un element din W' este o aplicație $f : W \to \mathbb{C}$ care este liniară [adică $f(au + bv) = af(u) + bf(v)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{C}$ și pentru orice $u, v \in W$] și, în plus, pentru orice șir $\varphi_n \xrightarrow{W} 0$, rezultă $f(\varphi_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0$, pentru $n \to \infty$.

Mulțimea W' se mai numește *spațiul dual al lui* W și are la rîndul ei o structură naturală de spațiu vectorial complex, definind pentru orice $f_1, f_2 \in W'$ și $a \in \mathbb{C}$ funcționalele $f_1 + f_2$, af_1 din W', prin

$$(f_1 + f_2)(u) \stackrel{\Delta}{=} f_1(u) + f_2(u), \quad (af)(u) \stackrel{\Delta}{=} af(u),$$

pentru orice $u \in W$. (Simbolul $\stackrel{\Delta}{=}$ semnifică o egalitate definitorie pentru membrul stîng.) Două elemente f_1, f_2 din W' se consideră *egale* dacă $f_1(u) = f_2(u)$, pentru orice $u \in W$.

Un șir $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ de elemente din W' se numește *convergent slab către* 0 *în* W' dacă pentru orice $u \in W$ avem $f_n(u) \xrightarrow{\text{în } \mathbb{C}} 0$ pentru $n \to \infty$. Se mai scrie $f_n \xrightarrow{W'} 0$. (2.8)

În acest mod am definit patru spații vectoriale asociate cu spațiile de funcții-test considerate și anume

$$\mathscr{D}', \mathscr{S}', \mathscr{E}', \mathscr{D}_k' = (C_0^k)'.$$

2.1. **Definiții.** Funcționalele din $\mathscr{D}'$ se numesc *distribuții* (sau *funcții generalizate*).

Funcționalele din $\mathscr{S}'$ se numesc *distribuții temperate*.

Funcționalele din $\mathscr{E}'$ se numesc *distribuții cu suport mărginit*.

Funcționalele din $\mathscr{D}_k'$ se numesc *distribuții de ordin finit, cel mult* k.

Ilustrăm definițiile anterioare pentru clasa $\mathscr{D}'$ a distribuțiilor. Definiții similare au loc pentru celelalte clase de distribuții. Așadar, o distribuție $f \in \mathscr{D}'$ este o aplicație $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ care este $\mathbb{C}$-liniară și

are proprietatea că de îndată ce $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, rezultă $f(\varphi_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0$, pentru $n \to \infty$. Uneori este util de notat $\langle f, \varphi \rangle$ în loc de $f(\varphi)$; acesta este deci un număr (real sau complex) numit *valoarea distribuției f pentru funcția-test* $\varphi \in \mathscr{D}$. Două astfel de distribuții $f, g \in \mathscr{D}'$ se consideră *egale* dacă $f(\varphi) = g(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$, iar un șir $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ de distribuții din $\mathscr{D}'$ *converge slab în* $\mathscr{D}'$ *către o distribuție* $f \in \mathscr{D}'$ dacă $f_n(\varphi) \xrightarrow{\mathbb{C}} f(\varphi)$ pentru $n \to \infty$, oricare ar fi funcția-test $\varphi \in \mathscr{D}$.

Un rezultat important este următoarea *proprietate de completitudine* a spațiului $\mathscr{D}'$:

Dacă $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ este un șir de distribuții din $\mathscr{D}'$, având proprietatea că există $L_\varphi = \lim\limits_{n \to \infty} f_n(\varphi)$ în $\mathbb{C}$, oricare ar fi funcția-test $\varphi \in \mathscr{D}$, atunci aplicația $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto L_\varphi$ este o distribuție (adică este liniară și continuă prin șiruri).

Demonstrația poate fi găsită în [20, 27].

Așadar, limita în sensul convergenței slabe a unui șir de distribuții din $\mathscr{D}'$ este tot o distribuție din $\mathscr{D}'$. Vom vedea că spațiul $\mathscr{S}'$ are o proprietate similară, dar $\mathscr{E}'$ nu are o astfel de proprietate.

Un concept clasificator important este cel de suport al unei distribuții. În general, nu se poate vorbi de valoarea unei distribuții într-un punct fixat, dar se poate totuși defini egalitatea a două distribuții pe vecinătăți ale acelui punct.

2.2. **Definiții.** Se spune că o distribuție $f \in \mathscr{D}'$ *se anulează pe un deschis* $U \subset \mathbb{R}$ dacă $f(\varphi) = 0$, pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$ astfel încît $\operatorname{supp} \varphi \subset U$.

Se mai scrie : $f = 0$ pe U (ca o egalitate globală, nu punct cu punct). Reuniunea tuturor deschișilor din $\mathbb{R}$ pe care f se anulează se numește *deschisul de anulare al lui f*, notat Z_f, iar mulțimea închisă $\operatorname{supp} f = \mathbb{C}Z_f$ se numește *suportul distribuției f*.

Un fapt util, ceva mai delicat de probat, este următoarea *proprietate locală* : o distribuție care se anulează pe fiecare element al unei familii de mulțimi deschise se anulează și pe reuniunea familiei [5, 27].

Apare posibilă o primă clasificare a distribuțiilor din $\mathscr{D}'$:

— *distribuții cu suport mărginit*, adică distribuții $f \in \mathscr{D}'$ astfel încît să existe un interval mărginit $[a, b]$, $a < b$, în afara căruia f se anulează ; printre acestea se evidențiază cele *cu suport punctual* (adică există un punct x_0 astfel încît $\operatorname{supp} f = \{x_0\}$) ;

— *distribuții cu suport nemărginit* ; printre acestea se evidențiază distribuțiile $f \in \mathscr{D}'$ *cu suport mărginit la stînga* (respectiv *dreapta*), pentru care există $a \in \mathbb{R}$ astfel încît $\operatorname{supp} f \subset [a, \infty)$ (respectiv

$\operatorname{supp} f \subset (-\infty, a]$) și *distribuțiile cu suport pozitiv*, pentru care $\operatorname{supp} f \subset [0, \infty)$.

2.3. **Exemple.** a) Fixăm o funcție $f \in L_1^{loc}$ și definim aplicația $\underline{f} : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$, punînd pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$,

$$\underline{f}(\varphi) \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, dt. \tag{2.9}$$

Evident, $\underline{f}$ este o funcțională liniară ; în plus, ea este continuă prin șiruri : într-adevăr, dacă $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$, atunci există, conform cu (2.3), un interval $I = [a, b]$ în afara căruia toate funcțiile φ_n sînt nule iar $\varphi_n \to 0$ uniform pe I, deci

$$\lim_{n \to \infty} \underline{f}(\varphi_n) = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi_n(t)\, dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b f(t)\, \varphi_n(t)\, dt =$$

$$= \int_a^b f(t) \lim_{n \to \infty} \varphi_n(t)\, dt = 0,$$

deci $\underline{f}(\varphi_n) \xrightarrow{\mathbb{C}} 0$. Așadar, $\underline{f}$ este o distribuție, numită *distribuția regulată asociată lui f* sau echivalent, *funcția f privită ca distribuție*.

Așadar, orice funcție elementară poate fi privită ca distribuție. De exemplu, *distribuția* exp este definită prin

$$\exp(\varphi) = \langle \exp, \varphi \rangle \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^t\, dt, \qquad (\forall) \varphi \in \mathscr{D}.$$

Similar, *distribuția* sinus este

$$\sin(\varphi) = \langle \sin, \varphi \rangle \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \sin t\, dt, \qquad (\forall) \varphi \in \mathscr{D},$$

iar *distribuția* constantă C (constantă reală sau complexă) este definită prin asocierea $\mathscr{D} \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto C \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt$.

Dar în clasa L_1^{loc} există și funcții discontinue, de exemplu semnalul treaptă unitate σ (v. exemplul 1.1, a). Distribuția regulată asociată lui σ sau funcția σ privită în $\mathscr{D}'$ este atunci funcționala $\underline{\sigma} : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$\langle \underline{\sigma}, \varphi \rangle \overset{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t)\, \varphi(t)\, dt = \int_0^{\infty} \varphi(t)\, dt, \qquad (\forall) \varphi \in \mathscr{D}.$$

Este evident că supp $\underline{\sigma} = [0, \infty)$, deoarece $U = (-\infty, 0)$ este cel mai mare deschis din $\mathbb{R}$ pentru care

$$\int_0^\infty \varphi(t)\,dt = 0, \text{ ori de cîte ori } \varphi \in \mathscr{D} \text{ și supp } \varphi \subset U.$$

Se poate arăta, folosind definițiile, că supp $\underline{f}$ = supp f, pentru orice $f \in L_1^{loc}$.

b) Rezultă din cele spuse anterior o a doua clasificare a distribuțiilor din $\mathscr{D}'$ în :

— *distribuții regulate* (adică distribuții de forma $\underline{f}$ cu $f \in L_1^{loc}$) ;

— *distribuții singulare*, care nu sînt regulate.

Pentru a arăta că această împărțire nu este fără obiect trebuie construite efectiv distribuții singulare.

Considerăm distribuția lui Dirac

$$\delta : \mathscr{D} \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto \varphi(0), \text{ deci } \langle \delta, \varphi \rangle \overset{\Delta}{=} \varphi(0)$$

(este evident că această asociere este liniară și continuă prin șiruri).

Arătăm că δ este o distribuție singulară și pentru aceasta, procedăm prin reducere la absurd. Presupunem deci că ar exista o funcție $f \in L_1^{loc}$ astfel încît $\delta = \underline{f}$, deci $\delta(\varphi) = \underline{f}(\varphi)$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0),\ (\forall)\varphi \in \mathscr{D}.$$

Considerăm șirul de funcții-test φ_n construit în exemplul 1.1, e :

$$\varphi_n(t) = a_n \left[\sigma\left(t + \frac{1}{n}\right) - \sigma\left(t - \frac{1}{n}\right) \right] \cdot \exp \frac{1}{n^2 t^2 - 1},$$

în care constanta a_n este aleasă astfel încît $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(t)\,dt = 1$, ceea ce arată că $a_n \to \infty$. Rezultă atunci egalitatea

$$\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} f(t)\,\varphi_n(t)\,dt = \frac{a_n}{e},\ (\forall)n \geqslant 1.$$

Notînd $M = \underset{t \in [-1,\,1]}{\text{esssup}} |f(t)|$, rezultă inegalitățile

$$\frac{a_n}{e} \leqslant M \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \varphi_n(t)\,dt = M, \text{ adică } a_n \leqslant Me,$$

ceea ce contrazice afirmația că $a_n \to \infty$. Prin urmare, ipoteza că δ ar fi distribuție regulată este falsă.

Alte distribuții singulare sînt $\delta^{(k)}$, $k \geqslant 1$, definite prin $\langle \delta^{(k)}, \varphi \rangle \overset{\Delta}{=} (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$. De asemenea, pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}$ se poate defini distribuția singulară $\delta_{t_0} \in \mathscr{D}'$ prin $\langle \delta_{t_0}, \varphi \rangle \overset{\Delta}{=} \varphi(t_0)$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$. Pentru $t_0 = 0$ se obține $\delta_0 = \delta$. Avem supp $\delta^{(k)} = \{0\}$, $(\forall)\, k \geqslant 1$ și supp $\delta_{t_0} = \{t_0\}$, adică $\delta^{(k)}$, δ_{t_0} sînt distribuții cu suport punctual.

c) Distribuția δ poate fi interpretată și ca o funcțională liniară continuă pe spațiul C_0^0 al funcțiilor continue $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ cu suport mărginit ; astfel de funcționale se mai numesc *măsuri Radon* (sau *distribuții de ordin* 0).

Distribuția $\delta^{(k)}$, $k \geqslant 1$ fiind un întreg fixat, este o distribuție de ordin $\leqslant k$ deoarece este o funcțională liniară $C_0^k \to \mathbb{C}$ și în plus este continuă prin șiruri [dacă $\varphi_n \overset{C_0^k}{\longrightarrow} 0$, atunci $\varphi_n^{(k)}(0) \overset{\mathbb{C}}{\longrightarrow} 0$, deci $\delta^{(k)}(\varphi_n) \overset{\mathbb{C}}{\longrightarrow} 0$].

O altă clasificare a distribuțiilor din $\mathscr{D}'$ este în :

— *distribuții de ordin finit* (de exemplu deltele δ, δ', δ'', . . .) ; acestea sînt distribuții $\mathscr{D} \to \mathbb{C}$ care pot fi prelungite la funcționale liniare și continue pe spații de forma C_0^k, $k \geqslant 0$, adică la distribuții din $\mathscr{D}_k'$;

— *distribuții de ordin infinit*, care nu pot fi prelungite la nici un C_0^k.

Un exemplu de distribuție de ordin infinit este dat de distribuția $f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta_k^{(k)}$, care asociază oricărei funcții $\varphi \in \mathscr{D}$ numărul $\langle f, \varphi \rangle = \sum_k (-1)^k \varphi^{(k)}(k)$, suma fiind finită deoarece φ are suport mărginit. Verificările necesare sînt imediate.

d) Un alt exemplu important de distribuție singulară, avînd suport nemărginit, este *valoarea principală a lui* $1/t$, definită prin

$$\left\langle \mathrm{VP}\,\frac{1}{t}, \varphi \right\rangle \overset{\Delta}{=} \text{v.p} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,dt \right], \qquad (2.10)$$

$(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$ și notată $\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}$ sau $\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right)$. Deoarece funcția φ este nulă în afara unui interval $[-R, R]$ și

$$\lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} \left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\varphi(0)}{t}\,dt + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi(0)}{t}\,dt \right] = 0,$$

rezultă că limita din (2.10) există simultan cu limita

$$\lim_{\varepsilon\to 0,\ \varepsilon>0}\left[\int_{-R}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt+\int_{\varepsilon}^{R}\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\,dt\right]$$

și cum

$$\left|\frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\right|\leqslant\sup_{t\in[-R,\,R]}|\varphi'(t)|<\infty,$$

rezultă că definiția (2.10) este consistentă, adică limita respectivă este un număr real sau complex bine determinat, depinzînd de φ.

Asocierea $\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}$ este evident liniară și, în plus, este continuă prin șiruri: dacă $\varphi_n\to 0$, putem alege $R>0$ astfel încît $\operatorname{supp}\varphi_n\subset[-R,R]$, $(\forall)n\geqslant 1$, conform cu (2.5) și avem ca mai sus

$$\left\langle \mathrm{VP}\frac{1}{t},\varphi_n\right\rangle=\mathrm{v.p.}\int_{-R}^{R}\frac{\varphi_n(t)-\varphi_n(0)}{t}\,dt.$$

Deoarece

$$\left|\frac{\varphi_n(t)-\varphi_n(0)}{t}\right|\leqslant\sup_{t\in[-R,\,R]}|\varphi_n'(t)|,$$

rezultă că $\left|\left\langle \mathrm{VP}\frac{1}{t},\varphi_n\right\rangle\right|\leqslant 2R\sup_{t\in[-R,\,R]}|\varphi_n'(t)|$ și cum $\varphi_n'\to 0$ uniform pe intervalul $[-R,R]$, rezultă că $\sup_{t\in[-R,\,R]}|\varphi_n'(t)|\xrightarrow{\text{în }\mathbb{R}}0$, deci $\left\langle \mathrm{VP}\frac{1}{t},\varphi_n\right\rangle\to 0$, pentru $n\to\infty$.

Am verificat astfel în detaliu că funcționala $\mathrm{VP}\,\frac{1}{t}$ este o distribuție din $\mathscr{D}'$.

Exemplele anterioare atestă varietatea elementelor din $\mathscr{D}'$, utilizînd ca spațiu de funcții-test pe $\mathscr{D}$. Incluziunile de tipul $\mathscr{D}\subset C_0^k$, $k\geqslant 0$, au condus la clasificarea distribuțiilor după ordin. Incluziunile $\mathscr{D}\subset\mathscr{S}\subset\mathscr{E}$ și faptul că $\mathscr{D}$ este subspațiu dens în $\mathscr{E}$ arată că au loc incluziunile inverse între spațiile corespunzătoare de distribuții

$$\mathscr{E}'\subset\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'. \tag{2.11}$$

Într-adevăr, pentru orice $f\in\mathscr{E}'$, deci o funcțională liniară și continuă prin șiruri $f:\mathscr{E}\to\mathbb{C}$, restricția $f|\mathscr{S}:\mathscr{S}\to\mathbb{C}$ este o funcțională liniară și de asemenea continuă prin șiruri (dacă $g_n\xrightarrow{\mathscr{S}}0$, atunci $g_n\xrightarrow{\mathscr{E}}0$, deci $\langle f|\mathscr{S},g_n\rangle=\langle f,g_n\rangle\xrightarrow{\mathbb{C}}0$). Apoi asocierea $\mathscr{E}'\to\mathscr{S}'$, $f\mapsto f|\mathscr{S}$ este injectivă (deoarece spațiul $\mathscr{S}$ este dens în $\mathscr{E}$) și în acest sens înțelegem incluziunea $\mathscr{E}'\subset\mathscr{S}'$. Similar se probează că $\mathscr{S}'\subset\mathscr{D}'$.

Așa cum am mai spus, distribuțiile din $\mathscr{S}'$ vor fi studiate în detaliu ulterior. Într-un anumit sens, toate semnalele întîlnite în realitatea fizică sînt elemente din $\mathscr{S}'$, așa cum va fi arătat mai tîrziu.

Un fapt remarcabil este caracterizarea distribuțiilor din $\mathscr{E}'$ ca fiind exact distribuțiile din $\mathscr{D}'$ care au suport compact [27].

Reținem deci că există o dualitate între funcții-test și distribuții și că la funcții din $\mathscr{D}$, care sînt prin definiție cu suport compact, corespund distribuții oarecare, iar la funcții din $\mathscr{E}$ corespund distribuții cu suport compact. Această dualitate admite interpretări analitico-geometrice importante [3].

Am văzut că spațiul $\mathscr{D}'$ posedă o proprietate de completitudine. Arătăm acum printr-un exemplu sugestiv că spațiul $\mathscr{E}'$ nu are o proprietate similară.

2.4. **Exemplu.** Considerăm șirul de funcții $f_n\in L_1^{\mathrm{loc}}$, $n\geqslant 1$, definite prin

$$f_n(t)=\sigma(t)-\sigma(t-n),\quad t\in\mathbb{R}.$$

Distribuțiile regulate asociate au suportul $\operatorname{supp}\underline{f}_n=\operatorname{supp}f_n=[0,n]$, $n\geqslant 1$, deci au suport mărginit, adică aparțin lui $\mathscr{E}'$.

Pe de altă parte, deoarece $(\forall)\varphi\in\mathscr{D}$, avem

$$\langle\underline{f}_n,\varphi\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}[\sigma(t)-\sigma(t-n)]\,\varphi(t)\,dt=\int_0^n\varphi(t)\,dt\to\int_0^\infty\varphi(t)\,dt=\langle\underline{\sigma},\varphi\rangle,$$

rezultă că $\underline{f}_n\xrightarrow{\mathscr{D}'}\underline{\sigma}$ (convergență slabă de funcționale), pentru $n\to\infty$. Subspațiul $\mathscr{E}'$ nu este închis în $\mathscr{D}'$ deoarece $\underline{f}_n\in\mathscr{E}'$ și totuși șirul $\underline{f}_n$ nu converge în $\mathscr{E}'$, deoarece altfel ar rezulta că $\underline{\sigma}\in\mathscr{E}'$, ceea ce este absurd, căci suportul $\operatorname{supp}\underline{\sigma}=[0,\infty)$ nu este mărginit.

2.5. **Observații.** În cadrul exemplului 2.6, a am definit o aplicație $L_1^{\mathrm{loc}}\to\mathscr{D}'$, $f\mapsto\underline{f}$. Dacă $f,g\in L_1^{\mathrm{loc}}$ și $\underline{f}=\underline{g}$, atunci rezultă că $\langle\underline{f},\varphi\rangle=\langle\underline{g},\varphi\rangle$, deci

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,\varphi(t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}g(t)\,\varphi(t)\,dt,\qquad(\forall)\varphi\in\mathscr{D}.$$

Așadar

$$\int_{-\infty}^{\infty}(f-g)\,\varphi\,dt=0\ \text{pentru orice}\ \varphi\in\mathscr{D},$$

deci din proprietățile integralei, rezultă că $f-g=0$ a.p., adică $f=g$ a.p. Identificînd două funcții care coincid a.p., rezultă că asocierea $L_1^{\mathrm{loc}}\to\mathscr{D}'$, $f\to\underline{f}$ este injectivă, adică se

pot identifica funcțiile din L_1^{loc} cu distribuțiile regulate asociate. Acesta este sensul matematic exact al incluziunii

$$\{\text{funcții uzuale}\} \subset \{\text{distribuții}\},$$

care justifică totodată denumirea de funcții generalizate, dată uneori distribuțiilor.

Reținem deci că orice funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ din L_1^{loc} se identifică cu distribuția

$$\varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt \text{ din } \mathscr{D}'.$$

Uneori se extinde formal această reprezentare integrală pentru orice altă distribuție $f \in \mathscr{D}'$ și se scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt \text{ în loc de } \langle f, \varphi\rangle.$$

De asemenea, în loc de notația f pentru o distribuție se scrie $f(t)$, indicînd explicit notarea variabilei independente în funcțiile-test corespunzătoare. De exemplu, distribuția lui Dirac este notată $\delta(t)$ și avem conform definiției

$$\langle \delta(t), \varphi\rangle = \varphi(t)|_{t=0} = \varphi(0), \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}.$$

Această relație este scrisă adeseori abuziv sub forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0).$$

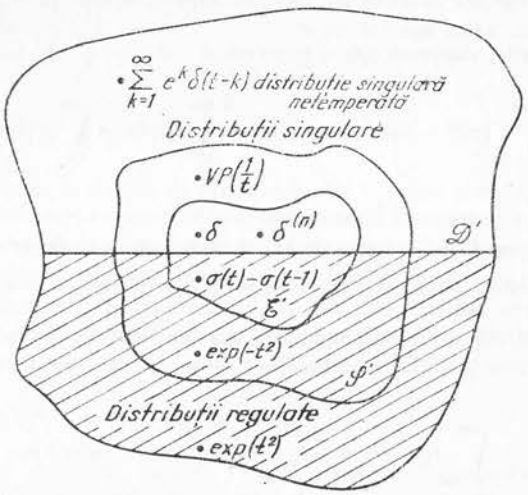


Fig. 2.4. Diagramă de incluziuni ale diferitelor subspații de distribuții.

În încheierea acestor considerații, indicăm în fig. 2.4, o sinteză vizuală a clasificării distribuțiilor. Se observă că distribuțiile din $\mathscr{D}'$ constituie clasa cea mai largă considerată aici, celelalte fiind subclase ale lui $\mathscr{D}'$, fapt subliniat și prin terminologia adoptată, în care distribuțiile din $\mathscr{E}'$, $\mathscr{S}'$, $\mathscr{D}'_k$ primesc adjective corespunzătoare.

§ 3. Operațiile principale cu distribuții

În general, operațiile cu distribuții sînt definite astfel încît acestea să constituie o extindere naturală a operațiilor cu funcții uzuale, deci pentru distribuții regulate să fie doar o transcriere a acestora prin intermediul aplicației liniare și injective $L_1^{loc} \to \mathscr{D}'$.

3.1. **Schimbări de variabilă în distribuții.** Fixăm o distribuție oarecare $f(t)$ din $\mathscr{D}'$ și presupunem că efectuăm o transformare afină $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto at + b = u$, cu a, b constante reale, $a \neq 0$. Definim atunci distribuția $f(at + b)$ din $\mathscr{D}'$ prin

$$\langle f(at+b), \varphi(t)\rangle \overset{\Delta}{=} \frac{1}{|a|}\left\langle f(u), \varphi\left(\frac{u-b}{a}\right)\right\rangle. \tag{2.12}$$

Se verifică imediat că funcționala $f(at + b)$ astfel definită depinde liniar și continuu (prin șiruri) de funcția-test $\varphi \in \mathscr{D}$, deci definește într-adevăr o distribuție. Este de remarcat că schimbarea de variabilă $t \mapsto at + b$ în distribuția f s-a definit folosind schimbarea inversă $u \mapsto \dfrac{u-b}{a}$ în funcțiile-test.

Facem de asemenea remarca următoare: dacă f este o distribuție regulată asociată unei funcții $f \in L_1^{loc}$, notată la fel, atunci formula (2.12) nu este nimic altceva decît egalitatea evidentă de integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,\varphi\left(\frac{u-b}{a}\right)du = |a| \int_{-\infty}^{\infty} f(at+b)\,\varphi(t)\,dt,$$

obținută prin schimbarea de variabilă $u = at + b$ în membrul stîng.

3.2. **Exemple.** a) Considerăm $f = \delta = \delta(t)$; distribuția $\delta(at + b)$ este atunci funcțională $\mathscr{D} \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \dfrac{1}{|a|}\varphi\left(\dfrac{u-b}{a}\right)\Big|_{u=0} = \dfrac{1}{|a|}\varphi\left(-\dfrac{b}{a}\right)$.

Subliniem două cazuri particulare extrem de importante:

— Cazul $b = 0$, $a \neq 0$, în care se definește distribuția $\delta(at)$ prin

$$\langle \delta(at), \varphi\rangle = \frac{1}{|a|}\varphi(0) = \left\langle \frac{1}{|a|}\delta, \varphi\right\rangle = \frac{1}{|a|}\langle \delta, \varphi\rangle, \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D},$$

deci

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta. \tag{2.13}$$

În particular, $\delta(-t) = \delta = \delta(t)$.

— Cazul $a = 1$, $b = -t_0$, în care se definește distribuția $\delta(t - t_0)$ prin $\langle \delta(t - t_0), \varphi \rangle = \varphi(t_0) = \delta_{t_0}(\varphi)$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$, deci

$$\delta(t - t_0) = \delta_{t_0}. \tag{2.14}$$

Cu convenția din cadrul observațiilor 2.5, relația (2.14) se mai scrie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)\, \varphi(t)\, dt = \varphi(t_0), \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}$$

și sub această formă, printr-un abuz de notație, lipsit de gravitate în condițiile cunoașterii sensului corect al noțiunilor, se obține *formula de filtrare*, adeseori folosită în literatura tehnică.

b) Dacă $f \in \mathscr{D}'$ este o distribuție oarecare, se definește distribuția $\check{f}$ prin

$$\check{f} \overset{\Delta}{=} f(-t). \tag{2.15}$$

Conform cu (2.12), avem $\langle f, \check{\varphi} \rangle = \langle \check{f}, \varphi \rangle$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$; am notat $\check{\varphi}(t) = \varphi(-t)$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$.

Dacă $\check{f} = f$ (respectiv $\check{f} = -f$) se spune că distribuția f este *pară* (respectiv *impară*).

Distribuția lui Dirac δ este pară conform cu (2.13), iar distribuția $f = \mathrm{VP}\frac{1}{t}$ este impară, așa cum se verifică imediat.

c) În cele de mai înainte, am considerat schimbări afine de variabilă; se întîlnesc uneori schimbări de variabilă mai generală. Ne restrîngem la schimbări de forma $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto u(t)$ cu u funcție de clasă C^1 pe $\mathbb{R}$, avînd numai zerouri reale simple, izolate, deci în număr cel mult numărabil (de exemplu $u = \sin t$, $u = t^2 - 4$ etc.), efectuate în distribuția lui Dirac. Dacă $\{t_k\}_k$ este șirul zerourilor funcției u, se poate defini distribuția $\delta(u(t))$ prin

$$\delta(u(t)) \overset{\Delta}{=} \sum_k \frac{1}{|u'(t_k)|} \cdot \delta(t - t_k). \tag{2.16}$$

Așadar, $\langle \delta(u(t)), \varphi \rangle = \sum_k \frac{\varphi(t_k)}{|u'(t_k)|}$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$, suma fiind evident finită.

De exemplu, luînd $u(t) = t^2 - u_0$, $u_0 > 0$ real constant, respectiv $u(t) = \sin t$, se obține formulele

$$\delta(t^2 - u_0) = \frac{1}{2\sqrt{u_0}} (\delta(t - \sqrt{u_0}) + \delta(t + \sqrt{u_0})),$$

$$\delta(\sin t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\pi);$$

similar

$$\delta(t^2 - t) = \delta(t) + \frac{1}{2}[\delta(t - 1) + \delta(t + 1)].$$

Am considerat pînă acum distribuții oarecare din $\mathscr{D}'$; dacă f este o distribuție cu suport compact, atunci distribuția $f(at + b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, obținută printr-o transformare afină, are de asemenea suport compact, dar suportul lui $f(at + b)$ nu coincide cu suportul lui $f(t)$, ci este imaginea acestuia prin transformarea punctuală $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u \to \frac{u - b}{a}$.

De exemplu, $\operatorname{supp} \delta(t - t_0) = \{t_0\}$, $\operatorname{supp} \sum_{n \geqslant 1} \delta\left(t - \frac{1}{n}\right) = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$, $\operatorname{supp} \underline{\sigma}(2t + 5) = \left[-\frac{5}{2}, \infty\right)$ etc.

3.3. **Înmulțirea unei distribuții cu o funcție.** Am văzut ce înseamnă $f = g$, $f + g$, αf ($\alpha \in \mathbb{C}$ constant), pentru $f, g \in \mathscr{D}'$. Problema multiplicării distribuțiilor este mai delicată.

Notăm cu W unul din spațiile de funcții-test considerate în § 2. O clasă de funcții $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, notată $\mathscr{M}(W)$, cu proprietatea că pentru orice $u \in W$ și pentru orice $\psi \in \mathscr{M}(W)$ avem $\psi u \in W$ iar dacă $u_n \overset{W}{\to} 0$, atunci $\psi u_n \overset{W}{\to} 0$ se numește *clasă de multiplicatori în* W (definiția se menține pentru orice spațiu vectorial complex de funcții $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$).

De exemplu, dacă $W = \mathscr{D}$, atunci se poate lua $\mathscr{M}(\mathscr{D}) = C^\infty$, pentru că dacă $\varphi \in \mathscr{D}$ și ψ este o funcție de clasă C^∞, atunci produsul aparține lui $\mathscr{D}$, deoarece $\operatorname{supp} \varphi\psi \subset \operatorname{supp} \varphi \cap \operatorname{supp} \psi$.

Dacă $T \in W'$ este o funcțională liniară și continuă, $T : W \to \mathbb{C}$ și dacă $\mathscr{M}(W)$ este o clasă de multiplicatori în W, atunci pentru orice funcție $\psi \in \mathscr{M}(W)$ are sens aplicația $\psi T : W \to \mathbb{C}$, definită prin $(\psi T)(u) \overset{\Delta}{=} T(\psi u)$, $(\forall)u \in W$. Este evident că ψT este aplicație liniară [deoarece $(\psi T)(\alpha u + \beta v) = T(\alpha\psi u + \beta\psi v) = \alpha T(\psi u) + \beta T(\psi v) = \alpha(\psi T)(u) + \beta(\psi T)(v)$, $(\forall)u, v \in W$ și $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{C}$] și continuă prin șiruri [deoarece dacă $u_n \overset{W}{\to} 0$, atunci $\psi u_n \overset{W}{\to} 0$, deci $T(\psi u_n) \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\longrightarrow} 0$, adică $(\psi T)(u_n) \overset{\text{în } \mathbb{C}}{\longrightarrow} 0$].

Așadar, pentru orice distribuție $f \in \mathscr{D}'$ și pentru orice funcție $\alpha \in C^\infty$ putem vorbi de distribuția $\alpha f \in \mathscr{D}'$, notată echivalent cu $f\alpha$, definită prin

$$\langle \alpha f, \varphi \rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, \alpha\varphi \rangle, \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}, \tag{2.17}$$

și numită *produsul distribuției* f *cu funcția infinit derivabilă* α.

3.4. **Exemple.** a) Pentru orice funcție $\alpha: \mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de clasă C^∞, produsul $\alpha\delta$ este distribuția definită prin

$$\langle \alpha\delta, \varphi\rangle = \langle \delta, \alpha\varphi\rangle = \alpha(0)\varphi(0) = \alpha(0)\langle \delta, \varphi\rangle = \langle \alpha(0)\delta, \varphi\rangle,$$

$(\forall)\varphi\in\mathscr{D}$, deci $\alpha\delta = \alpha(0)\delta$.

În particular, $t^n\delta(t) = 0$ pentru orice $n\geqslant 1$.

b) Pentru orice funcție $\alpha\in C_0^\infty$ și pentru orice $t_0\in\mathbb{R}$ fixat se poate considera distribuția din $\mathscr{D}'$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(t)\delta(t-nt_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(nt_0)\delta(t-nt_0).$$

c) Avem $t\,\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right) = 1$, deoarece $\left\langle t\,\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right), \varphi(t)\right\rangle = \left\langle \mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right), t\varphi(t)\right\rangle =$

$$= \mathrm{VP}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\varphi(t)}{t}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = \langle 1, \varphi\rangle,\ (\forall)\varphi\in\mathscr{D}.$$

3.5. **Observații.** În încercarea de a defini produsul a două distribuții există dificultăți deosebite, datorită caracterului esențialmente liniar al conceptului de distribuție. Astfel, produsul a două funcții din L_1^{loc} nu aparține lui L_1^{loc} (de exemplu, funcția $t\mapsto \frac{1}{\sqrt{|t|}}$ aparține lui L_1^{loc}, dar pătratul ei nu are aceeași proprietate). Apoi, ce sens s-ar putea da produsului $\delta(t)\,t\,\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right)$, atîta timp cît $\delta(t)\cdot t = 0$ și $t\,\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right) = 1$?

3.6. **Derivarea distribuțiilor.** Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ o funcție derivabilă astfel încît $f'\in L_1^{loc}$. Atunci are sens distribuția regulată $\underline{f}'$ asociată lui f' și, în plus,

$$\langle \underline{f}', \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\varphi(t)\,dt = f(t)\,\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,dt = -\langle \underline{f}, \varphi'\rangle,$$

$$(\forall)\ \varphi\in\mathscr{D}.$$

Mai general, dacă $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ este o funcție de clasă C^k, $k\geqslant 1$, atunci

$$\langle \underline{f}^{(k)}, \varphi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k)}(t)\varphi(t)\,dt = f^{(k-1)}(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(k-1)}(t)\varphi'(t)\,dt =$$

$$= \langle -\underline{f}^{(k-1)}, \varphi'\rangle = \langle \underline{f}^{(k-2)}, \varphi''\rangle = \ldots = (-1)^k\,\langle \underline{f}, \varphi^{(k)}\rangle,\ (\forall)\varphi\in\mathscr{D}.$$

Aceste formule sugerează următoarea definiție generală:

Pentru orice distribuție $f\in\mathscr{D}'$ și pentru orice $n\geqslant 1$ întreg fixat se definește *derivata de ordin n a lui f* ca fiind distribuția $f^{(n)}$, dată prin

$$\langle f^{(n)}, \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} (-1)^n\,\langle f, \varphi^{(n)}\rangle,\ (\forall)\varphi\in\mathscr{D}. \tag{2.18}$$

Așadar, *orice distribuție poate fi derivată de o infinitate de ori* și asocierea $D^n:\mathscr{D}'\to\mathscr{D}'$, $f\mapsto f^{(n)}$ ($n\geqslant 1$ fixat) este liniară și continuă prin șiruri: dacă $f_k\overset{\mathscr{D}'}{\to}0$, pentru $k\to\infty$, se deduce că $D^n f_k\overset{\mathscr{D}'}{\to}0$, deoarece oricare ar fi funcția-test $\varphi\in\mathscr{D}$, avem

$$\langle D^n f_k, \varphi\rangle = (-1)^n\,\langle f_k, \varphi^{(n)}\rangle\to 0,\ k\to\infty,$$

căci $\varphi^{(n)}\in\mathscr{D}$ și am făcut ipoteza că $f_k\overset{\mathscr{D}'}{\to}0$.

Derivarea distribuțiilor se deosebește de derivarea funcțiilor prin cel puțin două fenomene: distribuțiile pot fi derivate fără nici o discriminare, iar operatorul D de derivare distribuțională este continuu.

3.7. **Exemple.** a) În ipoteza că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ este o funcție derivabilă, este util de observat că are loc egalitatea de distribuții

$$D\underline{f} = (f')_-. \tag{2.19}$$

Într-adevăr, aceasta revine la a proba că $-\langle \underline{f}, \varphi'\rangle = \langle f'\rangle_-, \varphi\rangle$, $(\forall)\varphi\in\mathscr{D}$, adică

$$-\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)\varphi(t)]'\,dt = 0, \qquad f(t)\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{\infty} = 0,$$

ceea ce este evident, întrucît φ se anulează în afara unui interval mărginit.

Relația (2.19) încetează să fie adevărată în ipoteza că f nu ar fi derivabilă. Stabilim o relație mai generală decît (2.19).

Fie $t_0\in\mathbb{R}$ fixat și $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ o funcție de clasă C^1 pe intervalele $(-\infty, t_0)$, (t_0, ∞), iar t_0 este cel mult o discontinuitate de speța I pentru f sau f'. Notăm cu

$$s_{t_0} = f(t_0+0) - f(t_0-0)$$

saltul funcției f în punctul t_0. Calculăm derivata distribuțională $\mathrm{D}\underline{f}$, remarcînd că pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$, avem succesiv :

$$\langle \mathrm{D}\underline{f}, \varphi \rangle = \langle -\underline{f}, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-\infty}^{t_0} f(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t -$$

$$-\int_{t_0}^{\infty} f(t)\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = -f(t)\,\varphi(t)\Big|_{-\infty}^{t_0-0} + \int_{-\infty}^{t_0} f'(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t - f(t)\,\varphi(t)\Big|_{t_0+0}^{\infty} +$$

$$+\int_{t_0}^{\infty} f'(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = s_{t_0}\,\varphi(t_0) + \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

și, în final,

$$\mathrm{D}\underline{f} = s_{t_0}\cdot\delta(t - t_0) + (f')_{-}. \tag{2.20}$$

Reamintim că $(f')_{-}$ este distribuția regulată asociată funcției f', care a fost presupusă continuă pe porțiuni (deci din $\mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}$).

Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție de clasă C^1 pe porțiuni și dacă $t_1, t_2, \ldots, t_p$ sînt puncte de discontinuitate de speța I pentru f sau f', atunci se demonstrează ca mai sus formula

$$\mathrm{D}\underline{f} = (f')_{-} + \sum_{k=1}^{p} s_{t_k}\,\delta(t - t_k). \tag{2.21}$$

b) Ca un exemplu concret, considerăm funcția treaptă σ, care este de clasă C^1 pe $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ și are o discontinuitate de speța I în punctul $t_0 = 0$, cu saltul $s_{t_0} = 1$. Conform formulei (2.20), rezultă

$$\mathrm{D}\underline{\sigma} = \delta, \tag{2.22}$$

adică derivata distribuțională a treptei unitate este egală cu distribuția lui Dirac. De asemenea, dacă considerăm funcția $f = \operatorname{sgn}$,

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } t < 0, \\ 0, & \text{dacă } t = 0, \\ 1, & \text{dacă } t > 0, \end{cases} \qquad \text{atunci } \mathrm{D}f = 2\delta.$$

c) Pentru orice $f \in \mathscr{D}'$, $\alpha \in \mathrm{C}^{\infty}$ are loc formula

$$\mathrm{D}(\alpha f) = \alpha' f + \alpha \mathrm{D}f. \tag{2.23}$$

Într-adevăr, $(\forall)\,\varphi \in \mathscr{D}$, avem, pe de o parte,

$$\langle \mathrm{D}(\alpha f), \varphi \rangle = -\langle \alpha f, \varphi' \rangle = -\langle f, \alpha\varphi' \rangle$$

și, pe de alta,

$$\langle \alpha' f + \alpha \mathrm{D}f, \varphi \rangle = \langle \alpha' f, \varphi \rangle + \langle \alpha \mathrm{D}f, \varphi \rangle = \langle f, \alpha'\varphi \rangle + \langle \mathrm{D}f, \alpha\varphi \rangle =$$
$$= \langle f, \alpha'\varphi \rangle - \langle f, (\alpha\varphi)' \rangle = -\langle f, \alpha\varphi' \rangle.$$

Se poate verifica cu ușurință formula

$$\mathrm{D}(\alpha\delta) = \alpha(0)\delta, \text{ pentru orice funcție } \alpha \in \mathrm{C}^{\infty}. \tag{2.24}$$

d) Se verifică imediat formulele $t\delta' = -\delta$, $t^2\delta' = 0$. În general, dacă $\alpha \in \mathrm{C}^{\infty}$ și $n \geqslant 1$, atunci are loc formula

$$\alpha\delta^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, \alpha^{(k)}(0)\,\delta^{(n-k)}. \tag{2.25}$$

Într-adevăr,

$$\langle \alpha\delta^{(n)}, \varphi \rangle = \langle \delta^{(n)}, \alpha\varphi \rangle = (-1)^{(n)} \langle \delta, (\alpha\varphi)^{(n)} \rangle =$$

$$= (-1)^n \langle \delta, \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \alpha^{(k)}\, \varphi^{(n-k)} \rangle = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, \alpha^{(k)}(0)\, \varphi^{(n-k)}(0) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\, C_n^k\, \alpha^{(k)}(0) \langle \delta^{(n-k)}, \varphi \rangle, \qquad (\forall)\,\varphi \in \mathscr{D}.$$

Din formula (2.25) rezultă direct relațiile

$$t^k\,\delta^{(n)} = (-1)^k\, k!\, C_n^k\, \delta^{(n-k)},\ k \leqslant n \quad \text{și} \quad t^{n+k}\,\delta^{(n)} = 0,\ n \geqslant 1,\ k \geqslant 1.$$

e) Este evident că $\delta = \mathrm{D}^2(t\sigma)$, deoarece $\mathrm{D}(t\sigma) = \sigma + t\,\mathrm{D}\sigma = \sigma + t\delta = \sigma$ și aplicăm (2.22).

Așadar distribuția δ este egală cu derivata secundă distribuțională a funcției continue $t\sigma$. Acest fapt este un caz particular al unei teoreme a lui L. Schwartz : orice distribuție din $\mathscr{D}'$ este egală pe orice deschis mărginit $U \subset \mathbb{R}$ cu derivata distribuțională a unei funcții continue pe U [20, 27]. În aceeași ordine de idei, L. Schwartz a demonstrat o teoremă similară de structură pentru distribuțiile cu suport compact, anume : orice distribuție din $\mathscr{E}'$ poate fi reprezentată (nu neapărat în mod unic) ca o sumă finită de derivate distribuționale de funcții continue cu suport mărginit. În particular, rezultă că orice distribuție din $\mathscr{E}'$ este de ordin finit. Reciproca acestei afirmații este falsă, deoarece distribuția $\underline{\sigma} = (t\underline{\sigma})'$ este de ordin finit, dar $\operatorname{supp} \underline{\sigma} = [0, \infty)$, deci $\underline{\sigma} \notin \mathscr{E}'$. Menționăm în fine un alt rezultat teoretic remarcabil : orice distribuție f cu suport redus la un punct $t_0 \in \mathbb{R}$ (deci automat $f \in \mathscr{E}'$) se reprezintă în mod unic ca o combinație liniară de derivate ale distribuției $\delta_{t_0} = \delta(t - t_0)$, adică este de forma

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} c_k\, \mathrm{D}^k\, \delta(t - t_0), \tag{2.26}$$

cu coeficienții c_k numere complexe.

f) O distribuție $g \in \mathscr{D}'$ se numește *primitivă* a distribuției $f \in \mathscr{D}'$ dacă $Dg = f$, adică

$$\langle Dg - f, \varphi \rangle = 0, \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}.$$

În analogie cu cazul clasic, se poate arăta că orice distribuție $f \in \mathscr{D}'$ are primitivă și că două primitive ale lui f diferă printr-o constantă aditivă [5, 6].

Soluția generală a ecuației $Df = 0$ în $\mathscr{D}'$ este $f = \underline{c}$; în mod similar, soluția ecuației $Df = \delta$ este $f = \underline{\sigma} + \underline{c}$, iar pentru $Df = \underline{\sigma}$, rezultă $f(t) = t\sigma(t) + \underline{c}$ (c fiind o constantă complexă oarecare).

g) Am văzut că distribuția $\mathrm{VP}\dfrac{1}{t}$ este soluție a ecuației $tf = 1$. Dacă $0 < m < 1$, ecuația $t^m f = 1$ are soluția $f = t^{-m} + c\delta$, iar dacă $m \geqslant 2$ este întreg, se poate defini o distribuție $\mathrm{PF}(t^{-m})$ astfel încît $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$,

$$\langle \mathrm{PF}(t^{-m}), \varphi \rangle = \mathrm{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} t^{-m} \left[\varphi(t) - \varphi(0) - t\varphi'(0) - \ldots - \frac{t^{m-2}\varphi^{(m-2)}(0)}{(m-2)!} \right] \mathrm{d}t. \quad (2.27)$$

Punînd $\mathrm{PF}(t^{-1}) = \mathrm{VP}\dfrac{1}{t}$, se verifică ușor că $\mathrm{PF}(t^{-m})' = -m\mathrm{PF}(t^{-m-1})$ și $t^m \mathrm{PF}(t^{-m}) = 1$ pentru orice $m \geqslant 1$ întreg. Remarcăm de asemenea că $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$, are loc relația

$$\left\langle \mathrm{VP}\frac{1}{t}, \varphi \right\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{-1} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t. \quad (2.28)$$

§ 4. Șiruri reprezentative pentru δ; convergența șirurilor și seriilor de distribuții

Dacă f este o distribuție singulară din $\mathscr{D}'$, este utilă construirea unor șiruri de distribuții regulate (adică funcții uzuale) care să conveargă slab către f; se spune atunci că f este aproximabilă printr-o distribuție regulată. În § 5 vom indica un procedeu tipic de regularizare a distribuțiilor, folosind operația de convoluție.

4.1. **Definiție.** Un șir $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ se numește *șir reprezentativ pentru o distribuție* g dacă sînt îndeplinite condițiile:

a) $f_n \in \mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}$, pentru orice $n \geqslant 1$;

b) $f_n \xrightarrow{\mathscr{D}'} g$, pentru $n \to \infty$ $\left(\text{adică } \lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \langle g, \varphi \rangle, (\forall) \in \varphi\mathscr{D}\right)$.

Desigur, dacă g este regulată, putem lua șirul constant $f_n = g$, $(\forall)n \geqslant 1$; noțiunea anterioară prezintă interes pentru distribuții g

singulare. Un caz deosebit de important este cel al șirurilor reprezentative pentru distribuția δ. De aici vor rezulta șiruri reprezentative pentru zgomotul alb, studiat în cap. V al lucrării. În acest sens stabilim

Teorema II.1. *Fie* $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un șir de funcții pozitive din* $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, *astfel încît să fie îndeplinite condițiile*:

(1) $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$ *pentru orice* $n \geqslant 1$;

(2) *pentru orice interval compact* $[a, b]$ *fixat cuprins în* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, *avem*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0;$$

(3) *pentru orice* $R > 0$ *fixat, avem* (fig. 2.5,a)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{|t|\geqslant R} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Atunci șirul $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ *este un șir reprezentativ pentru distribuția* δ, *adică el converge slab în* $\mathscr{D}'$ *către* δ.

Demonstrație. Avem de arătat că

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = \varphi(0), \text{ pentru orice } \varphi \in \mathscr{D}. \quad (2.29)$$

Pentru aceasta, folosind condiția (1), este suficient de arătat că

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0, \text{ unde } I_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t)\,[\varphi(t) - \varphi(0)]\,\mathrm{d}t.$$

Fie $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat. Alegem n_1 natural astfel încît $|\varphi(t) - \varphi(0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ pentru $|t| < 1/n_1$ și $R > 0$ astfel încît $\operatorname{supp}\varphi \subset [-R, R]$. Scriind

$$I_n = \int_{|t|<\frac{1}{n_1}} f_n(t)[\varphi(t) - \varphi(0)]\,\mathrm{d}t + \int_{\frac{1}{n_1}\leqslant|t|\leqslant R} f_n(t)[\varphi(t) - \varphi(0)]\,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{|t|>R} f_n(t)[\varphi(t) - \varphi(0)]\,\mathrm{d}t,$$

rezultă

$$|I_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\int_{|t|<\frac{1}{n_1}} f_n(t)\,dt + \sup_{|t|\leqslant R}|\varphi(t) - \varphi(0)|\int_{\frac{1}{n_1}\leqslant|t|\leqslant R} f_n(t)\,dt +$$

$$+ |\varphi(0)|\int_{|t|>R} f_n(t)\,dt.$$

Folosind condiția (2), putem alege $n_2 \geqslant n_1$ astfel încît al doilea termen să fie mai mic decît $\varepsilon/3$ pentru $n \geqslant n_2$ și, în sfîrșit, conform cu (3), putem alege $n_3 \geqslant n_2$ astfel încît al treilea termen să fie mai mic decît $\varepsilon/3$. Atunci pentru orice $n \geqslant n_3$ rezultă $|I_n| < \varepsilon$ și teorema este probată.

4.2. **Observații.** 1) Condițiile din enunțul teoremei II.1 au o evidentă interpretare geometrică. Relația (2.29) are loc nu numai pentru funcții $\varphi \in \mathscr{D}$, ci pentru orice funcție continuă cu suport compact, așa cum reiese chiar din demonstrația precedentă. De asemenea, rolul special jucat de origine în teorema precedentă poate fi transferat oricărui punct $y \in \mathbb{R}$, înlocuind în condiția (2) $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ prin $\mathbb{R}\setminus\{y\}$ și atunci va rezulta că șirul $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ converge slab către distribuția δ_y.

2) Teorema II.1 poate fi extinsă de la șiruri la familii reprezentative indexate după mulțimi mai generale decît $\mathbb{N}$, prin înlocuirea parametrului discret n cu un parametru continuu α. De exemplu, presupunem că avem o familie $\{f_\alpha\}_{\alpha>0}$ de funcții din $L_1(\mathbb{R})$ astfel încît $\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,dt = 1$ pentru orice $\alpha \geqslant 0$, pentru orice interval compact $[a, b]$ inclus în $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ avem $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\int_a^b f_\alpha(t)\,dt = 0$ și pentru orice $R>0$ avem $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\int_{|t|\geqslant R} f_\alpha(t)\,dt = 0$. Atunci $f_\alpha \xrightarrow{\mathscr{D}'} \delta$ pentru $\alpha\to 0$, $\alpha>0$, adică $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}}\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt = \varphi(0)$ pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$.

4.3. **Exemple.** a) Fie șirul de funcții $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin

$$h_n(t) = n\left[\sigma\left(t + \frac{1}{2n}\right) - \sigma\left(t - \frac{1}{2n}\right)\right], \quad n \geqslant 1.$$

Se verifică imediat condițiile (1)—(3) ale teoremei II.1, deci $\{h_n\}_{n\geqslant 1}$ este șir reprezentativ pentru δ.

Mai general, pentru orice $\varepsilon > 0$ definim familia

$$h_\varepsilon(t) = \frac{1}{2\varepsilon}[\sigma(t+\varepsilon) - \sigma(t-\varepsilon)], \quad t \in \mathbb{R},$$

și conform observației 4.2 ,2). rezultă că $h_\varepsilon \xrightarrow{\mathscr{D}'} \delta$, pentru $\varepsilon\to 0$, $\varepsilon>0$. În unele situații practice δ poate fi asimilat cu h_ε pentru ε suficient de mic, dar în raționamente teoretice o asemenea aproximare poate să conducă la concluzii eronate. Avem (fig. 2.5,b)

$$h_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \in (-\infty, -\varepsilon) \cup [\varepsilon, \infty), \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}, & \text{dacă } t \in [-\varepsilon, \varepsilon), \end{cases}$$

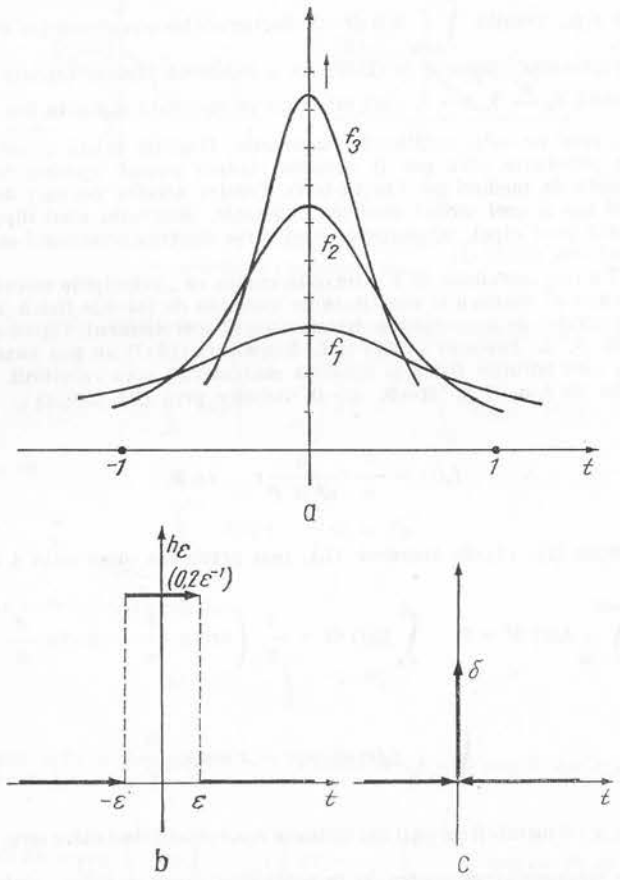


Fig. 2.5. Exemple de familii reprezentative pentru δ:
a—familia $f_\tau(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\tau}{\tau^2+t^2}$, $\tau>0$; b — impulsuri dreptunghiulare de arie 1; c — reprezentarea grafică simbolică pentru δ.

și $\int_{-\infty}^{\infty} h_\varepsilon(t)\,dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{1}{2\varepsilon}\,dt = 1$ pentru orice $\varepsilon > 0$. În multe lucrări se folosește *funcția* δ care se obține din h_ε făcînd formal $\varepsilon \to 0$, deci

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \infty, & \text{dacă } t = 0, \end{cases} \quad \text{și} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1. \tag{2.30}$$

Cum $\delta(t) = 0$ a.p., rezultă $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 0$, deci se obține o contradicție evidentă. Acest fapt arată că „funcția" definită în (2.30) are o existență ideală. Trebuie deosebit deci între limita slabă $h_\varepsilon \xrightarrow{\mathscr{D}'} \delta$, $\varepsilon \to 0$, care este riguros motivată și limita $\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon(t)$ în sens clasic formal, care nu este justificată matematic. Dealtfel există o serie întreagă de noțiuni fizice punctuale care pot fi definite riguros numai apelînd la limite slabe (numite și limite de medieri pe funcții-test). Printre acestea notăm: densitatea unui punct material sau a unei sarcini electrice punctuale, densitatea unui dipol sau a unui strat, momentul unui dipol, intensitatea unei surse electrice punctuale sau a unei forțe concentrate într-un punct etc.

Funcția δ a fost introdusă de P. Dirac în cartea sa „Principiile mecanicii cuantice" (1930) și folosirea cu succes a ei constituie un exemplu de intuiție fizică la un moment dat, depășind nivelul de dezvoltare a matematicii la acel moment. Cîțiva ani mai tîrziu matematicienii S. L. Sobolev (1935) și L. Schwartz (1947) au pus bazele teoriei distribuțiilor, în care intuiția fizică și rigoarea matematică s-au reîntîlnit.

b) Familia de funcții $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, definite prin (fig. 2.5, a)

$$f_\alpha(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

satisface condițiile (1)–(3) din teorema II.1, mai precis din observația 4.2, 2), deoarece

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,dt = 1, \quad \int_a^b f_\alpha(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{b}{\alpha} - \operatorname{arctg}\frac{a}{\alpha}\right)$$

și

$$\int_{|t| \geqslant R} f_\alpha(t)\,dt = \pi - 2\operatorname{arctg}\frac{R}{\alpha}$$

și pentru $\alpha \to 0$, $\alpha > 0$ membrii secunzi din ultimele două relații tind către zero. În concluzie, familia f_α este reprezentativă pentru δ; în particular, luînd $\alpha = \frac{1}{n}$, găsim un șir reprezentativ pentru δ, anume $f_n(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{n}{n^2 t^2 + 1}$, $n \geqslant 1$.

c) Schimbăm puțin notațiile și considerăm familia f_t, $t > 0$, de funcții *semiclopot* Gauss definite prin

$$f_t(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)\sigma(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

cu graficul indicat în fig. 2.6, a.

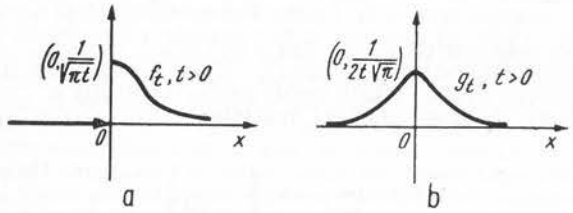


Fig. 2.6. Exemple de familii reprezentative pentru δ:
a – semiclopote; b – clopote Gauss.

Calculăm integrala următoare, făcînd schimbarea de variabilă $x = 2z\sqrt{t}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_t(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \exp(-z^2)\,dz = 1,$$

deoarece se știe că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-z^2)\,dz = \sqrt{\pi}.$$

Considerăm acum *funcția erorilor*

$$\operatorname{erf} z = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-u^2} du,$$

pentru care $\lim_{z \to -\infty} \operatorname{erf} z = 0$, $\lim_{z \to \infty} \operatorname{erf} z = 1$. Pentru $a < b \leqslant 0$ sau $0 \leqslant a < b$, avem

$$\int_a^b f_t(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right) dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{a/2\sqrt{t}}^{b/2\sqrt{t}} \exp(-z^2)\,dz =$$

$$= 2\operatorname{erf}\left(\frac{b}{2\sqrt{t}}\right) - 2\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$$

și aceasta tinde la 0 pentru $t\to 0$, $t>0$. În fine, pentru orice $R>0$ fixat avem

$$\int_{|x|\geqslant R} f_t(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_R^\infty \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{R/2\sqrt{t}}^\infty \exp(-z^2)\,dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\int_{-\infty}^\infty \exp(-z^2)\,dz - \int_{-\infty}^{R/2\sqrt{t}} \exp(-z^2)\,dz\right] = 2 - 2\operatorname{erf}\left(\frac{R}{2\sqrt{t}}\right)$$

și aceasta tinde de asemenea către zero cînd $t\to 0$, $t>0$.

Așadar, am verificat în detaliu condițiile (1)—(3) din teorema II.1, deci am obținut o nouă familie reprezentativă de funcții uzuale pentru distribuția δ.

Raționînd similar, se poate arăta că funcțiile „clopot GAUSS" $g_t:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $t>0$, definite prin

$$g_t(x) = \frac{1}{2t\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{4t^2}\right),$$

converg slab către δ pentru $t\to 0$ (fig. 2.6, b).

d) Dăm exemplu de un șir reprezentativ pentru impulsul δ, deși nu satisface condițiile teoremei II.1 ; anume

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin nt}{t} = \frac{1}{\pi}\,n\,\mathrm{Sa}\,(nt),$$

folosind funcția de eșantionare, definită prin formula (2.2). Pentru orice $\varphi\in\mathscr{D}$ avem

$$\langle f_n,\varphi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin nt}{t}\varphi(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}\sin nt\,dt +$$

$$+\frac{\varphi(0)}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin nt}{t}\,dt$$

și deoarece se știe că

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin z}{z}\,dz = \pi,$$

rezultă

$$\langle f_n,\varphi\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \psi(t)\sin nt\,dt + \varphi(0),$$

unde am notat cu ψ funcția continuă

$$\psi(t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(t)-\varphi(0)}{t}, & \text{dacă } t\neq 0,\\ \varphi'(0), & \text{dacă } t=0. \end{cases}$$

Așadar $\lim\limits_{n\to\infty}\langle f_n,\varphi\rangle = \varphi(0) + \frac{1}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \psi(t)\sin nt\,dt = \varphi(0) = \langle\delta,\varphi\rangle$, deci $f_n \xrightarrow{\mathscr{D}'} \delta$ pentru $n\to\infty$. (Am folosit teorema Riemann, conform căreia coeficienții Fourier ai unei funcții reale continue tind către 0 pentru $n\to\infty$.)

4.4. **Observații.** 1) În exemplele b), c), d) am dat exemple de șiruri sau familii reprezentative pentru δ, formate cu distribuții regulate cu suport necompact, în timp ce în exemplul a), distribuțiile h_ε, $\varepsilon>0$, au suport compact.

În § 6 vom arăta că orice distribuție din $\mathscr{D}'$ este limita slabă a unui șir de distribuții regulate, deci orice distribuție singulară admite șiruri reprezentative. Pornind de la această idee pe cale inversă și observînd că în mulțimea șirurilor de funcții uzuale se poate introduce o relație de echivalență, în care clasele de echivalență sînt în corespondență biunivocă cu distribuțiile din $\mathscr{D}'$, școala poloneză de analiză funcțională a elaborat în acest mod teoria distribuțiilor, urmînd o cale similară celei în care numerele reale pot fi construite ca niște clase de echivalență de șiruri de numere raționale, locul numerelor raționale (respectiv reale) fiind luat de funcțiile uzuale (respectiv de distribuții) [1].

2) În exemplele anterioare am indicat șiruri sau familii reprezentative pentru δ, dar se utilizează uneori entități similare pentru alte distribuții singulare. De exemplu, derivînd șiruri reprezentative de distribuții pentru δ, se obțin șiruri reprezentative pentru δ', δ'', ... Dăm însă un alt exemplu : considerăm familia de funcții $f_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definite prin

$$f_\alpha(\omega) = \frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2},$$

și arătăm că limita slabă (în $\mathscr{D}'$) a lui $f_\alpha(\omega)$ pentru $\alpha\to 0$, $\alpha\neq 0$ este egală cu $\mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}$. Pentru aceasta, fixăm $(\forall)\varphi\in\mathscr{D}$ și considerăm expresia

$$\Delta(\alpha) = \left\langle \mathrm{VP}\frac{1}{\omega},\varphi\right\rangle - \langle f_\alpha(\omega),\varphi(\omega)\rangle = \left\langle \mathrm{P}\frac{1}{\omega},\varphi\right\rangle - \int_{-\infty}^\infty \frac{\omega\varphi(\omega)}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega;$$

avem de arătat că $\lim\limits_{\alpha\to 0}\Delta(\alpha) = 0$. Conform reprezentării (2.28) și ținînd seama de faptul că există $R>1$ astfel încît $\operatorname{supp}\varphi\subset[-R,R]$, rezultă

$$\Delta(\alpha) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\omega)-\varphi(0)}{\omega}\,d\omega + \int_{-R}^1 \frac{\varphi(\omega)}{\omega}\,d\omega + \int_1^R \frac{\varphi(\omega)}{\omega}\,d\omega -$$

$$-\int_{-R}^R \frac{\omega\varphi(\omega)}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega = \int_{-1}^1\left[\frac{\varphi(\omega)-\varphi(0)}{\omega} - \frac{\omega\varphi(\omega)}{\alpha^2+\omega^2}\right]d\omega +$$

$$+\int_{-R}^{-1}\left[\frac{\varphi(\omega)}{\omega} - \frac{\omega\varphi(\omega)}{\alpha^2+\omega^2}\right]d\omega + \int_1^R\left[\frac{\varphi(\omega)}{\omega} - \frac{\omega\varphi(\omega)}{\alpha^2+\omega^2}\right]d\omega$$

și cum

$$\int_{-1}^1 \frac{\omega\varphi(0)}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega = \frac{\varphi(0)}{2}\ln(\alpha^2+\omega^2)\Big|_{-1}^1 = 0, \quad \text{pentru } \alpha\neq 0,$$

rezultă

$$\Delta(\alpha)=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\omega)-\varphi(0)}{\omega}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega+\int_{1\leqslant|\omega|\leqslant R}\frac{\varphi(\omega)}{\omega}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}\,d\omega.$$

Conform teoremei Lebesgue de trecere la limită sub integrală și folosind majorările

$$\left|\frac{\varphi(\omega)-\varphi(0)}{\omega}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}\right|\leqslant\left|\frac{\varphi(\omega)-\varphi(0)}{\omega}\right|\in L_1(|\omega|<1),$$

$$\left|\frac{\varphi(\omega)}{\omega}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\omega^2}\right|\leqslant\left|\frac{\varphi(\omega)}{\omega}\right|\in L_1(|\omega|\geqslant 1),$$

rezultă

$$\lim_{\alpha\to 0}\Delta(\alpha)=0.$$

Reținem așadar următoarele reprezentări-limită:

$$\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}\xrightarrow{\mathscr{D}'}\mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}\quad\text{pentru}\quad\alpha\to 0,\ \alpha\neq 0,$$

$$\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\xrightarrow{\mathscr{D}'}\pi\delta(\omega)\quad\text{pentru}\quad\alpha\to 0,\ \alpha>0. \tag{2.31}$$

4.5. Formulele lui Sohoțki. Considerăm funcția complexă olomorfă

$$\Phi:\mathbb{C}\setminus\{0\}\to\mathbb{C},\ s\mapsto\frac{1}{s},$$

$s=\alpha+\mathrm{j}\omega$. Privim $\alpha=\operatorname{Re}s$ ca parametru și notăm

$$g_\alpha(\omega)=\Phi(\alpha+\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}-\mathrm{j}\,\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}.$$

Așadar, $g_\alpha:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ este exact funcția $s\mapsto\frac{1}{s}$ ca funcție de variabila reală $\omega=\operatorname{Im}s$.

Din relațiile de convergență (2.31) rezultă

$$g_\alpha\xrightarrow{\mathscr{D}'}\pi\delta(\omega)-\mathrm{j}\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}\ \text{pentru}\ \alpha\to 0,\ \alpha>0,$$

$$-g_\alpha\xrightarrow{\mathscr{D}'}\pi\delta(\omega)+\mathrm{j}\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}\ \text{pentru}\ \alpha\to 0,\ \alpha<0.$$

Aceste relații se mai scriu sub forma

$$\frac{1}{s}\xrightarrow[\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}]{\mathscr{D}'}\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}}\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega},\quad-\frac{1}{s}\xrightarrow[\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}]{\mathscr{D}'}\pi\delta(\omega)-\frac{1}{\mathrm{j}}\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega} \tag{2.32}$$

și sînt cunoscute sub denumirea de *formulele lui Sohoțki*. Prin derivare în raport cu ω (distribuțiile pot fi totdeauna derivate, iar limitele slabe comută cu operația de derivare!), rezultă relațiile

$$\mathrm{D}_\omega\left(\frac{1}{s}\right)\xrightarrow[\substack{\alpha\to 0\\ \alpha>0}]{\mathscr{D}'}\pi\delta'(\omega)-\frac{1}{\mathrm{j}}\,\mathrm{PF}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$$

și

$$\mathrm{D}_\omega\left(-\frac{1}{s}\right)\xrightarrow[\substack{\alpha\to 0\\ \alpha<0}]{\mathscr{D}'}\pi\delta'(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}}\,\mathrm{PF}\left(\frac{1}{\omega^2}\right),$$

folosind în prealabil faptul că $\left(\mathrm{VP}\,\frac{1}{\omega}\right)'=-\mathrm{PF}\left(\frac{1}{\omega^2}\right)$.

4.6. Serii Fourier de distribuții. În analiza clasică derivarea termen cu termen a seriilor este o operație care trebuie efectuată cu prudență; în particular, convergența seriilor Fourier poate deveni mai lentă sau chiar să dispară, prin derivare termen cu termen. În cadrul distribuțional astfel de dificultăți nu apar, iar teorema II.2 justifică utilizarea sistematică a distribuțiilor în aplicarea metodei dezvoltărilor în serie în teoria ecuațiilor diferențiale. O serie $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ de distribuții este convergentă în $\mathscr{D}'$ cu suma $f\in\mathscr{D}'$ dacă șirul $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$, $s_n=f_1+f_2+\ldots+f_n$ al sumelor ei parțiale converge slab (în $\mathscr{D}'$) către f.

Teorema II.2. *Fie o serie* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *de funcţii* $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *din* $\mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}$, *uniform convergentă pe orice interval mărginit din* $\mathbb{R}$, *cu suma* f. *Atunci* $f \in \mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}$ *şi privită în* $\mathscr{D}'$, *relaţia* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ *poate fi derivată termen cu termen de oricîte ori.*

Demonstraţie. Aşadar, pe orice interval de forma $[-R, R]$, $R>0$, sumele parţiale $s_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ converg uniform, pentru $n \to \infty$, către f. Atunci $f \in \mathrm{L}_1[-R, R]$ conform teoremei lui Lebesgue şi în plus, deoarece pentru $\varphi \in \mathscr{D}$, şirul $\{s_n \cdot \varphi\}_{n \geqslant 1}$ converge uniform către $f \cdot \varphi$, rezultă

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s_n(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t.$$

Cu alte cuvinte, $\underline{s_n} \xrightarrow{\mathscr{D}'} \underline{f}$, deci avem relaţia $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{f_n} = \underline{f}$ în $\mathscr{D}'$. Deoarece pentru orice întreg $p \geqslant 0$, din $\underline{s_n} \xrightarrow{\mathscr{D}'} \underline{f}$ rezultă $\underline{s_n^{(p)}} \xrightarrow{\mathscr{D}'} \underline{f^{(p)}}$, iar $\underline{s_n^{(p)}}$ sînt tocmai sumele parţiale ale seriei de distribuţii $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{f_n^{(p)}}$, rezultă în final că $\sum_{n=1}^{\infty} \underline{f_n^{(p)}} = \underline{f^{(p)}}$. Aşadar, teorema II.2 arată că din convergenţa în $\mathscr{D}'$ a unei serii de distribuţii rezultă posibilitatea derivării termen cu termen a acesteia, noile serii obţinute fiind convergente în $\mathscr{D}'$.

Corolar. *Fixăm* $a > 0$, $b > 0$, $p \geqslant 1$ *întreg şi un şir* $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ *de numere complexe, astfel încît*

$$|c_k| \leqslant a|k|^p + b, \quad (\forall)\, k \in \mathbb{Z}.$$

Atunci seria trigonometrică $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}kt}$ *este convergentă în* $\mathscr{D}'$.

Demonstraţie. Reamintim mai întîi că o serie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k$ este convergentă dacă şi numai dacă seriile $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ şi $\sum_{k=1}^{\infty} x_{-k}$ sînt convergente.

Considerăm seria de funcţii din $\mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}$

$$\frac{c_0 t^{p+2}}{(p+2)!} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}kt}}{(\mathrm{j}k)^{p+2}}.$$

Această serie este uniform convergentă pe orice interval mărginit din $\mathbb{R}$, conform criteriului lui Weierstrass şi ipotezei asupra şirului $\{c_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Aşadar, sînt îndeplinite ipotezele teoremei precedente şi seria respectivă poate fi derivată distribuţional termen cu termen de ori de cîte ori şi derivînd-o de $p+2$ ori, obţinem tocmai seria $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}kt}$, care converge în $\mathscr{D}'$.

4.7. **Aplicaţie.** Se consideră funcţia $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită pe $[0, 2\pi)$ prin

$$h(t) = \frac{t}{2} - \frac{t^2}{4\pi},$$

şi prelungită apoi prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$ (v. fig. 2.7, a). Dezvoltarea ei Fourier este

$$h(t) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}kt} \tag{2.33}$$

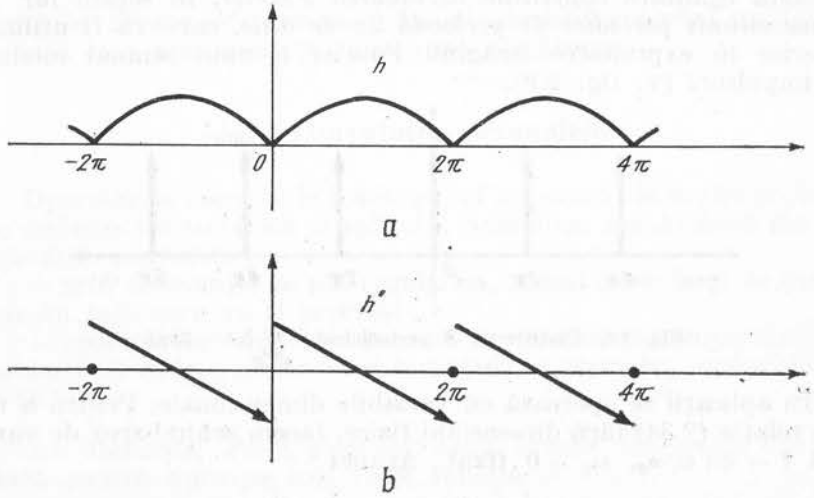


Fig. 2.7. Semnale periodice :
a — paralelă pericdicizată; b — funcţia „dinţi de fierăstrău".

și este uniform convergentă pe întreg $\mathbb{R}$, conform criteriului lui Weierstrass, deoarece $\left|\frac{1}{k^2}\,e^{jkt}\right| = \frac{1}{k^2}$, $(\forall)\, k \neq 0$, și seria $\sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ este convergentă. Atunci conform teoremei II.2, relația precedentă poate fi derivată în $\mathscr{D}'$ de ori de cîte ori. Evident $h'(t)$ este funcția egală pe $(0,2\pi)$ cu $\frac{1}{2} - \frac{t}{2\pi}$ și prelungită prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$ (v. fig. 2.7, b) și deci, folosind (2.21), rezultă

$$h''(t) = -\frac{1}{2\pi} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\pi),$$

h' fiind discontinuă în punctele $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, cu toate salturile egale cu 1. Pe de altă parte, derivînd termen cu termen relația (2.33), rezultă $h''(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} e^{jkt}$ și comparînd cu relația precedentă, se deduce egalitatea remarcabilă de distribuții :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - 2k\pi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jkt}. \tag{2.34}$$

Această egalitate constituie *dezvoltarea Fourier*, în sensul lui $\mathscr{D}'$, *a succesiunii periodice de perioadă* 2π *de delte*, care va fi utilizată ulterior în exprimarea imaginii Fourier a unui semnal modulat în impulsuri (v. fig. 2.8).

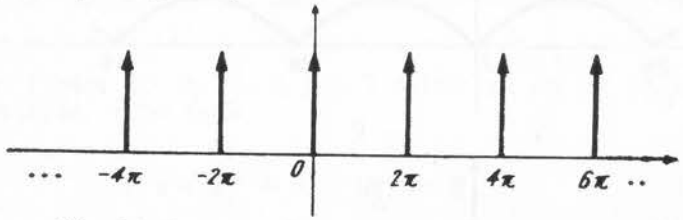


Fig. 2.8. Distribuția δ periodicizată $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t - 2k\pi)$.

În aplicații se operează cu variabile dimensionale. Pentru a utiliza relația (2.34) fără dimensiuni fizice, facem schimbarea de variabilă $t = 2\pi\,\omega/\omega_0$, $\omega_0 > 0$ fixat. Atunci

$$\delta(t - 2k\pi) = \delta\left(2\pi\,\frac{\omega}{\omega_0} - 2k\pi\right) = \frac{\omega_0}{2\pi}\,\delta(\omega - k\,\omega_0),$$

conform exemplului 3.2, a) și formula (2.34) devine

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0) = \frac{1}{\omega_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega T_0}, \tag{2.35}$$

unde $T_0 = 2\pi/\omega_0$. Această formulă reprezintă dezvoltarea în serie Fourier a unei succesiuni de delte de argument ω și perioadă ω_0. Cu notații schimbate, formula (2.35) se mai scrie echivalent :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\frac{n}{T}\cdot t} \tag{2.36}$$

iar pentru $T = 1$ și aplicînd această egalitate pentru orice funcție-test $\varphi \in \mathscr{D}$, rezultă relația

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, e^{2\pi jnt}\, dt, \tag{2.37}$$

numită *formula lui Poisson de însumare.*

Remarcăm că seria de distribuții $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n)$ este convergentă în $\mathscr{D}'$ sau $\mathscr{S}'$, dar nu și în $\mathscr{E}'$; dealtfel suportul acestei distribuții este mulțimea $\mathbb{Z}$, deci este nemărginit.

§5. Convoluția semnalelor

Operația de convoluție joacă un rol important în multe probleme de matematică teoretică și aplicată. Subliniem numai două din proprietățile convoluției :

— prin convoluție se pot regulariza, netezi clase largi de funcții, într-un sens care va fi precizat ;

— operația de convoluție permite reprezentarea comportării unui sistem fizic liniar, continuu și invariant în timp (v. teoremele II.3 și II.5).

5.1. **Definiție.** Fie $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ două funcții (semnale) din L_1^{loc}. Dacă pentru aproape toți $t \in \mathbb{R}$ funcția

$$\mathbb{R} \to \mathbb{C},\quad z \mapsto f(z) \cdot g(t - z)$$

este integrabilă pe $\mathbb{R}$ și dacă integrala

$$h(t) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot g(t-z)\, dz \tag{2.38}$$

definește o funcție $h \in L_1^{loc}$, această funcție se numește *convoluția funcțiilor (semnalelor)* f și g și se notează $h = f*g$. Așadar, dacă $f*g$ există, atunci pentru aproape toți $t \in \mathbb{R}$, avem

$$(f*g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot g(t-z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(u) \cdot f(t-u)\, du = (g*f)(t),$$

deci operația $*$ este comutativă. Ca de obicei, vom identifica orice două funcții care coincid a.p.

Probăm acum următorul fapt important:

a) *Dacă* $f, g \in L_1$, *atunci există* $f*g$; *în plus,* $f*g \in L_1$ *și* $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \cdot \|g\|_1$.

Într-adevăr, fie $M = \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\, du$; efectuînd schimbarea de variabilă $u = t - z$, $z \in \mathbb{R}$ fiind fixat, rezultă $M = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-z)|\, dt$, pentru orice $z \in \mathbb{R}$ fixat, deci

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\, dz \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-z)|\, dt = M \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\, dz$$

și, pe de altă parte, aplicînd teorema lui Fubini, rezultă că integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot g(t-z)\, dz$ există și definește o funcție $h(t)$ din L_1. În plus,

$$\|h\|_{l1} = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} dt \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot g(t-z)\, dz \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\, dz \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\, du = \|f\|_1 \cdot \|g\|_1.$$

Acest raționament nu se poate face pentru $f, g \in L_1^{loc}$. Probăm de asemenea următorul rezultat:

b) *Dacă* $f, g \in L_2$, *atunci funcția* $h = f*g$ *există și este mărginită pe* $\mathbb{R}$.

Într-adevăr, rezultă că $(\forall) t \in \mathbb{R}$ funcția $z \mapsto f(z) \cdot g(t-z)$ aparține lui L_1 și deci $h = f*g$ există. În plus, aplicînd inegalitatea lui Schwartz, rezultă că pentru orice $t \in \mathbb{R}$,

$$|h(t)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2\, dz \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-z)|^2\, dz = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2\, dz \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^2 du \right) =$$

$$= \|f\|_2 \cdot \|g\|_2 < \infty.$$

Din teoria transformării Fourier va rezulta de asemenea că dacă $f, g \in L_2$, atunci $f*g$ este funcție continuă și tinde la zero pentru $|t| \to \infty$.

Trebuie remarcat că dacă $f, g \in L_2$, nu rezultă în general că $f*g$ aparține lui L_2. Probăm totuși următorul fapt:

c) *Dacă* $f, g \in L_2$ *și una din funcții este în* L_1, *de exemplu* $g \in L_1$, *atunci* $f*g \in L_2$.

Într-adevăr, avem

$$|h(t)|^2 \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\, |g(t-z)|\, dz \right)^2 =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\, |g(t-z)|^{\frac{1}{2}}\, |g(t-z)|^{\frac{1}{2}}\, dz \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2\, |g(t-z)|\, dz \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-z)|\, dz =$$

$$= \|g\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2\, |g(t-z)|\, dz,$$

aplicînd inegalitatea lui Schwartz. Rezultă atunci

$$\|h\|_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2\, dt \leqslant \|g\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|^2\, dz \int_{-\infty}^{\infty} |g(t-z)|\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \|g\|_1 \cdot \|f\| \cdot \|g\|_1 < \infty, \quad \text{deci } h \in L_2.$$

5.2. Semnificația geometrică a convoluției. Fixăm $f, g \in L_1$; atunci integrandul din (2.38) poate fi scris sub forma $f(z) \cdot g(t-z) = f(z) \cdot \check{g}(z-t)$, unde s-a notat $\check{g}(x) = g(-x)$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$. Fixînd $t_0 \in \mathbb{R}$, arbitrar ales, rezultă că pentru calculul valorii $h(t_0)$ trebuie parcurse următoarele etape:

— se „întoarce" $g(z)$ și se obține $\check{g}(z)$;

— se decalează $\check{g}(z)$ cu t_0 în sens pozitiv și se obține $\check{g}(z - t_0) = g(t_0 - z)$;

— se efectuează produsul $f(z)\,\check{g}(z-t_0)$;

— se integrează pe $\mathbb{R}$ în raport cu z și se obține $h(t_0)$.

În principiu, integrala (2.38) fiind o integrală cu parametrul t, pentru fiecare valoare $t_0 \in \mathbb{R}$ trebuie efectuată cîte o integrală în raport cu z pe $\mathbb{R}$. În fig. 2.9 este prezentat un exemplu de determinare grafică a convoluției a două semnale dreptunghiulare f, g, urmînd etapele anterioare, anume $f(z) = A[\sigma(z) - \sigma(z-\tau)]$, $g(z) = B[\sigma(z+4\tau) - \sigma(z+2\tau)]$, $A>0$, $B>0$, $\tau>0$, pentru $t_0 = -\frac{3\tau}{2}$.

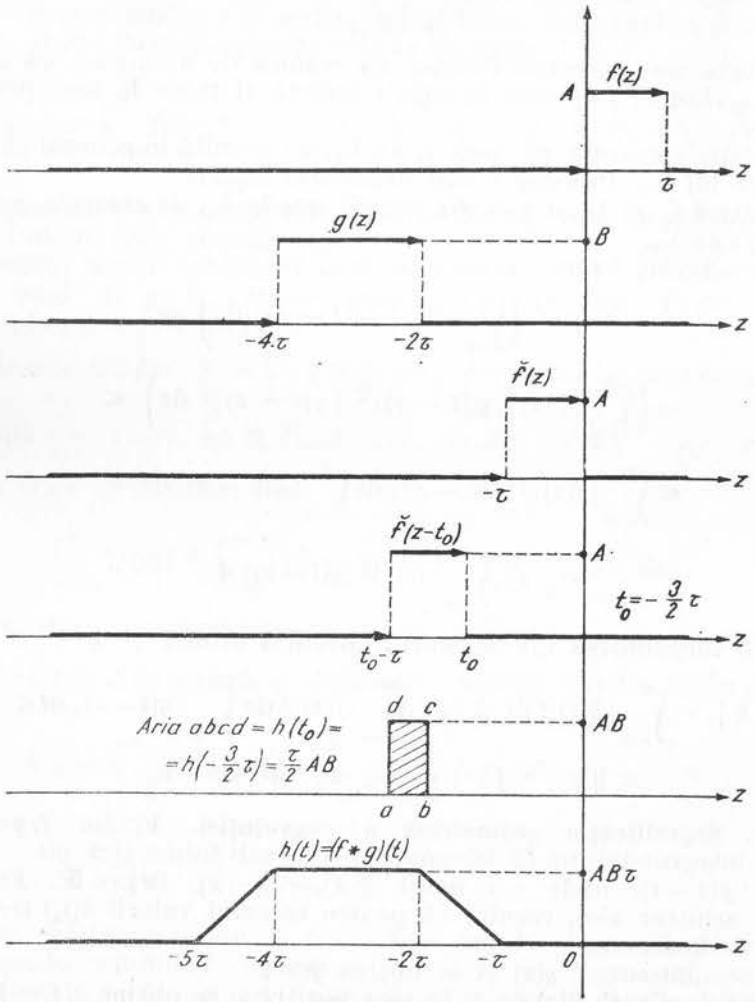


Fig. 2.9. Ilustrarea grafică a operației de convoluție.

Dacă funcțiile f, g au suport pozitiv [adică $f(t) = g(t) = 0$ pentru $t<0$], așa cum sînt de exemplu funcțiile-original din teoria transformării Laplace, atunci pentru orice z fixat, avem $f(z)\cdot g(t-z) = 0$ dacă $t<0$ sau dacă $t>z$, deci formula (2.38) devine

$$h(t) = \int_0^t f(z)\cdot g(t-z)\,dz, \quad \text{dacă } t \geqslant 0, \text{ și } h(t) = 0 \text{ dacă } t<0,$$

deci convoluția capătă reprezentarea cunoscută în calculul operațional clasic.

5.3. **Observații.** La începutul acestui paragraf am indicat cîteva criterii de existență a convoluției. La aceasta adăugăm următorul:

Fie $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$ orice două mulțimi închise astfel încît produsul cartezian $A \times B$ să intersecteze orice bandă $\{-r \leqslant x+y \leqslant r\}$, $r>0$, după o mulțime C_r mărginită (deci compactă). Dacă f, $g \in L_1^{loc}$ și supp $f \subset A$, supp $g \subset B$, *atunci convoluția $f*g$ există și $f*g \in L_1^{loc}$.*

Într-adevăr, pentru orice $r>0$ avem

$$\int_{-r}^{r} |(f*g)(t)|\,dt \leqslant \int_{-r}^{r} dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\cdot|g(t-z)|\,dz$$

și, pe de altă parte, integrala dublă

$$\iint_{C_r} |f(x)\cdot g(y)|\,dx\,dy$$

devine, după schimbarea de variabile independente $t = x+y$, $z = x$, egală cu

$$\int_{-r}^{r} dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)|\cdot|g(t-z)|\,dz,$$

deci

$$\int_{-r}^{r} |(f*g)(t)|\,dt \leqslant \iint_{C_r} |f(x)\cdot g(y)|\,dx\,dy < \infty,$$

adică funcția $f*g$ este integrabilă pe orice interval $[-r, r]$, $r>0$.

În particular, din criteriul anterior rezultă că ori de cîte ori una din funcțiile f, g are suport mărginit, convoluția $f * g$ există, fără să fie neapărat cu suport mărginit. Dacă f, g au ambele suport mărginit, atunci $f * g$ are de asemenea suport mărginit. În fine, reamintim că dacă f, g au suporturile mărginite de aceeași parte [de exemplu, există $a \in \mathbb{R}$ astfel încît $f(t) = g(t) = 0$ pentru $t < a$], atunci integrala din (2.38) se efectuează pe un interval mărginit și supp $h \subset [a, \infty)$.

Remarcăm că asocierea $(f, g) \mapsto f * g$ are proprietatea de biliniaritate.

5.4. **Exemple.** a) Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definită prin

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{|t|}} \cdot \frac{1}{|t| + 1}.$$

Evident, $f \in L_1 = L_1(\mathbb{R})$, deoarece $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}\,(t+1)} \overset{t=u^2}{=} 2\pi$. Luăm $g = f$. Conform rezultatului din 5.1, a) rezultă că $f * g \in L_1$. Așa cum am remarcat, $(f * g)(t)$ există pentru aproape toți $t \in \mathbb{R}$ (în acest caz pentru orice $t \neq 0$), nu neapărat pentru orice $t \in \mathbb{R}$; dealtfel pentru $t = 0$, avem că

$$(f * g)(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot f(-z)\, dz = 2\int_0^{\infty} \frac{dt}{t(t+1)^2}$$

nu există (integrala nu este convergentă). Pe acest exemplu se poate observa că dacă $f, g \in L_1$, nu rezultă neapărat că $f * g$ este funcție continuă și mărginită (așa cum se întîmplă dacă f, $g \in L_2$).

b) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(t) = \sigma(t + t_0) - \sigma(t - t_0),$$

$t_0 > 0$ fiind o constantă. Dacă luăm $g = f$, se obține

$$(f * g)(t) = 2t_0 \left(1 - \frac{|t|}{2t_0}\right) \cdot [\sigma(t + 2t_0) - \sigma(t - 2t_0)].$$

Așadar, convoluția unui semnal dreptunghiular cu el însuși este un semnal triunghiular.

Acest fapt poate fi probat prin calcul direct, dar se obține direct din tabloul de transformate Fourier remarcabile, dat în § 7. În acest caz avem $f, g \in L_2$; evident, semnalul $f * g$ aparține clasei C_0^0 și reprezintă un triunghi isoscel de înălțime $2t_0$ și bază $4t_0$, reprezentat în fig. 2.10. Acest exemplu ilustrează rezultatul din 5.1, b).

c) Luăm $f = g = \sigma$, deci $f, g \in L_1^{loc}$. Se observă că deși $f, g \notin L_1$, totuși convoluția $f * g$ există, anume $(\forall) t \in \mathbb{R}$

$$(\sigma * \sigma)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(z) \cdot \sigma(t - z)\, dz = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \leqslant 0 \\ t, & \text{dacă } t > 0 \end{cases} = t\sigma(t).$$

Dar dacă luăm $f = \sigma$, $g = \check{\sigma}$, convoluția $f * g$ nu există, deoarece pentru $t < 0$ avem

$$(\sigma * \check{\sigma})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(z) \cdot \sigma(z - t)\, dz = \int_0^{\infty} \sigma(z - t)\, dz = \int_0^{\infty} 1 \cdot dz = \infty.$$

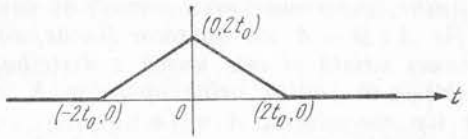


Fig. 2.10. Semnal triunghiular obținut prin convoluția unui semnal cu el însuși.

5.5. **Convoluția ca operație de regularizare. Reprezentarea sistemelor invariante în timp.** Ideea de plecare este că dacă g are un anumit grad de netezime, iar f un anumit grad de neregularitate (singularitate), atunci convoluția $f * g$ are unele proprietăți apropiate de cele ale lui g. În acest sens, se va vedea că dacă f este o distribuție oarecare, atunci prin convoluție cu funcții adecvate se obțin funcții din C^∞, deci cu netezime maximă.

Fie $(\forall) f \in \mathscr{D}'$, $(\forall) \varphi \in \mathscr{D}$ fixate. Se numește *convoluție* a distribuției f cu funcția-test φ funcția $f * \varphi$ definită prin

$$(f * \varphi)(t) \overset{\Delta}{=} \langle f(t - z), \varphi(z) \rangle = \langle f(z), \varphi(t - z) \rangle, \qquad (2.39)$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Se verifică ușor că $f * \varphi$ este o funcție de clasă C^∞ pentru orice $f \in \mathscr{D}'$, $\varphi \in \mathscr{D}$ și că $(f * \varphi)^{(k)} = (D^k f) * \varphi = f * \varphi^{(k)}$, $(\forall) k \geqslant 0$. De asemenea, $(f * \varphi) * \psi = f * (\varphi * \psi)$ pentru orice $f \in \mathscr{D}'$, $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$.

Este deci de reținut că orice distribuție f definește, prin convoluție cu o funcție-test φ, o funcție din C^∞ și, în plus, supp $(f * \varphi) \subset$ $\subset$ supp f + supp φ; în general funcția $f * \varphi$ nu are suport mărginit. Funcția $f * \varphi$ se mai numește *regularizata lui f prin φ*.

Dacă fixăm $f \in \mathscr{D}'$, avem o aplicație $\mathscr{D} \to \mathscr{E}$, $\varphi \mapsto f * \varphi$ și dacă $f \in \mathscr{E}'$, atunci avem chiar o aplicație $\mathscr{D} \to \mathscr{D}$, $\varphi \mapsto f * \varphi$.

Un rezultat deosebit de important este cuprins în teorema care urmează, numită uneori *teorema de reprezentare a sistemelor liniare, continue, invariante în timp*.

Pentru orice $\tau \in \mathbb{R}$ și pentru orice funcție $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ notăm cu $T_\tau f$ funcția $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $x \mapsto f(x - \tau)$. Are sens operatorul $T_\tau : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$, $\varphi \mapsto T_\tau \varphi$ și de asemenea $T_\tau : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$. Fie U, V două din spațiile de funcții-test definite în § 2; o aplicație liniară $A : U \to V$ se numește *invariantă la translații* dacă $(\forall) \tau \in \mathbb{R}$, $(\forall) u \in U$, avem $A(T_\tau u) =$

$= T_\tau(A(u))$. În teoria sistemelor, aplicațiile liniare invariante la translații sînt numite *operatori invarianți în timp*. Cu aceste pregătiri, putem da

Teorema II.3. (a) *Fixăm $f \in \mathscr{D}'$; aplicația $\mathscr{D} \to \mathscr{E}$, $\varphi \mapsto f * \varphi$ este un operator liniar, continuu (prin șiruri) și invariant în timp.*

(b) *Reciproc, fie $A : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$ un operator liniar, continuu și invariant în timp. Atunci există și este unică o distribuție $f \in \mathscr{D}'$ astfel încît $A\varphi = f * \varphi$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$ (adică orice operator A cu proprietățile precedente este de tip convoluție, $A = f *$).*

Probăm mai întîi o lemă, care constituie de fapt un criteriu ca o funcțională liniară pe $\mathscr{D}$ să fie o distribuție.

Lemă. *O aplicație $\mathbb{C}$-liniară $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ este o distribuție (adică este continuă prin șiruri) dacă și numai dacă pentru orice interval mărginit $I \subset \mathbb{R}$ există $p \geqslant 1$ astfel încît $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$, supp $\varphi \subset I$, să aibă loc inegalitatea*

$$|\langle f, \varphi\rangle| \leqslant p \cdot \|\varphi\|_p$$

[am notat $\|\varphi\|_p = \sup_{0 \leqslant m \leqslant p, t \in I} |\varphi^{(m)}(t)|$*].*

Demonstrația lemei. Presupunem mai întîi că f este o distribuție și procedăm prin reducere la absurd, deci ar exista un interval mărginit $I \subset \mathbb{R}$ astfel încît să existe un șir $\{\varphi_p\}_{p \geqslant 1}$ de funcții din $\mathscr{D}$ cu supp $\varphi_p \subset I$ și

$$|\langle f, \varphi_p\rangle| > p \cdot \|\varphi_p\|_p.$$

Notăm $\psi_p = \dfrac{\varphi_p}{\sqrt{p}\,\|\varphi_p\|_p}$; evident supp $\psi_p \subset I$ și $\|\psi_p\|_p \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{p}}$, deci $\psi_p \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ pentru $p \to \infty$ și cum $f \in \mathscr{D}'$, rezultă $\langle f, \psi_p\rangle \to 0$. Pe de altă parte,

$$|\langle f, \psi_p\rangle| = \frac{|\langle f, \varphi_p\rangle|}{\sqrt{p} \cdot \|\varphi_p\|_p} \geqslant \sqrt{p},$$

deci $\langle f, \psi_p\rangle$ nu poate tinde la zero pentru $p \to \infty$ și s-a ajuns la o contradicție. Cealaltă implicație este imediată.

Demonstrația teoremei. (a) Liniaritatea fiind evidentă, probăm continuitatea și fie $\varphi_n \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ pentru $n \to \infty$. Există deci un interval mărginit J astfel încît supp $\varphi_n \subset J$, $n \geqslant 1$, și în plus, $\varphi_n^{(k)} \to 0$ uniform pe J, pentru orice $k \geqslant 0$. Dacă t este fixat, funcțiile $\{\varphi_n(t - z)\}_{n \geqslant 1}$ au suporturile conținute în intervalul J_t obținut din J prin translație cu t. Avem de arătat că șirul $h_n = f * \varphi_n$ tinde către zero în $\mathscr{E}$, adică pentru orice interval mărginit K și pentru orice $k \geqslant 0$, șirul de funcții $h_n^{(k)} = f * \varphi_n^{(k)}$ tinde uniform către zero pe K. Dar conform lemei, există $p \geqslant 1$ astfel ca

$$|h_n^{(k)}(t)| = |\langle f(z), \varphi_n^{(k)}(t - z)\rangle| \leqslant p\|\varphi_n\|_{p+k}$$

pentru orice t care aparține unui interval mărginit care conține toate intervalele J_t cu $t \in K$. Deci cum $\varphi_n \to 0$, rezultă $h_n \xrightarrow{\mathscr{E}} 0$.

Rămîne să probăm invarianța în timp, adică

$$(f * T_\tau\varphi)(t) = (f * \varphi)(t - \tau), \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}, \quad (\forall)t \in \mathbb{R},$$

adică folosind (2.39),

$$\langle f(z), \ (T_\tau\varphi)(t - z)\rangle = \langle f(z), \ \varphi(t - \tau - z)\rangle,$$

ceea ce este clar.

(b) Considerăm funcționala $f : \mathscr{D} \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto (A\check{\varphi})(0)$. Conform ipotezei asupra operatorului A, funcționala f este liniară și continuă, deci $f \in \mathscr{D}'$. Evident, pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$, $t \in \mathbb{R}$,

$$(f * \varphi)(t) = \langle f(z), \varphi(t - z)\rangle = A(\varphi(t + z))|_{z=0} =$$

$$= (A\varphi)(t + z)|_{z=0} = (A\varphi)(t),$$

deci $f * \varphi = A\varphi$. Unicitatea lui f este evidentă, deoarece dacă $f \in \mathscr{D}'$ și $f * \varphi = 0$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$, atunci $f = 0$.

Notăm cu $\rho_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, funcția definită astfel (fig. 2.11, a):

$$\rho_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } |t| \geqslant \varepsilon, \\ A_\varepsilon \cdot \exp \dfrac{\varepsilon^2}{t^2 - \varepsilon^2}, & \text{dacă } |t| < \varepsilon, \end{cases}$$

unde constanta pozitivă A_ε este aleasă astfel încît $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_\varepsilon(t)\,dt = 1$.

Pentru orice $f \in \mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}$ avem

$$(f * \rho_\varepsilon)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\ \rho_\varepsilon(t - z)\,dz$$

și evident $f*\rho_\varepsilon$ este o funcție de clasă C^∞, cu suportul conținut în $\operatorname{supp} f + [-\varepsilon, \varepsilon]$ și se mai numește *ε-regularizata lui f*. Se poate arăta că dacă $f \in L_1^{loc}$, atunci $f*\rho_\varepsilon \xrightarrow{\mathscr{D}'} f$ pentru $\varepsilon \to 0$, iar dacă f este de clasă C^k, atunci pentru $\varepsilon \to 0$, $f*\rho_\varepsilon$ converge uniform către f împreună cu toate derivatele de ordin $\leqslant k$, pe orice interval mărginit [5].

Ca exemplu, să fixăm un interval $[a, b]$ și fie $g_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcția din L_1^{loc} definită prin

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in [a - 2\varepsilon, b + 2\varepsilon], \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$$

și punem pentru orice $t \in \mathbb{R}$

$$h_\varepsilon(t) = (\rho_\varepsilon * g_\varepsilon)(t) = \int_{a-2\varepsilon}^{b+2\varepsilon} \rho_\varepsilon(t - z)\, dz.$$

Așadar, h_ε este ε-regularizata lui g_ε (v. fig. 2.11). Acest exemplu arată că pornind de la o funcție discontinuă de tipul g_ε, se poate

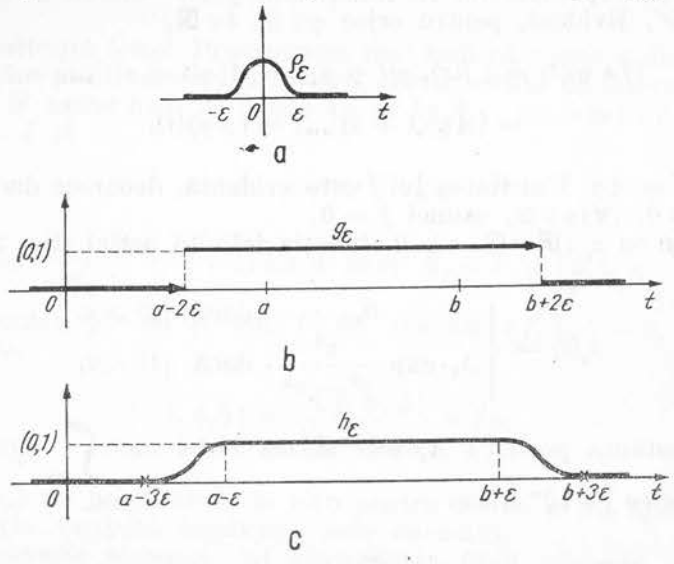


Fig. 2.11. Construcția unei funcții h_ε din $\mathscr{D}$, constantă pe un interval compact dat.

construi o funcție h_ε de clasă C^∞, care coincide cu g_ε în afara unei mulțimi de măsură oricît de mică; anume, în afara lui

$$(a - 3\varepsilon,\ a - \varepsilon) \cup (b + \varepsilon,\ b + 3\varepsilon),$$

avem $h_\varepsilon = g_\varepsilon$.

5.6. **Convoluția distribuțiilor.** Așa cum vom vedea, există rațiuni care impun extinderea operației de convoluție. Definirea convoluției între distribuții trebuie să extindă natural cazul funcțiilor uzuale (din L_1^{loc}) tratat anterior, unde s-a observat deja existența unor dificultăți legate de asigurarea condițiilor de existență a convoluției. Este mai întîi necesară considerarea distribuțiilor „de n, $n \geqslant 1$, variabile reale", și în acest sens, se extind imediat spațiul $\mathscr{D} = \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ (format din funcțiile cu derivate parțiale de orice ordin pe $\mathbb{R}^n$, nule în afara unei mulțimi mărginite), convergența în $\mathscr{D}$, conceptul de distribuție ca funcțională liniară continuă $\mathscr{D} \to \mathbb{C}$, identificarea funcțiilor local integrabile cu distribuții etc.

Dacă $f(x)$, $g(y)$ sînt distribuții din $\mathscr{D}'$ de o variabilă, se definește *produsul direct* $f(x) \times g(y)$ ca fiind distribuția de două variabile dată prin

$$\langle f(x) \times g(y),\ \varphi \rangle = \langle f(x),\ \langle g(y),\ \varphi(x, y) \rangle \rangle, \quad (\forall) \varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2). \tag{2.40}$$

De exemplu, $\delta(x) \times \delta(y)$ este distribuția $\varphi(x, y) \mapsto \varphi(0, 0)$, iar dacă $f, g \in L_1^{loc}$, atunci $f(x) \times g(y) = f(x)\, g(y)$, produsul uzual. Se arată că prin formula (2.40) se definește într-adevăr o distribuție și că $f(x) \times g(y) = g(y) \times f(x)$, $\operatorname{supp}(f(x) \times g(y)) = \operatorname{supp} f \times \operatorname{supp} g$ [27].

Pentru orice $\alpha = (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ se notează $D^\alpha = \dfrac{\partial^{p+q}}{\partial x^p\, \partial y^q}$. Vom scrie

$$\theta_n \rightsquigarrow 1 \text{ pentru } n \to \infty, \tag{2.41}$$

ori de cîte ori $\{\theta_n(x, y)\}_{n \geqslant 1}$ este un șir de funcții $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ astfel încît $(\forall) \alpha\ (\exists) M^\alpha > 0$, $|D^\alpha \theta_n(x, y)| \leqslant M_\alpha$, $(\forall)(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, și, în plus, pentru orice compact $K \subset \mathbb{R}^2$ există un număr N depinzînd de K și $\theta_n(x, y) = 1, (\forall)(x, y) \in K$ și $(\forall)\ n \geqslant N$. [De exemplu, dacă $\theta(x, y) = 1$ pentru $x^2 + y^2 < 1$ și $\theta \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, se poate lua $\theta_n(x, y) = \theta\left(\dfrac{x}{n}, \dfrac{y}{n}\right)$, $n \geqslant 1$].

5.7. **Definiție.** Se spune că *există convoluția* $f*g$ a două distribuții $f, g \in \mathscr{D}'$ dacă pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$ există

$$\langle f*g,\ \varphi \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle f(x) \times g(y),\ \theta_n(x, y)\, \varphi(x + y) \rangle \tag{2.42}$$

și limita nu depinde de alegerea șirului $\theta_n \rightsquigarrow 1$. Se arată că asocierea $\varphi \mapsto \langle f*g, \varphi\rangle$ este într-adevăr o distribuție din $\mathscr{D}'$ și că dacă $f, g \in L_1^{loc}$ și există $f*g$ în sensul din 5.1, atunci există $f*g$ în sensul din 5.7 și rezultatele sînt compatibile. Definiția anterioară se extinde la cazul mai multor distribuții.

Fără a da detalii, indicăm cîteva criterii de existență a convoluției pentru distribuții din $\mathscr{D}'$, mai ușor de aplicat decît definiția (2.42). Fie $f, g \in \mathscr{D}'$, $\operatorname{supp} f \subset A$ și $\operatorname{supp} g \subset B$. Cele mai importante criterii sînt [27]:

I. Fie $A = \mathbb{R}$ și $B \subset \mathbb{R}$ compactă. Atunci

$$\langle f*g, \varphi\rangle = \langle f(x) \times g(y), \alpha(y)\, \varphi(x+y)\rangle, \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}, \tag{2.43}$$

unde $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție din $\mathscr{D}$ egală cu 1 într-o vecinătate a lui B.

Distribuția $h = f*g$ apare ca unica distribuție asociată conform teoremei II.3, b), operatorului $A : \mathscr{D} \to \mathscr{E}$, $\varphi \mapsto f*(g*\varphi)$, adică $h*\varphi = A(\varphi)$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$.

II. Fie $A = B = [0, \infty]$. Atunci

$$\langle f*g, \varphi\rangle = \langle f(x) \times g(y), u(x)\, v(y)\, \varphi(x+y)\rangle, \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}, \tag{2.44}$$

unde u, v sînt funcții $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă C^∞ egale cu 0 pe intervalul $(-\infty, -2\varepsilon)$ și cu 1 pe intervalul $(-\varepsilon, \infty)$, unde $\varepsilon > 0$ este fixat.

În fiecare caz s-a utilizat funcția $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ din $\mathscr{E}$, definită prin $\psi(x, y) = \varphi(x+y)$, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}$.

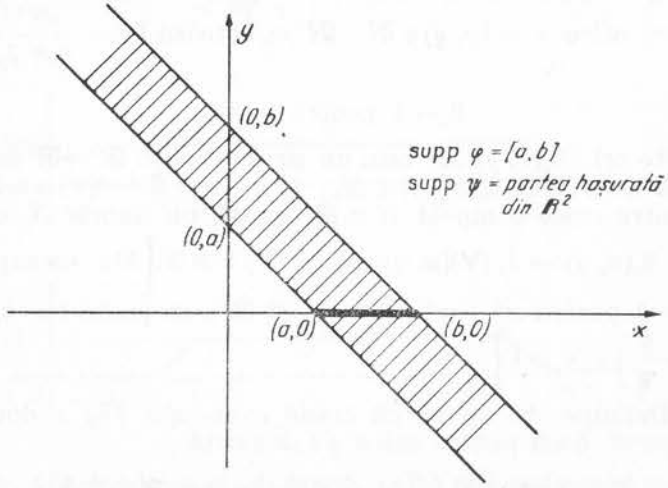


Fig. 2.12. Reprezentarea în $\mathbb{R}^2$ a suportului lui ψ.

Reținem deci că $f*g$ există în următoarele două situații: una din distribuții are suport compact (conform cu I); atît f cît și g au suport pozitiv (conform cu II).

5.8. **Proprietățile convoluției și exemple.** a) Dacă $f, g \in \mathscr{D}'$ și $f*g$ există, atunci există $g*f$ și, în plus, $f*g = g*f$, $\check{f}*\check{g} = \check{g}*\check{f} = (f*g)^{\vee}$. Acest fapt decurge direct din definiții.

b) Pentru orice $f \in \mathscr{D}'$ există $f*\delta$ și

$$f*\delta = \delta*f = f. \tag{2.45}$$

Într-adevăr, δ fiind cu suport compact, rezultă conform cu I,

$$\langle f*\delta, \varphi\rangle = \langle f(x) \times \delta(y), \alpha(y)\varphi(x+y)\rangle = \langle f(x), \langle \delta(y), \alpha(y)\,\varphi(x+y)\rangle\rangle =$$

$$= \langle f(x), \varphi(x)\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \quad (\forall)\varphi \in \mathscr{D}.$$

c) Dacă $f, g \in \mathscr{D}'$ și dacă există $f*g$, atunci

$$(D^m f)*g = D^m(f*g) = f*(D^m g), \quad (\forall)m \geqslant 1. \tag{2.46}$$

Procedînd prin inducție, este suficient de considerat cazul $m = 1$; folosind definiția, rezultă că $D(f*g) = (Df)*g$ și aplicînd a), rezultă

$$f*(Dg) = (Dg)*f = D(g*f) = D(f*g).$$

Din b), c) se deduce faptul extrem de important, anume că $(\forall)f \in \mathscr{D}'$, $(\forall)m \geqslant 1$, avem

$$f^{(m)} = f*\delta^{(m)}. \tag{2.47}$$

Într-adevăr, $f^{(m)} = (\delta*f)^{(m)} = \delta^{(m)}*f = f*\delta^{(m)}$. Așadar, derivatele de ordin superior ale unei distribuții f se exprimă prin convoluția lui f cu impulsuri Dirac de ordin superior.

Este de remarcat că dacă $(Df)*g$ și $f*(Dg)$ există, nu are loc neapărat (2.46); de exemplu, $f = \underline{\sigma}$, $g = 1$. Așadar, ipoteza că $f*g$ există este esențială.

d) În general, operația de convoluție nu este asociativă; de exemplu, pentru $f = \underline{1}$, $g = \delta'$, $h = \underline{\sigma}$, rezultă $(f*g)*h = (\underline{1}*\delta')*\underline{\sigma} = \underline{1}'*\underline{\sigma} = 0*\underline{\sigma} = 0$ și $f*(g*h) = \underline{1}*(\delta'*\underline{\sigma}) = \underline{1}*\underline{\sigma}' = \underline{1}*\delta = 1$.

Se poate arăta că dacă $f*g$, $f*g*h$ există, atunci există $(f*g)*h$, egal cu $f*g*h$. Regula de asociativitate a convoluției a trei factori are loc dacă doi dintre factori au suport compact sau dacă toți trei au suport pozitiv.

e) Orice integrală nedefinită $h(t) = \int_{-\infty}^{t} f(z)\,dz$ cu $f \in L_1$ poate fi reprezentată printr-o convoluție, anume $h = f*\sigma$; într-adevăr, conform cu (2.38), avem

$$(f*\sigma)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sigma(t-z)\,dz = \int_{-\infty}^{t} f(z)\,dz = h(t).$$

Aplicînd c), regăsim faptul că $h' = f$, deoarece $h' = f*\underline{\sigma}' = f*\delta = f$.

f) Fie f, $g \in \mathscr{D}'$ astfel încît să existe $f*g$ și a, $b \in \mathbb{R}$ constante; atunci direct din definiția (2.42) rezultă relația

$$f(t-a)*g(t-b) = f(t-a-b)*g. \tag{2.48}$$

În particular, au loc *formulele de întîrziere*, utilizate curent:

$$\delta(t-a)*f = f(t-a),\quad \delta(t-a)*\delta(t-b) = \delta(t-a-b). \tag{2.49}$$

Distribuția $\delta(t-a)$ este asimilată în tehnică cu un semnal-impuls aplicat la momentul a și prima formulă (2.49) arată că prin convoluție cu acest impuls, un semnal f este translatat cu a. Fie $\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta(t-2k\pi)$, succesiunea periodică de delte. Pentru orice $f \in \mathscr{D}'$, avem evident

$$f(t)*\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t-2k\pi), \tag{2.50}$$

deci prin convoluție cu Δ, orice semnal-distribuție devine o serie de translații ale lui; reamintim aici că dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție de clasă C^∞, atunci pentru produsul uzual avem

$$f(t)\Delta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(2k\pi)\delta(t-2k\pi).$$

5.9. **Aplicații ale convoluției.** 1) La punctul 5.5 am definit regularizata $f*\varphi$ a unei distribuții $f \in \mathscr{D}'$ prin $\varphi \in \mathscr{D}$. Sensul noțiunii de regularizare este precizat în rezuitatul următor:

Teorema II.4. *Pentru orice distribuție $f \in \mathscr{D}'$ există un șir de funcții-test $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ din $\mathscr{D}$ astfel încît $\varphi_n \overset{\mathscr{D}'}{\to} f$ pentru $n \to \infty$.*

Demonstrație. Conform teoremei II.1, se poate alege un șir $\{\varphi_n\}_{n\geq 1}$ de funcții din $\mathscr{D}$, reprezentativ pentru δ, adică $\underline{\psi}_n \overset{\mathscr{D}'}{\to} \delta'$ pentru $n \to \infty$. Atunci $f*\psi_n$, $n \geq 1$, este o funcție de clasă C^∞, deci $f*\psi \in \mathscr{E}$ și, în plus, $f*\psi_n \overset{\mathscr{E}'}{\to} f*\delta = f$, pentru $n \to \infty$. Pe de altă parte, deoarece $\mathscr{D}$ este dens în $\mathscr{E}$, se poate alege pentru fiecare $n \geq 1$ cîte un șir de funcții-test $\varphi_{nm} \in \mathscr{D}$ astfel încît $\underline{\varphi}_{nm} \overset{\mathscr{E}'}{\to} f*\psi_n$ pentru $m \to \infty$. Șirul diagonal $\varphi_n = \varphi_{nn}$ are proprietatea că $\underline{\varphi}_n \overset{\mathscr{E}'}{\to} f$, deci $\underline{\varphi}_n \overset{\mathscr{D}'}{\to} f$ pentru $n \to \infty$.

Teorema precedentă se mai poate enunța spunînd că spațiul $\mathscr{D}$ este dens în $\mathscr{D}'$. Totodată s-a probat că orice distribiție din $\mathscr{D}'$ este limita slabă a unui șir de regularizate $f*\psi_n$ ale ei că și poate fi, „realizată" cu aproximație oricît de bună cu ajutorul funcțiilor-test. Acest fapt nu este un argument pentru a neglija distribuțiile ca instrument de lucru.

2) Teorema II.3 poate fi extinsă al cazul distribuțiilor, anume are loc.

Teorema II.5. *Un operator $L: \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$ este liniar, continuu și invariant la translații dacă și numai dacă este de tip convoluție, adică există $f \in \mathscr{D}'$ astfel încît $L = f*$; în plus, acest f este unic și este egal cu $L\delta$.*

Demonstrație. Reamintim că un operator $L: \mathscr{D}' \to \mathscr{D}'$ este invariant la translații dacă $(LT_h g)(t) = T_h Lg(t)$ pentru orice $g \in \mathscr{D}'$ și $h \in \mathbb{R}$. Presupunem mai întîi că $L = f*$ cu $f \in \mathscr{D}'$, adică $Lg = f*g$, $(\forall)\ g \in \mathscr{E}'$. Liniaritatea și continuitatea operatorului L fiind evidente, rămîne de arătat că $f(t+h)*g(t) = (f*g)(t+h)$, pentru orice $h \in \mathbb{R}$ și pentru aceasta, este suficient de utilizat definiția 5.7: alegem [cf. (2.41)] $\theta_k \rightsquigarrow 1$ cu $\theta_k \in \mathscr{D}$, deci $\theta_k(t-h, y) \rightsquigarrow 1$ pentru $k \to \infty$. Pentru orice $\varphi \in \mathscr{D}$ se obține

$$\begin{aligned}\langle (f*g)(t+h), \varphi\rangle &= \langle f*g, \varphi(t-h)\rangle = \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle f(t) \times g(u), \theta_k(t-h, y)\varphi(t-h+u)\rangle = \\ &= \lim_{k\to\infty} \langle f(t+h) \times g(u), \theta_k(t, u)\varphi(t+u)\rangle = \langle f(t+h)*g, \varphi\rangle,\end{aligned}$$

ceea ce trebuia demonstrat. Pe de-altă parte, rezultă că $L\delta = f*\delta = f$, conform exemplului 5.8, b).

Probăm acum afirmația reciprocă. Fie $L:\mathscr{E}'\to\mathscr{D}'$ un operator liniar, continuu și invariant la translații și $f = L\delta$. Operatorul $M = L - (f*)$ are aceeași proprietate. Dar pentru orice funcție-test $\varphi\in\mathscr{D}$ și pentru $p\to\infty$, avem

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\varphi\left(\frac{k}{p}\right)\delta\left(t-\frac{k}{p}\right)\xrightarrow{\mathscr{E}'}\varphi(t),\quad(\forall)\varphi\in\mathscr{D}.$$

Cum operatorul $M:\mathscr{E}'\to\mathscr{D}'$ este liniar și continuu, rezultă

$$M\varphi=\lim_{p\to\infty}M\left[\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\varphi\left(\frac{k}{p}\right)\delta\left(t-\frac{k}{p}\right)\right],\quad(\forall)\varphi\in\mathscr{D}.$$

Dar $M\delta\left(t-\frac{k}{p}\right)=(L\delta-f*\delta)\left(t-\frac{k}{p}\right)=(f-f)\left(t-\frac{k}{p}\right)=0$, deci $M\varphi=0$, $(\forall)\,\varphi\in\mathscr{D}$.

Arătăm că M este operatorul nul; într-adevăr, fie $(\forall)g\in\mathscr{E}'$, deci $g\in\mathscr{D}'$. Aplicînd teorema II.4, există un șir $\varphi_n\in\mathscr{D}$, $n\geqslant 1$ astfel încît $\varphi_n\xrightarrow{\mathscr{D}'}g$ și folosind continuitatea operatorului M, rezultă că $M(g)=M(\lim\varphi_n)=\lim M(\varphi_n)$ și cum $M(\varphi)=0$, $(\forall)\varphi\in\mathscr{D}$, se obține $M(g)\overset{n\to\infty}{=}0$. Așadar $M=0$, deci $L=f*$.

În plus, este evident că $L\delta=f*\delta=f$ și că distribuția f este unică, deoarece dacă $L=f*$ și $L=f_1*$, atunci rezultă $f*g=f_1*g$, $(\forall)g\in\mathscr{E}'$ și luînd $g=\delta$, se obține $f=f_1$.

3) Una din aplicațiile cele mai semnificative legate de convoluția funcțiilor sau distribuțiilor o constituie posibilitatea de reprezentare a soluțiilor unor clase de ecuații diferențiale sau cu diferențe finite.

Începem cu un caz binecunoscut și considerăm operatorul $L:\mathscr{D}'\to\mathscr{D}'$ definit prin $L=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta^{(k)}*$, unde a_k, $0\leqslant k\leqslant n$, sînt constante reale sau complexe. Considerînd o distribuție fixată $b\in\mathscr{D}'$, ecuația $Lx=b$ se scrie explicit, conform cu (2.47),

$$\sum_{k=0}^{n}a_k x^{(k)}(t)=b(t)$$

și recunoaștem o ecuație diferențială de ordin n, liniară cu coeficienți constanți, cu necunoscuta $x\in\mathscr{D}'$. Similar, dacă se consideră nodurile $t_0<t_1<\ldots<t_n$ și se notează $L=\sum_{k=0}^{n}a_k\delta(t-t_k)*$, atunci ecuația $Lx=b$ se scrie, conform cu (2.49), sub forma

$$\sum_{k=0}^{n}a_k x(t-t_k)=b(t),$$

adică devine o ecuație cu diferențe finite.

Reiese atunci interesul pentru ecuații de tipul

$$a*x=b\tag{2.51}$$

cu $a,b\in\mathscr{D}'$ distribuții fixate și necunoscuta $x\in\mathscr{D}'$. Se numește *soluție elementară* (sau *fundamentală*) a operatorului $L:\mathscr{D}'\to\mathscr{D}'$, $x\mapsto a*x$ orice distribuție $e\in\mathscr{D}'$ astfel încît $a*e=\delta$, adică $Le=\delta$; o astfel de distribuție nu este unică.

De exemplu, operatorul de derivare $x\mapsto\delta'*x=x'$ are soluția elementară $e=\underline{\sigma}$, ca și soluția elementară $e=\underline{\sigma}+\underline{c}$, cu c constantă oarecare.

Pentru $a,b,e\in\mathscr{D}'$ fixate ca mai sus, notăm cu $\mathscr{A}$ mulțimea distribuțiilor $x\in\mathscr{D}'$ pentru care există $e*x$ și $a*e*x$, pe care le numim ad-hoc admisibile pentru ecuația (2.51).

Teorema II.6. *Dacă $b\in\mathscr{A}$, atunci ecuația $a*x=b$ are o soluție în $\mathscr{A}$ și aceasta este unică, anume $x=e*b$.*

Demonstrație. Evident, $a*x=a*(e*b)=(a*e)*b=\delta*b=b$, deci x este soluție pentru (2.51). Dacă x, $x_1\in\mathscr{A}$ sînt soluții pentru (2.51), atunci $a*(x-x_1)=0$, deci $x-x_1=\delta*(x-x_1)=(e*a)*(x-x_1)=e*0=0$, adică $x=x_1$.

Fie $\mathscr{D}_1'=\{f\in\mathscr{D}'\mid(\exists)c\in\mathbb{R}$ astfel ca $\operatorname{supp}f\subset(c,\infty)\}$; conform cazului II din 5.7, dacă $f,g\in\mathscr{D}_1'$, atunci $f*g\in\mathscr{D}_1'$. Se poate proba că $\mathscr{D}_1'$ este o $\mathbb{C}$-algebră comutativă relativ la operațiile $f+g$, λf, $f*g$, $\lambda\in\mathbb{C}$, avînd δ ca element neutru la înmulțire. Evident, δ, $\underline{\sigma}$ și $\sum_{k=N}^{\infty}\delta(t-k)$, N întreg fixat, aparțin lui $\mathscr{D}_1'$. Reluăm ecuația (2.51) presupunînd că $a\in\mathscr{D}_1'$ și că există $e\in\mathscr{D}_1'$ astfel încît $a*e=\delta$ (deci $e=a^{-1}$). Atunci ca în teorema II.6 se arată că dacă $b\in\mathscr{D}_1'$, atunci

ecuația $a*x = b$ are soluție unică în $\mathscr{D}_+'$, anume $x = e*b = a^{-1}*b$. Ca aplicație, fie o ecuație

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)}(t) = b(t),\ a_0 = 1, \text{ adică } a*x = b, \text{ unde } a = \sum_{k=0}^{n} a_k \delta^{(k)}. \quad (2.52)$$

Fie $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ rădăcinile distincte ale ecuației caracteristice, cu multiplicitățile $m_1, \ldots, m_p$, $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$. Se verifică imediat că $a = (\delta' - \lambda_1\delta)^{m_1} * \ldots * (\delta' - \lambda_p\delta)^{m_p}$ și că fiecare factor $(\delta' - \lambda\delta)^m$ are ca invers în $\mathscr{D}_+'$ pe $\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\sigma(t)\,e^{\lambda t}$; atunci $a^{-1} = \mathop{*}_{i=1}^{p} \frac{t^{m_i-1}}{(m_i-1)!}\sigma(t)e^{\lambda_i t}$. Așadar, operatorul $L: \mathscr{D}_+' \to \mathscr{D}_+'$, $x \mapsto a*x$ are soluție elementară ($e = a^{-1}$) și atunci soluția ecuației (2.52) cu $b \in \mathscr{D}_+'$ este $x = a^{-1}*b$.

Fie ecuația omogenă $\sum_{k=0}^{n} a_k x^{(k)} = 0$, $n \geqslant 2$, cu coeficienți constanți și $z(t)$ soluția ei în clasa C^n, cu condițiile inițiale $z^{(k)}(0) = 0$, $0 \leqslant k \leqslant n-2$ și $z^{(n-1)}(0) = 1$. Se verifică imediat că distribuția regulată $e = z\sigma$ este soluție elementară a operatorului L [într-adevăr, $e' = z'\sigma + z(0)\delta = z'\sigma$, $e'' = z''\sigma, \ldots, e^{(n-1)} = z^{(n-1)}\sigma$ și $e^{(n)} = z^{(n)}\sigma + \delta$, deci $Le = \sum_{k=0}^{n} a_k e^{(k)} = \delta + \sigma \sum_{k=0}^{n} a_k z^{(k)} = \delta$]. De exemplu, pentru ecuația pendulului $x'' + \omega^2 x = 0$, $\omega > 0$ constant, se găsește $z(t) = \frac{1}{\omega}\sin \omega t$, deci $e = \frac{1}{\omega}\sigma(t)\sin \omega t$. În general, soluția $e = z\sigma$ pentru ecuația $Lx = \delta$ se numește *funcția Green a lui* L la momentul de referință $t = 0$: $e(t)$ este răspunsul la momentul t al sistemului dinamic L, la aplicarea impulsului δ la momentul $t = 0$. Funcția Green la momentul s este $G_s(t) = e(t)*\delta(t-s)$ și evident, $L(G_s(t)) = (Le)*\delta_s = \delta_s$; în cazul pendulului, $G_s(t) = \frac{1}{\omega}\sigma(t-s)\sin\omega(t-s)$ este răspunsul la momentul t dacă la momentul s s-a aplicat pendulului impulsul δ.

Referitor la existența mai multor soluții elementare pentru un același operator liniar L, remarcăm că dacă e și e_1 au această proprietate, atunci $Le = Le_1 = \delta$, deci $e - e_1 \in \operatorname{Ker} L$, adică e și e_1 diferă printr-o soluție oarecare a ecuației omogene $Lx = 0$. De exemplu, pentru operatorul $L: x \mapsto x''$, funcția Green este $G_0(t) = t\,\sigma(t)$ și orice funcție de forma $t\sigma(t) + C_1 t + C_2$, cu C_1, C_2 constante arbitrare, este soluție elementară.

B. TEORIA ELEMENTARĂ A TRANSFORMĂRILOR INTEGRALE

Transformările integrale ale funcțiilor au început să fie studiate în mod sistematic la începutul secolului trecut; ideea principală a fost aceea de a transforma unele operații de analiză (integrare, derivare etc.) în operații algebrice. Calculul operațional a cunoscut o dezvoltare deosebită, atît în privința fundamentării sale teoretice cît și în lărgirea gamei sale de aplicații. Ecuațiile fizicii matematice cîteva probleme de elasticitate, de teoria vibrațiilor și teoria undelor, ca și unele probleme de control automat, utilizează în mod curent diverse tipuri de transformări integrale și tehnici de calcul operațional. În general, fiecare tip de transformare integrală este legat de o anumită clasă de funcții, ceea ce aduce dificultăți în privința respectării rigorii (de exemplu, pentru transformarea Laplace este necesar de definit clasa Ω și similar clasa L_2 pentru transformările Fourier și Hilbert). Pe lîngă proprietățile de calcul, transformările remarcabile care vor fi studiate în continuare au calitatea extrem de importantă de a putea fi inversate. Astfel, transformarea Laplace stabilește o corespondență între domeniul-timp și planul complex, după cum transformarea Fourier dă o corespondență între domeniile-timp și frecvență, iar inversarea face ca anumite probleme să poată fi rezolvate în domeniul cel mai convenabil din punct de vedere matematic.

§ 6. Transformarea Laplace a semnalelor-funcție

Începem studiul sistematic al transformărilor integrale ale semnalelor, reamintind proprietățile principale ale transformării Laplace, baza calculului operațional.

6.1. **Definiție.** Vom numi *funcție-original* orice funcție (*semnal-funcție*) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avînd proprietățile:

(a) $f \in L_1^{loc}$ și $\operatorname{supp} f \subset [0,\infty)$, adică $f(t) = 0$ dacă $t < 0$;

(b) f este funcție continuă pe porțiuni pe $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (adică există o mulțime discretă de puncte $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ astfel încît f să fie continuă pe fiecare interval (t_i, t_{i+1}), $i \geqslant 0$, avînd limite laterale în orice punct t_i, $i \geqslant 1$); se acceptă că $\lim_{t\to 0, t>0} f(t) = f(0_+)$ poate să nu existe.

Vom nota cu Ω mulțimea funcțiilor-original; evident, Ω este un spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$.

Condiția (a) din definiția precedentă este justificată de faptul că semnalele care intervin asupra unor procese fizice sînt nule pînă la un moment dat t_0 și se poate lua $t_0 = 0$. Condiția (b) revine la faptul că în orice interval mărginit $(0, T]$ funcția f are cel mult un număr finit de discontinuități de speța întîi.

6.2. **Exemple.** a) Fie $f_1(t) = P(t)\cdot\sigma(t)$, $t\in\mathbb{R}$, cu P polinom oarecare; condițiile (a), (b) sînt automat îndeplinite, $f_1(0_+) = P(0)$, deci $f_1\in\Omega$. În acest caz, există $T>0$, $M>0$ astfel încît $|P(t)|\leqslant Me^t$ pentru orice $t\geqslant T$, În particular, $\sigma\in\Omega$.

b) Considerăm $f_2(t) = e^{\alpha t}\sigma(t)$, $t\in\mathbb{R}$ (α real fixat) și $f_3(t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\sigma(t)$ cu A, B numere reale fixate, $\omega>0$. Evident f_2, $f_3\in\Omega$.

c) Dacă $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o funcție continuă pe porțiuni și dacă $a<b$ sînt numere reale, fixate, atunci funcția $t\to[\sigma(t-b)-\sigma(t-a)]u(t)$ aparține lui Ω.

d) În toate exemplele anterioare de funcții $f\in\Omega$ este satisfăcută următoarea condiție de creștere exponențială: există numere reale $M>0$, $T>0$ și c astfel încît $|f(t)|\leqslant M\,e^{ct}$ pentru orice $t\geqslant T$. Această condiție asigură convergența anumitor integrale improprii care vor interveni și este utilă în practică. Numărul c se numește în acest caz *indice de creștere exponențială a lui f*. Dar nu orice semnal din Ω satisface această condiție de creștere, de exemplu $f(t) = \exp(t^2)\cdot\sigma(t)$.

6.3. **Definiție.** Pentru orice funcție-original $f\in\Omega$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, se numește *transformata Laplace a lui f* (sau *funcția-imagine a lui f*) funcția complexă F definită prin

$$F(s)\overset{\Delta}{=}\int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt\,, \tag{2.53}$$

adică

$$F(s) = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0\\ R\to\infty}}\int_\varepsilon^R f(t)\,e^{-st}\,dt,$$

unde ε, R sînt independente unul de altul.

Ca de obicei, se notează $F = \mathscr{L}f$ sau indicînd explicit variabilele independente utilizate, $f(t)\overset{\mathscr{L}}{\to}F(s)$. Este evident că operatorul $\mathscr{L}$ de transformare Laplace este liniar, adică $\mathscr{L}(\alpha f+\beta g) = \alpha\mathscr{L}f+\beta\mathscr{L}g$, $(\forall)\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, $(\forall)f,g\in\Omega$.

Reamintim că o funcție cu valori complexe $f(t) = u(t)+jv(t)$, $u = \mathrm{Re}f$, $v = \mathrm{Im}f$ se spune integrabilă pe un interval I dacă u, v sînt integrabile și, în plus, $\int_I f(t)\,dt = \int_I u(t)\,dt + j\int_I v(t)\,dt$. Tocmai în acest sens trebuie considerată integrala (2.53).

Pentru $f\in\Omega$ fixat se poate considera mulțimea

$$C_f = \{s\in\mathbb{C}\mid\text{integrala } F(s) \text{ este absolut convergentă, adică}$$

$$\int_0^\infty|f(t)\,e^{-st}|dt<\infty\},$$

numită *mulțimea de convergență a lui F*.

Dacă a este un număr real fixat, atunci vom nota prin $\sum(a)$ semiplanul deschis $\{s\in\mathbb{C}\mid\mathrm{Re}\,s>a\}$.

Teorema II.7. *Dacă $f\in\Omega$ este o funcție cu creștere exponențială cu indice c, atunci*

$$\sum(c)\subset C_f$$

și funcția $F:\sum(c)\to\mathbb{C}$ este olomorfă în domeniul $\sum(c)$.

Demonstrație. Fie $(\forall)s\in\sum(c)$. Conform ipotezei, există numere reale $M>0$, $T>0$ astfel încît $|f(t)|\leqslant Me^{ct}$, pentru orice $t\geqslant T$. Punînd $s=\alpha+j\omega$, rezultă că $\alpha>c$, deci $|f(t)e^{-st}| = |f(t)e^{-\alpha t}|\leqslant Me^{-(\alpha-c)t}$, pentru orice $t\geqslant T$. Deoarece $\int_0^\infty Me^{-(\alpha-c)t}\,dt = \frac{M}{\alpha-c}<\infty$, rezultă că integrala $F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}\,dt$ este absolut convergentă, deci $s\in C_f$ și incluziunea din enunț este probată.

Același raționament arată că integrala (2.53), ca integrală cu parametrul s, este uniform convergentă în orice semiplan $\mathrm{Re}\,s\geqslant a$ cu $a>c$ și verifică condițiile derivării sub integrală; rezultă că funcția F este $\mathbb{C}$-derivabilă în raport cu s în orice punct din semiplanul $\sum(c)$, deci este olomorfă în semplanul $\sum(c)$.

Teorema II.7 are loc pentru orice funcție $f\in\Omega$.

În ipotezele teoremei II.7, rezultă că mulțimea C_f este nevidă. Există însă funcții din Ω pentru care $C_f=\emptyset$, de exemplu $f(t) = \exp(t^2)\sigma(t)$.

În cele ce urmează, vom presupune că $C_f\neq\emptyset$ și vom nota

$$a_f = \inf\{a\in\mathbb{R}\mid\text{există } s\in C_f \text{ astfel încît } a = \mathrm{Re}\,s\},$$

numit *abscisa de convergență a lui F*. Relativ la structura mulțimii C_f rezultă imediat că sînt posibile două cazuri:

I. $a_f = -\infty$, deci $C_f=\mathbb{C}$ (de exemplu, pentru $f=0$);

II. $a_f=$ finit și atunci $\sum(a_f)\subset C_f\subset\overline{\sum(a_f)}$ (de exemplu, pentru $f = e^{2t}$, $a_f = 2$), deci mulțimea C_f este semiplanul deschis $\sum(a_f)$ la care se adaugă eventual puncte de frontieră, adică de pe dreapta verticală $\mathrm{Re}\,s = a_f$.

6.4. **Observație.** Referitor la comportarea lui $F=\mathscr{L}f$ pe frontiera mulțimii C_f sau la infinit, are loc următorul rezultat binecunoscut [14, 25]: *Fie $f\in\Omega$ și $0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$*

fixat. Dacă s_1 este un punct de pe frontiera mulțimii C_f, atunci notînd cu U unghiul haşurat (fig. 2.13), *rezultă* $\lim_{s\to s_1, s\in U} F(s) = F(s_1)$. *Similar, pentru orice unghi V cu vîrf $s_2 \in C_f$,* $\lim_{s\to\infty, s\in V} F(s)=0$.

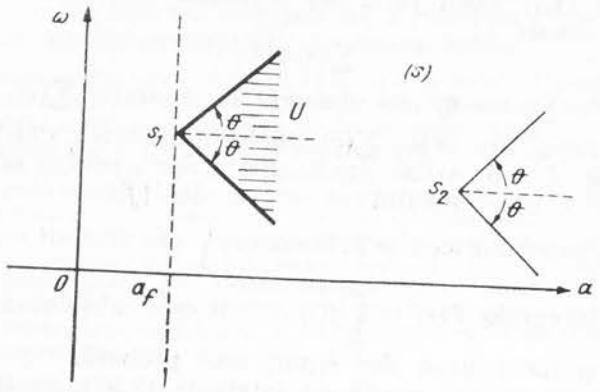


Fig. 2.13. Reprezentarea domeniilor unghiulare în planul s.

Indicăm o listă de transformate Laplace ale unor funcții-original $f \in \Omega$ mai des întîlnite:

$\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}$ $(a_f = 0)$; $e^{at}\cdot\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s-a}$ (a este o constantă complexă și abscisa de convergență corespunzătoare este $a_f = \operatorname{Re} a$);

$\sigma(t)\cdot\cos at \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{s}{s^2+a^2}$ $(a_f = |\operatorname{Im} a|)$; $\sigma(t)\cdot\sin at \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{a}{s^2+a^2}$ $(a_f = |\operatorname{Im} a|)$; $t^n\cdot\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} n!/s^{n+1}$ ($n \geqslant 0$ întreg, $a_f = 0$).

Alte trasformate Laplace sînt următoarele (a, b fiind constante complexe):

$$|\sin at|\cdot\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{a}{s^2+a^2}\cdot\frac{1+\exp(-s\pi/a)}{1-\exp(-s\pi/a)};$$

$$t^n\cdot e^{at}\cdot\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} n!/(s-a)^{n+1}, \quad n\geqslant 0 \text{ întreg};$$

$$\sigma(t)\,\frac{\sin at}{t} \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{s}{a};$$

$$\sigma(t) - \sigma(t-\tau) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1-e^{-\tau s}}{s} \quad (\tau \text{ este real și pozitiv});$$

$$e^{-bt}\cdot\sin at\cdot\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{a}{(s+b)^2+a^2};\quad e^{-bt}\cdot\cos at\cdot\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{s+b}{(s+b)^2+a^2};$$

$$\operatorname{Si}(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\int_t^\infty \frac{\sin u}{u}\,du\right)\cdot\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}\operatorname{arctg} s;$$

$$\operatorname{Ci}(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\int_t^\infty \frac{\cos u}{u}\,du\right)\cdot\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}\ln\sqrt{1+s^2};$$

$$\operatorname{Ei}(t) \stackrel{\Delta}{=} \left(\int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du\right)\cdot\sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s}\ln(1+s),$$

considerînd determinarea principală corespunzătoare.

(Funcțiile Si, Ci, Ei se numesc respectiv *sinusul integral*, *cosinusul integral*, *exponențiala integrală*.)

Strîngem acum laolaltă proprietățile principale teoretice și de calcul ale transformării Laplace.

Teorema II.8. (a) *Dacă* $f \in \Omega$ *și* $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$, *atunci* $f(kt) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{k}F\left(\frac{s}{k}\right)$, $k>0$ *constant*, $e^{s_0 t}\cdot f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s-s_0)$, $s - s_0 \in C_f$, *și* $f(t-\tau) \xrightarrow{\mathscr{L}} e^{-\tau s}\cdot F(s)$ (*pentru orice* $\tau > 0$ *fixat*).

(b) *Presupunem că* $f\in\Omega$ *și există derivatele* $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ *în* $\mathbb{R}\setminus\{0\}$; *în plus*, $f^{(n)}\in\Omega$ *și există* $f^{(k)}(0_+) = \lim_{t\to 0, t>0} f^{(k)}(t)$, $0\leqslant k\leqslant n-1$. *Atunci*

$$f^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} s^n\cdot F(s) - s^{n-1}\cdot f(0_+) - s^{n-2}\cdot f'(0_+) - \ldots - f^{(n-1)}(0_+).$$

Dacă $s_0 \geqslant 0$ *aparține mulțimii de convergență a lui* $f^{(n)}$, *atunci* $\mathscr{L}(f^{(n)})$ *este olomorfă în semiplanul deschis* $\operatorname{Re} s > s_0$.

În particular, $f'(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} sF(s) - f(0_+)$, $f''(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} s^2F(s) - sf(0_+) - f'(0_+)$ *etc. în condițiile indicate.*

(c) *Fie* $f \in \Omega$; *dacă* $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$, *atunci* $t^n f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} (-1)^n F^{(n)}(s), (\forall) n \geqslant 0$ *întreg iar* $F^{(n)}(s)$ *are abscisa de convergență* a_f.

(d) *Presupunem* $f \in \Omega$ *și* $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$. *Dacă* $s_0 \in \mathbb{C}_f$, $s_0 \geqslant 0$, *atunci*

$$\int_0^t f(u)\,du \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{F(s)}{s}, \quad \operatorname{Re} s > s_0,$$

iar dacă funcția $\frac{f(t)}{t}$ *aparține lui* Ω *și are abscisa de convergență* α, *atunci*

$$\frac{f(t)}{t} \xrightarrow{\mathscr{L}} \int_s^\infty F(v)\,dv, \quad \operatorname{Re} s > \alpha,$$

unde integrala se poate lua în lungul oricărei semidrepte având capătul în s, *făcînd un unghi între* $-\frac{\pi}{2}$ *și* $\frac{\pi}{2}$, *cu semiaxa reală pozitivă.*

(e) *Fie* $f \in \Omega$ *o funcție care pentru* $t \geqslant 0$ *este periodică de perioadă* $T > 0$ *și* $f_0(t) = f(t)[\sigma(t) - \sigma(t - T)]$, *deci* $f(t) = f_0(t) + f_0(t - T) + f_0(t - 2T) + \ldots$ *Dacă* $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$ *și* $f_0(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F_0(s)$, *atunci*

$$F(s) = (1 + e^{-sT} + e^{-2sT} + \ldots) \cdot F_0(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-su} \cdot f(u)\,du.$$

Demonstrația acestei teoreme este binecunoscută [14, 25]. Reamintim că regulile de calcul de la punctul (a) poartă respectiv denumirile de regula asemănării, deplasării, întîrzierii. La punctele (b), (c) sînt date regulile derivării originalului și derivării imaginii, iar la punctul (d) sînt enunțate regulile integrării originalului și integrării, imaginii respectiv. La punctul (e) este indicat modul de calcul al transformatei Laplace a unui semnal periodic și arată că este suficient de calculat integrala de tip (2.53) pe un interval de lungime egală cu perioada.

Ca un exemplu de aplicare a punctului (e), considerăm semnalul $f(t) = A[\sigma(t) - \sigma(t - a)]$, A și a fiind constante reale, $a > 0$. Atunci semnalul periodic de perioadă $T > a$, obținut restrîngînd f la un interval $[0, T)$ și apoi prelungind prin periodicitate la întreg $\mathbb{R}$, va avea transformata Laplace egală cu

$$\frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^a e^{-su} \cdot A \cdot du = \frac{A}{s} \cdot \frac{1 - e^{-sa}}{1 - e^{-sT}}.$$

Transformarea Laplace este legată esențialmente de descrierea fenomenelor liniare. Dacă $f, g \in \Omega$, atunci nu rezultă în general că $fg \in \Omega$ și chiar dacă $fg \in \Omega$, nu are loc relația $\mathscr{L}(fg) = \mathscr{L}f \cdot \mathscr{L}g$, așa cum se vede luînd de exemplu $f = g = \sigma$. Un alt rezultat fundamental îl constituie legătura între convoluție și transformare Laplace, cuprinsă în

Teorema II.9. *Fie* $f, g \in \Omega$ *și* $h = f * g$. *Atunci* $h \in \Omega$ *și dacă* $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$, $g(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} G(s)$, *iar integralele* $F(s), G(s)$ *converg absolut în punctul* $s_0 \in \mathbb{C}$, *atunci integrala* $H(s) = (\mathscr{L}h)(t)$ *are aceeași proprietate și, în plus,*

$$H(s) = F(s) \cdot G(s), \text{ pentru } \operatorname{Re} s \geqslant \operatorname{Re} s_0.$$

Demonstrația este tipică [14, 25].

6.5. **Aplicații.** 1) Una din aplicațiile cele mai consistente ale transformării Laplace o constituie rezolvarea explicită, algoritmizabilă, a unor probleme inițializate pentru unele clase de ecuații diferențiale. Astfel, dacă se consideră ecuația (2.52) și se presupune că $b \in \Omega$, atunci se știe că soluția satisfăcînd condițiile $x^{(k)}(0_+) = c_k$, $0 \leqslant k \leqslant n - 1$, cu c_k constante reale sau complexe date, există și este unică; în plus, dacă „perturbația" b are creștere exponențială, atunci se știe că orice soluție are aceeași proprietate. Notăm $X(s) = \mathscr{L}x(t)$ și aplicînd operatorul $\mathscr{L}$ ecuației (2.52), se obține, conform teoremei II.8,(b), o relație de forma

$$P(s) \cdot X(s) = Q(s) + B(s),$$

unde $P(s)$ este polinomul caracteristic al ecuației (2.52), $B(s) = \mathscr{L}b(t)$ și $Q(s)$ este polinom de grad $\leqslant n - 1$ depinzînd de c_k. Odată aflat $X(s)$, se poate deduce imediat soluția $x(t)$ a ecuației (2.52) cu condițiile inițiale impuse, prin metode elementare, cu utilizarea listei de transformate-tip, sau prin metoda reziduurilor.

2) Considerații similare au loc pentru sisteme diferențiale cu coeficienți constanți, de forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \tag{2.54}$$

unde $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$, $n \geqslant 1$, $\mathbf{b}(t) = [b_1(t)\ b_2(t) \ldots b_n(t)]'$ cu $b_i \in \Omega$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Soluția $\mathbf{x}(t) = [x_1(t)\ x_2(t) \ldots x_n(t)]'$ a sistemului (2.54) care satisface condiția $\mathbf{x}(0_+) = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ fiind un vector coloană constant (accentul

semnifică transpunerea de matrice) are toate componentele x_i în Ω și este dată prin formula explicită :

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t} \cdot \mathbf{c} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-u)} \cdot \mathbf{b}(u)\, du.$$

Transformarea Laplace a funcțiilor cu valori vectoriale se definește pe componente ; notînd $\mathbf{X}(s) = \mathcal{L}\mathbf{x}(t)$ și $\mathbf{B}(s) = \mathcal{L}\mathbf{b}(t)$ și folosind (2.54), rezultă egalitatea de matrice

$$s\mathbf{X}(s) - \mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}(s) + \mathbf{B}(s) \text{ sau } (\mathbf{A} - s\mathbf{U}_n) \cdot \mathbf{X}(s) = -\mathbf{c} - \mathbf{B}(s).$$

Este evident că pentru orice s cu $\operatorname{Re} s$ suficient de mare, matricea $\mathbf{A} - s\mathbf{U}_n$ este inversabilă ; rezultă deci că există a real astfel încît

$$\mathbf{X}(s) = -(\mathbf{A} - s\mathbf{U}_n)^{-1} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{B}(s)) \text{ pentru } \operatorname{Re} s > a.$$

și de aici se deduce originalul $\mathbf{x}(t)$.

3) O aplicație tipică a transformării Laplace este legată de funcțiile de transfer ale unor sisteme inginerești.

Fie un circuit de forma indicată în fig. 2.14, cu o rezistență R, o capacitate C și o inductanță L, $u(t)$ fiind tensiunea imprimată și $i(t)$ curentul. Asimilăm acest circuit cu un sistem liniar cu intrarea $u(t)$ și ieșirea $i(t)$, presupuse semnale din Ω. Aplicînd teorema secundă a lui Kirchhoff, obținem ecuația următoare:

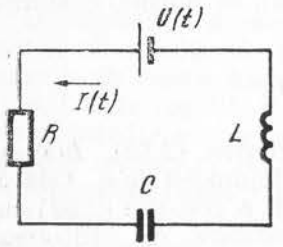


Fig. 2.14. Circuit serie RLC.

$$Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(u)du + Li'(t) = u(t).$$

Presupunînd că $i(0_+) = 0$ și notînd $I(s) = \mathcal{L}i(t)$, $U(s) = \mathcal{L}u(t)$, se obține, conform teoremei II.8, relația algebrică

$$RI(s) + \frac{1}{C} \cdot \frac{1}{s} I(s) + L \cdot sI(s) = U(s)$$

sau, echivalent,

$$I(s) = H(s)U(s), \quad \text{unde } H(s) = \frac{1}{R + \dfrac{1}{Cs} + Ls}.$$

Funcția complexă $H(s)$ se numește *funcția de transfer* a sistemului considerat și este deci egală cu raportul între transformata Laplace a ieșirii și cea a intrării. Această definiție are caracter de generalitate.

O problemă naturală este determinarea unui semnal $h \in \Omega$ astfel încît $H(s) = \mathcal{L}h(t)$. Rezolvarea riguroasă și completă a acestei probleme se poate face *numai* în cadrul teoriei distribuțiilor. Dacă ar exista $u \in \Omega$ astfel încît $\mathcal{L}u = 1$, atunci aplicînd la intrarea sistemului semnalul u, ieșirea corespunzătoare va fi un semnal y astfel încît $\mathcal{L}y = H(s) \cdot \mathcal{L}u = H(s) \cdot 1 = H(s)$, adică $\mathcal{L}y = \mathcal{L}h$, deci $y = h$ (identificînd funcțiile care coincid a.p.). Așadar, semnalul h ar coincide cu ieșirea corespunzătoare intrării u. Din păcate, nu există nici un semnal $u \in \Omega$ astfel încît $\mathcal{L}u = 1$, deoarece conform observației 6.4, ar trebui ca $\lim_{s \to \infty, s \in V} \mathcal{L}u(s) = 0$. Totuși, lărgind clasa de semnale Ω și extinzînd convenabil operatorul $\mathcal{L}$, se poate realiza cerința $\mathcal{L}u = 1$ în clasa lărgită. Anume se va lua $u = \delta(t)$, distribuția lui Dirac (definiții precise se vor da în § 11) și acesta este unul din motivele pentru care semnalul δ se mai numește *impuls unitate*, după cum h se mai numește *răspunsul-impuls* al sistemului (în cele ce urmează, h se va numi *funcție de pondere* sau *funcție Green*). Avantajul principal al distribuției δ în raport cu orice funcție reprezentativă (de exemplu, conform cu § 4, exemplul 4.3, a), $h_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{2\varepsilon}\ [\sigma(t + \varepsilon) - \sigma(t - \varepsilon)]$, $\varepsilon > 0$ fiind oricît de mic), constă în faptul că δ este independentă de durata impulsului.

Reluăm exemplul anterior cu circuitul (R, C, L), presupus în repaus pentru $t < 0$ și presupunem că semnalul de intrare aplicat la momentul $t = 0$ este δ. Răspunsul (ieșirea) sistemului la momentul t va fi egală cu $i(t)$, unde

$$I(s) = \mathcal{L}i(t) = H(s) \cdot 1 = \frac{1}{R + \dfrac{1}{Cs} + Ls} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}.$$

Dacă $R^2C < 4L$ și dacă notăm $\dfrac{R}{2L} = \alpha$, $\dfrac{4L - CR^2}{4L^2C} = \beta^2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, rezultă

$$I(s) = \frac{1}{L} \cdot \frac{s}{(s + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

deci $i(t) = \dfrac{1}{L}\left(e^{-\alpha t} \cos \beta t - \dfrac{\alpha}{\beta} e^{-\alpha t} \sin \beta t\right)\sigma(t)$. Se observă că un moment de anulare a curentului este $t = \dfrac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Facem o ultimă remarcă : dacă $H(s)$ este funcția de transfer a unui sistem și dacă $x \in \Omega$ este un semnal de intrare iar $X(s) = \mathcal{L}x(t)$, atunci produsul $H(s) \cdot X(s)$ este transformata Laplace a răspunsului $y(t)$ al sistemului la intarea x. În ipoteza că există $h \in \Omega$ astfel încît $H = \mathcal{L}h$, rezultă $\mathcal{L}y = H(s) \cdot X(s) = \mathcal{L}h \cdot \mathcal{L}x = \mathcal{L}(h * x)$, deci $y = h * x$, adică ieșirea se obține prin convoluția răspunsului-impuls cu intrarea. Teorema II.5 caracterizează sistemele liniare în care operatorul $x \mapsto y$ este tocmai de tip convoluție, ca fiind sistemele invariante în timp, în ipoteza că x parcurge $\mathcal{E}'$ și y parcurge $\mathcal{D}'$. În acest caz există întradevăr $h \in \mathcal{D}'$ astfel încît $y = h * x$.

§ 7. Transformarea Fourier a semnalelor-funcție din L_1

În acest paragraf se va prezenta succint teoria clasică a transformării Fourier și a legăturii acesteia cu transformarea Laplace. În particular, se va obține formula de inversare pentru transformarea Laplace. Aplicații teoretice și practice dintre cele mai diverse vor fi date ulterior în tot cuprinsul lucrării.

7.1. **Definiție.** Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcție (semnal-funcție) aparținînd lui L_1. Se numește *transformata Fourier a lui* f funcția $\mathcal{F}_f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$\mathcal{F}_f(\omega) \stackrel{\Delta}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt, \quad (\forall)\ \omega \in \mathbb{R}. \tag{2.55}$$

Integrala din membrul drept este evident convergentă, deoarece $|f(t) \cdot e^{-j\omega t}| = |f(t)|$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$ și $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$.

Vom scrie pe scurt

$$f(t) \stackrel{\mathcal{F}}{\to} \mathcal{F}_f(\omega).$$

Funcția $\mathcal{F}_f(\omega)$ se mai numește *funcția spectrală* sau *spectrul (în frecvență) al semnalului* $f(t)$ iar prin transformare Fourier, semnalelor în timp le corespund spectrele lor. În condiții suficient de largi vom vedea că operatorul $\mathcal{F}$ este inversabil, ceea ce permite studiul semnalelor deopotrivă și în domeniul-timp și în domeniul-frecvență.

Vom spune că o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ din L_1^{loc} satisface condiția (*) într-un punct $t_0 \in \mathbb{R}$ dacă există $\alpha > 0$ astfel încît

$$(*) \quad \lim_{\omega \to \infty} \int_0^{\alpha} [f(t_0 + u) - 2f(t_0) + f(t_0 - u)] \frac{\sin \omega u}{u}\, du = 0. \tag{2.56}$$

Pentru a realiza condiția (*) nu este suficient ca f să fie continuă în punctul t_0. Dacă f are variație mărginită pe $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ și în plus $f(t_0) = \dfrac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2}$ sau dacă există constantele reale $M > 0$, $r > 0$ astfel încît $|f(t_0 + t) - f(t_0)| \leqslant M|t|^r$ pentru $|t|^r \leqslant \alpha$, atunci f verifică (*). În particular, condiția (*) este satisfăcută în ipoteza că f este derivabilă în punctul t_0.

Un rezultat fundamental este cuprins în

Teorema II.10. (Fourier). *Fie* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *o funcție din* L_1 *și* $\mathcal{F}_f$ *transformata ei Fourier definită prin* (2.55).

(a) *Funcția* $\mathcal{F}_f$ *este continuă, mărginită pe* $\mathbb{R}$ *și, în plus,* $\lim_{\omega \to \infty} \mathcal{F}_f(\omega) = 0$, $\lim_{\omega \to -\infty} \mathcal{F}_f(\omega) = 0$.

(b) *Dacă funcția* f *satisface condiția* (*) *într-un punct* t, *atunci are loc formula de inversare*

$$\underset{\sim}{f}(t) = \frac{1}{2\pi}\, \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_f(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_{-\beta}^{\beta} \mathcal{F}_f(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega, \tag{2.57}$$

unde am notat $\underset{\sim}{f}(t) = \dfrac{f(t+) + f(t-)}{2}$.

Demonstrația acestei teoreme este binecunoscută [14, 15].

7.2. **Observații.** 1) În teorema II.10 rolul funcțiilor f, $\mathcal{F}_f$ nu este simetric și, în particular, se poate întîmpla ca integrala improprie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_f(\omega) \cdot e^{j\omega t}\, dt$$

să fie divergentă dacă nu este luată în sensul valorii principale, adică $\mathcal{F}_f \notin L_1$. O simetrie a acestor roluri este obținută, așa cum vom vedea, în cadrul spațiului L_2 al funcțiilor de pătrat integrabil Lebesgue.

2) Referitor la condiția (*) reamintim două rezultate clasice:

— Dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție din L_1^{loc}, periodică de perioadă T, atunci seria Fourier a lui f converge punctual cu suma $\underset{\sim}{f}$ în orice punct t_0 în care este verificată condiția (*) (teorema lui Dini);

— Dacă $\varepsilon > 0$ este fixat și dacă $f \in L_1$ verifică (*) într-un punct $t_0 \in [0, \varepsilon]$ și are proprietatea că seria $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\varepsilon + t_0)$ este uniform convergentă pe intervalul $[0, \varepsilon]$, atunci

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n\varepsilon + t_0) = \frac{1}{\varepsilon}\, \text{v.p.} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_f\left(\frac{2\pi n}{\varepsilon}\right) \exp(2\pi j n t_0/\varepsilon)$$

(teorema lui Poisson de însumare). Această relație arată că suma seriei valorilor lui f în puncte echidistante cu ε pe axa timpului este egală cu suma seriei valorilor lui $\mathcal{F}_f$ în alte puncte echidistante cu $\dfrac{2\pi}{\varepsilon}$ pe axa frecvențelor, fapt utilizat în analiza spectrală Fourier.

Reamintim de asemenea că dacă $f: [a, b] \to \mathbb{C}$ este o funcție din L_1, atunci

$$\lim_{\omega \to \infty} \int_a^b f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = 0 \text{ (teorema Riemann-Lebesgue).}$$

Intuitiv, acest rezultat este clar, deoarece pentru $\omega \in \mathbb{R}$, $\omega \to \infty$, contribuția lui $f(t)$ în integrală este anihilată de oscilațiile din ce în ce mai rapide ale lui $\sin \omega t$ și $\cos \omega t$. Dacă f este de clasă C^1, demonstrația este directă, integrînd prin părți, iar în cazul general se face un raționament standard, aproximînd f cu funcții în scară.

Indicăm acum o listă de transformate Fourier ale unor semnale remarcabile :

$f(t)$	$\mathcal{F}_f(\omega)$
$\sigma(t+t_0)-\sigma(t-t_0),\ t_0>0$	$\frac{2}{\omega}\sin\omega t_0 = 2t_0\,\mathrm{Sa}\,(\omega t_0)$
$\frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{Sa}\,(\omega_0 t),\quad \omega_0>0$	$\sigma(\omega+\omega_0)-\sigma(\omega-\omega_0)$
$\sigma(t)-\sigma(t_0),\quad t_0>0$	$t_0\,\mathrm{Sa}\,(\omega t_0)+\frac{1}{2\mathrm{j}}\,\omega t_0^2\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)$
$\frac{\omega_0}{2\pi}\,\mathrm{Sa}\,(\omega_0 t)-\frac{1}{4\pi\mathrm{j}}t\omega_0^2\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right),\ \omega_0>0$	$\sigma(\omega)-\sigma(\omega-\omega_0)$
$\mathrm{e}^{-\omega_0\lvert t\rvert},\ \omega_0>0$	$\frac{2\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}$
$\frac{1}{t^2+t_0^2},\ t_0>0$	$\frac{\pi}{t_0}\cdot\mathrm{e}^{-t_0\lvert\omega\rvert}$
$-\sigma(t+t_0)+2\sigma(t)-\sigma(t-t_0),\ t_0>0$	$\frac{1}{\mathrm{j}}\,\omega t_0^2\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)$
$\frac{1}{2\pi}t\omega_0^2\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right),\quad t_0>0$	$-\mathrm{j}[-\sigma(\omega+\omega_0)+2\sigma(\omega)-[\sigma(\omega-\omega_0])$
$\mathrm{e}^{-\omega_0 t}\sigma(t),\quad \omega_0>0$	$\frac{\omega_0}{\omega_0^2+\omega^2}+\frac{1}{\mathrm{j}}\,\frac{\omega}{\omega_0^2+\omega^2}$
$\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{t_0}{t_0^2+t^2}-\frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\cdot\frac{t}{t_0^2+t^2},\ t_0>0$	$\mathrm{e}^{-t_0\omega}\sigma(\omega)$
$\mathrm{e}^{-\omega_0\lvert t\rvert}\,\mathrm{sgn}\,t,\ \omega_0>0$	$\frac{2}{\mathrm{j}}\cdot\frac{\omega}{\omega_0^2+\omega^2}$
$\frac{1}{\pi}\cdot\frac{t}{t_0^2+t^2},\ t_0>0$	$-\mathrm{j}\cdot\mathrm{e}^{-t_0\lvert\omega\rvert}\,\mathrm{sgn}\,\omega$
$\left(1-\frac{\lvert t\rvert}{t_0}\right)\cdot[\sigma(t+t_0)-\sigma(t-t_0)],\ t_0>0$	$t_0\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega t_0}{2}\right)$
$\frac{\omega_0}{2\pi}\,\mathrm{Sa}^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right),\ \omega_0>0$	$\left(1-\frac{\lvert\omega\rvert}{\omega_0}\right)\cdot[\sigma(\omega+\omega_0)-\sigma(\omega-\omega_0)]$
$\mathrm{e}^{-\omega_0^2 t^2},\quad \omega_0>0$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\omega_0}\cdot\mathrm{e}^{-\omega^2/4\omega_0^2}$

Se remarcă faptul că în această listă este ilustrată și formula de inversare. Ar fi instructivă indicarea graficelor funcțiilor date și recomandăm cititorului acest lucru.

Ulterior vom da lista principalelor proprietăți de calcul ale transformării Fourier și vom adăuga noi perechi de transformate $(f, \mathcal{F}_f)$; pentru o prezentare unitară, cadrul spațiului $\mathcal{S}'$ al distribuțiilor temperate este cel mai potrivit.

7.3. **Legătura între transformările Laplace și Fourier.** Fixăm o funcție $f \in \Omega$ astfel încît integrala

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t$$

să fie absolut convergentă pentru cel puțin o valoare a lui $s = \alpha + \mathrm{j}\omega$ și notăm prin c_f marginea inferioară a numerelor reale α corespunzătoare. Pentru orice $\alpha > c_f$, integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}|\,\mathrm{d}t$$

este de asemenea convergentă și notînd $g(t) = f(t)\mathrm{e}^{-\alpha t}$, rezultă că $g \in \mathrm{L}_1$. În plus, rezultă formula

$$F(\alpha + \mathrm{j}\omega) = \int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha t - \mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

deci ca funcție de ω, transformata Laplace a lui f coincide cu transformata Fourier a lui g. Dacă funcția g satisface condiția (*), adică (2.56) într-un punct t, atunci conform teoremei II.10, (b), rezultă

$$\underset{\sim}{g}(t) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha + \mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega,$$

de unde

$$\underset{\sim}{f}(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cdot\underset{\sim}{g}(t) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha + \mathrm{j}\omega)\,\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}\omega$$

și cum această integrală este tocmai o integrală curbilinie luată în lungul paralelei la axa imaginară $s = \alpha + \mathrm{j}\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, cu α fixat, $\alpha > c_f$, rezultă

$$\underset{\sim}{f}(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\,\mathrm{v.p.}\int_{\alpha-\mathrm{j}\infty}^{\alpha+\mathrm{j}\infty} F(s)\,\mathrm{e}^{st}\mathrm{d}s,$$

unde prin v.p. $\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty}$ se înțelege $\lim_{R\to\infty}\int_{\alpha-jR}^{\alpha+jR}$. Conform teoremei lui Cauchy integrala este independentă de α. Am obținut astfel :

Teorema II.11 (*formula de inversare Mellin-Fourier pentru transformarea Laplace*). *Dacă* $f\in\Omega$ *și dacă* $\alpha > c_f$, *atunci în orice punct* t, *unde* f *satisface condiția* (*), *are loc formula*

$$\underset{\sim}{f}(t) = \frac{1}{2\pi j}\ \text{v.p.}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)\,e^{st}\,ds. \tag{2.58}$$

În practică această formulă nu este foarte avantajoasă, deoarece conduce la o integrală cu parametru, dificil de calculat cu metode numerice ; în schimb, formula Mellin-Fourier are consecințe teoretice remarcabile.

Corolarul 1. *Dacă* $f, g\in\Omega$, $c_f, c_g < \infty$ *și* $\mathscr{L}f = \mathscr{L}g$, *atunci* $f = g$ (a.p.).

Demonstrația rezultă direct din formula (2.58).

Corolarul 2. *Fie* $f\in\Omega$, $c_f < \infty$, $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$. *Presupunem că funcția* $F(s)$ *admite o prelungire olomorfă (unică) în* $\mathbb{C}\setminus\{s_1, s_2, \ldots\}$, *unde* $\{s_n\}_{n\geq 1}$ *este un șir finit sau infinit de singularități izolate ale lui* F. *Fie* $M_n = \sup_{|s|\leq R_n} |F(s)|$, *unde* $\{R_n\}_{n\geq 1}$ *este un șir de numere pozitive tinzînd către* ∞. *Dacă* $\lim_{n\to\infty} M_n = 0$ *și dacă* r_k *este reziduul funcției* $F(s)\cdot e^{st}$ *în punctul* s_k, $k \geq 1$, *atunci are loc relația*

$$\underset{\sim}{f}(t) = \sum_{k\geq 1} r_k \tag{2.59}$$

în orice punct t, *unde funcția* f *verifică condiția* (*).

Demonstrație. Fie $\alpha > c_f$ și presupunem că paralela prin punctul α la axa imaginară intersectează cercul $|s| = R_n$ în punctele $\alpha \pm j\omega_n$. Teorema reziduurilor pentru conturul orientat $(\Delta) + (\Gamma)$ din fig. 2.15 conduce la relația

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{(\Delta)+(\Gamma)} e^{st}\,F(s)\,ds = \sum_{|s_k|<R_n} r_k .$$

Făcînd $n\to\infty$ și aplicînd lema lui Jordan și relația (2.58), rezultă relația din enunț.

Formula (2.59) permite exprimarea funcției-original $f\in\Omega$ cu ajutorul singularităților transformatei ei Laplace. Dacă F este o

funcție rațională, $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ cu P, Q polinoame cu coeficienți din $\mathbb{C}$, grad $P <$ grad Q, avînd polii s_k cu multiplicitățile n_k, $1\leq k\leq n$, atunci formula (2.59) devine

$$\underset{\sim}{f}(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{s_k t} \sum_{p=1}^{n_k} \frac{a_{pk}}{(p-1)!}\,t^{p-1},$$

unde

$$\sum_{p=1}^{n_k} \frac{a_{pk}}{(s-s_k)^p}$$

este partea principală a dezvoltării Laurent a lui $F(s)$ în vecinătatea polului s_k. Aceasta este o formulă, adeseori utilizată, de recuperare a semnalului f de îndată ce se cunoaște $\mathscr{L}f$.

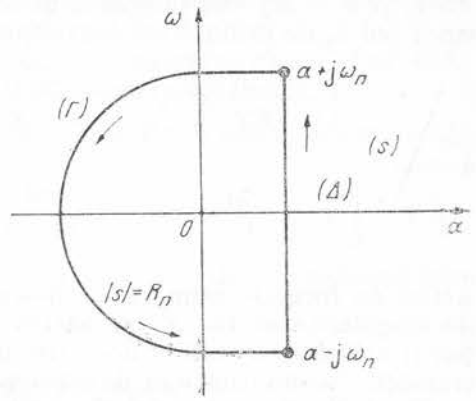


Fig. 2.15. Conturul de integrare utilizat în corolarul 2.

7.4. **Rezultate de tip asimptotic.** Reamintim că dacă f, g sînt funcții reale avînd un interval comun de definiție $[A, \infty)$, se scrie $f(t) = o(g(t))$ pentru $t\to\infty$ dacă $\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{g(t)} = 0$ și $f = O(g)$ dacă există numere reale B, M, $M > 0$ astfel încît $|f(t)| \leq M|g(t)|$ pentru orice $t \geq B$.

Dacă $f\in\Omega$ și $F(s) = \mathscr{L}(f(t))$ este o funcție rațională cu polii s_1, $s_2, \ldots, s_n$, atunci este evident că funcția-original f este de forma $f(t) = \sum_{k=1}^{n} P_k(t)e^{s_k t}$ cu P_k polinoame. Fie s_{i_0} polul cu partea reală maximă ρ, adică $\rho = \max_k \operatorname{Re} s_k$. Atunci $f(t) = o(e^{\lambda t})$ pentru orice $\lambda > \rho$ și are loc formula asimptotică

$$f(t) \sim P_{i_0}(t)\,e^{s_{i_0}t}, \quad t\to\infty.$$

Există rezultate mai generale, valabile nu numai pentru funcții raționale. Astfel, are loc următoarea teoremă a lui Wiener.

Teorema II.12. *Fie* $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcție original monoton crescătoare și pozitivă astfel încît să existe* $\alpha > 0$ *cu proprietatea că* $F = \mathscr{L}f$ *poate fi prelungită olomorf în semiplanul* $\operatorname{Re} s > \alpha_1$ (*unde* $\alpha_1 < \alpha$),

cu excepția unui pol simplu în α, *cu reziduul corespunzător* r. *Atunci* $f(t) \sim re^{\alpha t}$ *pentru* $t \to \infty$, *adică* $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-\alpha t} = r$.

Se poate arăta că dacă $f \in \Omega$ satisface condiția (*) pentru orice $t \geqslant t_0$ și $F = \mathscr{L}f$ este olomorfă în semiplanul $\operatorname{Re} s > \alpha_0$, cu excepția unui pol s_0 de ordin k cu dezvoltarea Laurent de forma

$$\frac{c_k}{(s-s_0)^k} + \ldots + \frac{c_1}{s-s_0} + \ldots \text{ și } \lim_{\substack{s\to\infty \\ \operatorname{Re} s>\alpha_0}} F(s) = 0,$$

atunci

$$f(t) = \left[c_1 + \frac{c_2 t}{1!} + \ldots + \frac{c_k t^{k-1}}{(k-1)!}\right]e^{s_0 t} + o(e^{\alpha_0 t}) \text{ pentru } t \to \infty.$$

Astfel de formule asimptotice descriu funcția-original f în termeni de singularitatea lui $\mathscr{L}f$ cu partea reală maximă; aceste descrieri pot fi utilizate în studiul unor sisteme dinamice prin funcțiile lor de transfer. Reamintim aici de asemenea teorema clasică a lui Paley:

Dacă F *este o funcție olomorfă în* $\operatorname{Re} s > \alpha_0$, $\lim_{\substack{s\to\infty \\ \operatorname{Re} s>\alpha_0}} F(s) = 0$ *și*

$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha + j\omega)|\, d\omega < \infty$ *pentru* $\alpha = \operatorname{Re} s > \alpha_0$, *atunci* $(\forall) t \in \mathbb{R}$ *și* $(\forall)\, \alpha > \alpha_0$, *integrala* $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\alpha-j\infty}^{\alpha+j\infty} F(s)e^{st}\, ds$ *există, este independentă de* α *și, în plus,* $f \in \Omega$ *și* $\mathscr{L}f = F$ (*în semiplanul* $\alpha > \alpha_0$).

Acest rezultat caracterizează funcțiile olomorfe de forma $\mathscr{L}f$ cu $f \in \Omega$.

7.5. **Transformarea Fourier pentru semnale din** L_2. Fie $C^0(\overline{\mathbb{R}})$ mulțimea funcțiilor continue $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, mărginite și tînzînd la zero spre $+\infty$ și $-\infty$. Teorema II.10 arată că transformarea Fourier $\mathscr{F} : L_1 \to C^0(\overline{\mathbb{R}})$, $f \mapsto F_f$ este un operator liniar; acest operator nu este surjectiv și nu are valori doar în L_1 [astfel, luînd $f(t) = e^{-t}\sigma(t) \in L_1$, avem $F_f(\omega) = \frac{1}{1+j\omega} \notin L_1$]. Acest fapt stînjenește inversarea transformării Fourier, ceea ce face ca pentru semnale din L_1 să fie dificilă recuperarea lor din cunoașterea funcției spectrale. Inconvenientul dispare pentru semnale din L_2. Dacă $f \in L_2$, atunci $f \in L_1^{loc}$ și are sens integrala $\int_{-n}^{n} f(t)e^{-j\omega t}dt$, $\omega \in \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$, dar aceasta poate să nu

aibă limită punctuală după ω pentru $n \to \infty$. Dar spațiul L_2 are o disponibilitate specifică, anume este spațiu Hilbert [cu produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)}\, dt$, $(\forall) f, g \in L_2$] și se poate defini convergența în norma din L_2: dacă $f_n, f \in L_2$, $n \geqslant 1$, se spune că $f_n \xrightarrow{L_2} f$ sau echivalent $f = \text{l.î.m.}\, f_n$ (limită în medie pătratică) dacă $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_2} = 0$.

Fie atunci $f \in L_2$ fixată; pentru orice $T > 0$ se notează trunchierea lui f:

$$f_T(t) = [\sigma(t+T) - \sigma(t-T)]f(t).$$

Atunci $f_T \in L_1$ și are sens $F_{f_T}(\omega) = \int_{-T}^{T} f(t)e^{-j\omega t}\, dt$. Un rezultat bine cunoscut îl constituie

Teorema II.13 (Plânchérel). *Fie* $f \in L_2$. *Atunci*:

(a) *există* $F(\omega) = \text{l.î.m.}_{T\to\infty} F_{f_T}(\omega)$, $(\forall)\omega \in \mathbb{R}$ *și* $F \in L_2$;

(b) *în plus,* $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$ *are loc formula*

$$\text{l.î.m.}_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} F(\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega = 2\pi f(t).$$

Demonstrația poate fi găsită în [5, 15]. Uneori se notează F_f în loc de F.

Operatorul

$$\mathscr{F} : L_2 \to L_2, \quad f(t) \mapsto F(\omega)$$

astfel definit se numește *transformarea Fourier directă a semnalelor din* L_2. Se poate defini de asemenea operatorul

$$\mathscr{F}^{-1} : L_2 \to L_2, \quad f(t) \mapsto \frac{1}{2\pi}\, \text{l.î.m.}_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} f(t)\, e^{j\omega t}\, dt,$$

numit *transformarea Fourier inversă a semnalelor din* L_2.

Teorema lui Plânchérel concentrează două fapte remarcabile: prin transformare Fourier a semnalelor din L_2, imaginile sînt cuprinse tot în L_2 și, în plus, $\mathscr{F}^{-1} \circ \mathscr{F} = \text{id}$, $\mathscr{F} \circ \mathscr{F}^{-1} = \text{id}$, id fiind aplicația identică a spațiului L_2.

Un alt rezultat fundamental este următoarea relație a lui Parseval, demonstrată de exemplu în [5]:

Pentru orice $f,\ g \in L_2$ *are loc egalitatea*

$$2\pi \langle f, g \rangle = \langle F_f, F_g \rangle,$$

adică

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} F_f(\omega) \cdot \overline{F_g(\omega)}\, d\omega. \tag{2.60}$$

În particular, pentru $g = f$ *se obține* $2\pi\|f\|^2 = \|F_f\|^2$, *adică*

$$2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |F_f(\omega)|^2\, d\omega,\ (\forall) f \in L_2. \tag{2.61}$$

Această relație se mai numește *teorema Rayleigh a energiei*. Semnalele f din L_2 se mai numesc *semnale cu energie finită*, numărul real și pozitiv $\|f\|_{L_2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$ se numește *energia semnalului*. Egalitatea (2.61) arată că energia unui semnal din L_2 poate fi calculată avînd reprezentarea fie în domeniul timp $f(t)$, fie în domeniul frecvență $F(\omega)$ a semnalului respectiv.

Putem formula cele spuse anterior sub forma unei teoreme.

Teorema II.14. *Transformarea Fourier*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F} : L_2 \to L_2$$

este un operator $\mathbb{C}$*-liniar, unitar (adică păstrează produsele scalare) și un izomorfism de spații Hilbert, avînd inversul* $\sqrt{2\pi}\,\mathcal{F}^{-1}$.

7.6. **Observații.** a) Pentru evitarea operației de l.i.m. și totodată pentru indicarea unui procedeu analitic de calcul al lui F_f, poate fi utilă formula următoare:

$$F_f(\omega) = \frac{d}{d\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t} - 1}{-jt} \cdot f(t)dt,\ (\forall) f \in L_2,$$

care admite și o inversă:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega t} - 1}{j\omega} \cdot F_f(\omega)\, d\omega.$$

O demonstrație a acestor formule poate fi găsită în [15]. Din prima din aceste formule se observă că dacă $f \in L_1$, adică $f \in L_1 \cap L_2$, atunci se poate deriva sub integrală în raport cu ω și rezultă

$$F_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt,$$

adică tocmai formula (2.55) de definiție a transformatei Fourier pentru f privit în L_1. Reținem așadar că notația F_f are semnificații deosebite pentru $f \in L_1$ sau $f \in L_2$ și acestea coincid dacă $f \in L_1 \cap L_2$.

b) O consecință directă a teoremei II.14 este următoarea relație:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}(f) = 2\pi \check{f},\ (\forall) f \in L_2, \tag{2.62}$$

numită uneori *teorema simetriei*. Demonstrația este imediată: deoarece $\mathcal{F}^{-1}$ este aplicație bijectivă și $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathrm{id}$, a proba formula (2.62) revine la a proba că $F_f = 2\pi F_{\check{f}}^{-1}$. Dar prin schimbarea de variabilă $t \mapsto -t$ se obține

$$\int_{-T}^{T} f(t)\, e^{-j\omega t} dt = \int_{-T}^{T} \check{f}(t)\, e^{j\omega t}\, dt,\quad (\forall)\ T > 0,$$

și trecînd la l.i.m., rezultă $F_f(\omega) = 2\pi F_{\check{f}}^{-1}(\omega)$, tocmai ceea ce trebuia.

Relația (2.62) se utilizează de obicei astfel: dacă $\varphi = F_f$, atunci $F_\varphi = 2\pi\check{f}$.

7.7. **Exemple.** a) Dacă $f(t) = Ae^{-\omega_0 t}\sigma(t)$, A, ω_0 fiind constante, $\omega_0 > 0$, atunci $F_f(\omega) = \dfrac{A}{\omega_0 + j\omega}$, adică $Ae^{-\omega_0 t}\,\sigma(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \dfrac{A}{\omega_0 + j\omega}$, de unde $\dfrac{A}{t_0 + jt} \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi A e^{t_0 \omega}\sigma(-\omega)$, $t_0 > 0$.

b) Un exemplu remarcabil se obține pornind de la

$$A[\sigma(t + t_0) - \sigma(t - t_0)] \xrightarrow{\mathcal{F}} 2At_0 \cdot \mathrm{Sa}\,(t_0\omega),\qquad t_0 > 0,$$

deci din (2.62) rezultă

$$2A\omega_0 \cdot \mathrm{Sa}(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} 2\pi A[\sigma(\omega + \omega_0) - \sigma(\omega - \omega_0)],\ \omega_0 > 0,$$

de unde

$$\frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{Sa}(\omega_0 t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \sigma(\omega + \omega_0) - \sigma(\omega - \omega_0),\qquad \omega_0 > 0.$$

Această corespondență timp-frecvență arată că semnalul de forma funcției de esantionare Sa este semnalul elementar cu spectrul constant egal cu 1 în $(-\omega_0, \omega_0)$ și nul în rest, fapt utilizat curent în teria comunicațiilor.

7.8. **Multiplicatori în L_2.** Un aspect important legat de transformarea Fourier în L_2 se referă la multiplicatori. Reamintim că se numește *multiplicator* al unui semnal F_1 din L_2 orice funcție $H: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ astfel încît produsul $F_1 \cdot H$ aparține lui L_2. Interpretarea fizică este clară: fiind dat un semnal de intrare $F_1(\omega)$ de energie finită, a găsi un multiplicator al acestuia revine la a găsi un sistem avînd factorul de transfer $H(\omega)$, cu proprietatea că semnalul de ieșire corespunzător $F_2(\omega) = F_1(\omega) \cdot H(\omega)$ este de asemenea de energie finită.

Caracterizarea multiplicatorilor în L_2 este cuprnsă în următoarea teoremă de analiză funcțională [13]:

Multiplicatorii în L_2 sînt exact funcțiile esențialmente mărginite (din L_∞). În plus, dacă $H \in L_\infty$, atunci operatorul $L_2 \to L_2$, $F \mapsto F \cdot H$ este liniar, mărginit cu norma egală cu $\|H\|_\infty$ și invariant în timp.

Reamintim că o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numește esențialmente mărginită dacă

$$\|f\|_\infty = \operatorname*{esssup}_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \stackrel{\Delta}{=} \inf \{m \mid |f(x)| \leqslant m \text{ pentru aproape toți } x \in \mathbb{R}\} < \infty.$$

Trebuie remarcat că operația de multiplicare în domeniul frecvență poate să nu corespundă unei operații explicite în domeniul timp, între semnale din L_2, deoarece se poate întîmpla ca un multiplicator H în L_2 să nu aibă preimagine în L_2 (adică să nu existe $f \in L_2$ astfel încît $F_f = H$).

7.9. **Exemple.** 1) Cel mai simplu exemplu de multiplicator este multiplicatorul constant $H(\omega) = H_0$, care corespunde *amplificatorului ideal trece-tot*. Este evident că nu există $f \in L_2$ astfel încît $F_f = H_0$, deoarece altfel ar rezulta $H_0 \in L_2$, absurd. Vom vedea totuși că în sensul distribuțiilor, luînd $f = H_0 \cdot \delta$, avem $F_f = H_0$.

2) Multiplicatorul $H(\omega) = e^{-j\omega t_0}$, $t_0 > 0$ fixat, corespunde *defazorului ideal* din teoria semnalelor. Presupunem că $f_1(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega)$. Semnalul $f_2(t) = f_1(t - t_0)$ are evident proprietatea că $f_2(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_1(\omega) \cdot H(\omega)$, deci defazorul ideal transformă un semnal $f_1(t)$ în translatatul cu t_0 la dreapta. Din nou, $H(\omega) = e^{-j\omega t_0}$ nu are preimagine în L_2 (căci $e^{-j\omega t_0} \notin L_2$), dar va avea în distribuții, anume $\delta(t - t_0)$.

3) Multiplicatorul $H(\omega) = -j\pi \operatorname{sgn} \omega$ corespunde *defazorului ideal cu* $\frac{\pi}{2}$. Acesta nu are preimagine în L_2 și vom vedea că în domeniul timp, acest multiplicator revine la convoluția dintre un semnal $f_1(t)$ și distribuția $\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right)$. Vom vedea de asemenea că

acest multiplicator este strins legat de transformarea Hilbert.

4) Multiplicatorii avînd preimagine în L_2 se mai numesc *regulați*. Exemplele anterioare s-au referit la multiplicatori singulari sau ideali. Dăm un exemplu de multiplicator regulat, luînd $H(\omega) = \sigma(\omega + \omega_0) - \sigma(\omega - \omega_0)$, $\omega_0 > 0$, cu preimaginea $\frac{\omega_0}{\pi}\,\mathrm{Sa}(\omega_0 t)$ [conform observației 7.6, b)]; operația corespunzătoare din domeniul-timp este convoluția dintre funcția de eșantionare Sa și semnalul de intrare. Un alt multiplicator regulat utilizat în mod curent în teoria sistemelor este $H(\omega) = \left.\frac{P(s)}{Q(s)}\right|_{s=j\omega}$, unde P, Q sînt polinoame în $s = \alpha + j\omega$, cu grad Q − grad $P \geqslant 2$ și Q avînd rădăcinile situate în semiplanul $\alpha = \operatorname{Re} s < 0$.

§ 8. Transformarea Fourier a semnalelor-funcție din $\mathcal{S}$

Am văzut că operatorul Fourier aplică spațiul L_2 pe el însuși și, în plus, este un operator unitar; se mai spune că L_2 este închis relativ la operatorul Fourier. Dar L_2 nu este închis relativ la operațiile de derivare sau de înmulțire cu polinoame. Un subspațiu remarcabil al lui L_2 care este închis atît relativ la transformarea Fourier, cît și la operațiile de derivare, convoluție și înmulțire cu polinoame, avînd și alte disponibilități, este spațiul $\mathcal{S}$ al funcțiilor rapid descrescătoare la zero pentru $|t| \to \infty$.

8.1. **Spațiul $\mathcal{S}$.** Reamintim că o funcție $f(t)$, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numește *rapid descrescătoare* dacă este de clasă C^∞ și descrește la zero pentru $|t| \to \infty$ împreună cu toate derivatele, mai repede decît orice putere a lui $1/t$; se verifică imediat că o funcție $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de clasă C^∞ aparține lui $\mathcal{S}$ dacă și numai dacă pentru orice polinom P cu coeficienți în $\mathbb{C}$ și pentru orice număr întreg $n \geqslant 0$, funcția $P(t) \cdot f^{(n)}(t)$ este mărginită pe $\mathbb{R}$. Evident, $\mathcal{S}$ este un spațiu vectorial complex și au loc incluziunile $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$, continue prin șiruri (v. § 2). De asemenea, $\mathcal{S} \subset L_1$ și $\mathcal{S} \subset L_2$ deoarece dacă $f \in \mathcal{S}$, atunci f este măsurabilă și există $M > 0$ constant astfel încît $|(t^2 + 1) \cdot f(t)| \leqslant M$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, deci

$$|f(t)| \leqslant \frac{M}{t^2 + 1}$$

și cum $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + 1} < \infty$, rezultă $f \in L_1$; de asemenea $f^2 \in L_1$, adică $f \in L_2$.

Un exemplu tipic de funcție din $\mathcal{S}$ care nu aparține lui $\mathcal{D}$ este clopotul lui Gauss $f(t) = \exp(-t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Evident, $\exp(-t) \notin \mathcal{S}$ din cauza comportării la $-\infty$ și $\exp(-|t|) \notin \mathcal{S}$, pentru că această funcție nu este de clasă C^∞.

Am definit în formula (2.6) convergență în spațiul $\mathcal{S}$; se poate arăta că aceasta este indusă de o topologie de spațiu Fréchet pe $\mathcal{S}$, definită prin familia numărabilă de seminorme

$$\{p_{h,k}\}_{h,k\geqslant 0},\ p_{h,k}(f) = \|t^h \cdot f^{(k)}(t)\|_{L^2},\ f \in \mathcal{S}.$$

Teorema II.15. a) *Derivarea, înmulțirea cu orice polinom fixat și înmulțirea cu o funcție din $\mathcal{S}$ sînt operatori liniari continui $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$;*
b) *transformarea Fourier*

$$\mathcal{F} : \mathcal{S} \to \mathcal{S},\ f \mapsto F_f,\ F_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

este un izomorfism $\mathbb{C}$-liniar și, în plus, operatorii $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}^{-1}$ sînt continui (deoarece are loc incluziunea $\mathcal{S} \subset L_1 \cap L_2$, cele două accepțiuni pentru imaginea Fourier F_f coincid pentru $f \in \mathcal{S}$);
c) *dacă $f, g \in \mathcal{S}$, atunci $f * g \in \mathcal{S}$ și $F_{fg} = F_f * F_g$, $F_{f*g} = F_f \cdot F_g$.*

Demonstrația acestei teoreme rezultă direct din definiții; pentru detalii trimitem la [5, 27].

8.2. **Multiplicatori în $\mathcal{S}$.** La punctul 7.8 am indicat caracterizarea multiplicatorilor în spațiul L_2. În ceea ce privește multiplicatorii din $\mathcal{S}$, nu orice funcție de clasă C^∞ este multiplicator [de exemplu $\psi(t) = \exp t^2$ nu este multiplicator, deoarece $\exp(-t^2) \in \mathcal{S}$ și $1 \notin \mathcal{S}$]; se poate arăta [27] că multiplicatorii în $\mathcal{S}$ sînt exact funcțiile $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ care sînt de clasă C^∞ și sînt temperate, împreună cu toate derivatele lor.

Reamintim că o funcție $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se numește *temperată* (sau *cu creștere cel mult polinomială*) dacă există o constantă $M > 0$ și $k \geqslant 0$ astfel încît $|\psi(t)| \leqslant M|t|^k$ pentru orice $|t|$ suficient de mare. Exemple tipice de multiplicatori în $\mathcal{S}$ sînt $\psi(t) = \cos t^2$, $\psi(t) = \sin t^2$, polinoamele etc.

§ 9. Transformarea Hilbert a semnalelor-funcție din L_2

Fixăm $K : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ o funcție din L_2, pe care o numim *nucleu*.

Lema 1. *Dacă transformata Fourier a lui $K(t)$ este esențialmente mărginită, atunci pentru orice $f \in L_1 \cap L_2$ există*

$$H_f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) \cdot K(u)\, du, \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}.$$

și este definit un operator $H : L_1 \cap L_2 \to L_2$, $f \mapsto H_f$, mărginit în norma din L_2.

Demonstrație. Conform ipotezei, $F_K(\omega) \in L_\infty$ și fie $M = \operatorname{esssup}_{\omega \in \mathbb{R}} |F_K(\omega)|$. Pentru transformate Fourier are loc atunci relația $\mathcal{F}(H_f) = \mathcal{F}(K) \cdot \mathcal{F}(f)$, deoarece $H_f = K * f$. Deoarece operatorul Fourier păstrează normele, rezultă $\|H_f\|_2 \leqslant M\|f\|_2$.

Deoarece $L_1 \cap L_2$ este dens în L_2, H_f se extinde la un operator mărginit $L_2 \to L_2$.

Lema 2. *Presupunem că funcția K satisface în plus condițiile următoare:*

1) $$|K(t)| \leqslant \frac{M}{|t|},\ \textit{pentru orice } t \neq 0;$$

$$\int_{|t|\geqslant 2|u|} |K(t-u) - K(t)|\, dt \leqslant M \textit{ pentru orice } u \neq 0 \textit{ și}$$

2) $$\int_{r_1 \leqslant |t| < r_2} K(t)\, dt = 0,\ 0 < r_1 < r_2.$$

Atunci funcția g definită prin $g(t) = \begin{cases} K(t), & \text{dacă } |t| \geqslant 1, \\ 0, & \text{dacă } |t| < 1, \end{cases}$

aparține lui L_2 și are transformata Fourier mărginită (adică semnalul g are funcția spectrală mărginită).

Demonstrație. Evident, $g \in L_2$ și g satisface condițiile 1), 2), înmulțind eventual M cu o constantă pozitivă c. Avem

$$F_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, e^{-j\omega}\, dt = I_1 + I_2,$$

unde $I_1 = \int_{|t| < \frac{2\pi}{|\omega|}} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$ și $I_2 = \int_{|t| > \frac{2\pi}{|\omega|}} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$. Conform condiției 2) rezultă

$$\int_{|t| < \frac{2\pi}{|\omega|}} g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \int_{|t| < \frac{2\pi}{|\omega|}} g(t)\, (e^{-j\omega t} - 1)\, dt,$$

deci conform cu 1) avem

$$|I_1| \leqslant c|\omega| \int_{|t| < \frac{2\pi}{|\omega|}} |t|\ |g(t)|\ \mathrm{d}t \leqslant c_1 M.$$

Pentru a evalua I_2 punem $z = -\dfrac{\pi}{\omega}$, deci $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega z} = -1$. Avem

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\frac{2\pi}{|\omega|} < |t| \leqslant R} g(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \lim_{R\to\infty} \int_{\frac{2\pi}{|\omega|} < |t| \leqslant R} [g(t) - g(t-z)]\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t -$$

$$-\frac{1}{2}\int_B g(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t,$$

unde $B \subset \mathbb{R}$ este mulțimea definită prin $\dfrac{2\pi}{|\omega|} \leqslant |t+z|,\ |t| \leqslant \dfrac{2\pi}{|\omega|}$, și cum $B \subset \left\{ \dfrac{\pi}{|\omega|} < |t| \leqslant \dfrac{2\pi}{|\omega|} \right\}$, ultima integrală este mărginită conform ipotezei că $|g(t)| \leqslant \dfrac{cM}{|t|}$. Prima integrală din membrul al doilea se majorează prin

$$\frac{1}{2}\int_{|t| > \frac{2\pi}{|\omega|}} |g(t-z) - g(t)|\,\mathrm{d}t$$

și cum $|z| = \dfrac{\pi}{|\omega|}$, rezultă, conform ipotezei 1) aplicate lui g, că această integrală este mărginită de cM. Deoarece $F_g(\omega) = I_1 + I_2$, rezultă $|F_g(\omega)| \leqslant (c + c_1)M$, $(\forall)\ \omega \in \mathbb{R}$.

Teorema II. 16. *Fixăm $K \in \mathrm{L}_2$ astfel încît transformata ei Fourier să fie esențialmente mărginită (de M) și să fie verificate condițiile din lema 2. Pentru orice funcție $f \in \mathrm{L}_2$ și pentru orice $\varepsilon > 0$ notăm*

$$H_{f,\varepsilon}(t) = \int_{|u| \geqslant \varepsilon} f(t-u)\, K(u)\,\mathrm{d}u.$$

Atunci există $H_f(t) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} H_{f,\varepsilon}(t)$ și este astfel definit un operator mărginit $\mathscr{H}$: $\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2$, $f \mapsto H_f$.

Demonstrație. Observăm că dacă Δ_ε este operatorul de ε-dilatare [definit prin $(\Delta_\varepsilon f)(t) = f(\varepsilon t)$] și dacă $T = K*$ este operatorul de convoluție cu nucleul K, atunci $\Delta_\varepsilon^{-1} \circ T \circ \Delta_\varepsilon$ este operatorul de convoluție cu funcția $\dfrac{1}{\varepsilon} K\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right)$. Această ultimă funcție satisface de asemenea condițiile 1), 2), cu aceleași constante. Notînd $K_1(t) = \varepsilon K(\varepsilon t)$, conform lemei 2, funcția

$$g_1(t) = \begin{cases} K_1(t), & \text{dacă } |t| \geqslant 1, \\ 0, & \text{dacă } |t| < 1, \end{cases}$$

are transformata Fourier mărginită, $|F_{g_1}(\omega)| \leqslant (c + c_1)M$, $(\forall)\omega \in \mathbb{R}$. Notăm

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} K(t), & \text{dacă } |t| \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{dacă } |t| < \varepsilon, \end{cases} \qquad \varepsilon > 0.$$

Atunci $g_\varepsilon(t) = \dfrac{1}{\varepsilon} g_1\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right)$ și $F_{g_\varepsilon}(\omega) = F_{g_1}(\varepsilon\omega)$, deci transformata Fourier a lui g_ε este esențialmente mărginită. Conform lemei 1, cum $g_\varepsilon \in \mathrm{L}_2$, este definit pentru orice $\varepsilon > 0$, cîte un operator mărginit $\mathrm{L}_2 \to \mathrm{L}_2$ care asociază oricărei funcții $f \in \mathrm{L}_2$ funcția

$$t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\, g_\varepsilon(u)\,\mathrm{d}u = \int_{|u| \geqslant \varepsilon} f(t-u)\, K(u)\,\mathrm{d}u.$$

Demonstrația se încheie observînd că $\mathscr{D}$ fiind dens în L_2, putem presupune că $f \in \mathscr{D}$ și atunci

$$H_{f,\varepsilon}(t) = \int_{|u| \geqslant \varepsilon} f(t-u) K(u)\,\mathrm{d}u = \int_{|u| \geqslant 1} f(t-u)\, K(u)\mathrm{d}u +$$

$$+ \int_{\varepsilon \leqslant |u| < 1} [f(t-u) - f(t)]\, K(u)\,\mathrm{d}u$$

conform cu 2); prima integrală este funcție din L_2 (convoluție a unei funcții $K \in \mathrm{L}_2$ cu o funcție din $\mathscr{D}$) iar cea de-a doua integrală

are suport compact și converge uniform în raport cu t pentru $\varepsilon \to 0$, deoarece f fiind derivabilă, avem $|f(t-u)-f(t)| \leqslant D|u|$ cu $D>0$. În concluzie, funcția $H_{f,\varepsilon}$ converge în norma din L_2 pentru $\varepsilon \to 0$.

9.1. **Exemplu.** Exemplul tipic de funcție-nucleu satisfăcînd condițiile 1), 2) este $K(t)=\frac{1}{\pi t}$, $t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. În acest caz sînt îndeplinite condițiile teoremei II.16 și deci pentru orice funcție $f \in L_2$ se poate introduce funcția H_f din L_2, definită prin

$$H_f(t)=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|u|\geqslant\varepsilon}\frac{f(t-u)}{u}\,du=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t-u)}{u}\,du=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-t}\,dt.$$

Dacă $f \in L_1$, această funcție poate să nu aparțină lui L_1; de aceea cadrul natural al teoriei transformării Hilbert este L_2.

9.2. **Definiție.** Pentru orice semnal $f \in L_2$, semnalul $H_f \in L_2$ definit prin

$$H_f(t) \overset{\Delta}{=} -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-t}\,dx=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t-u)}{u}\,du \qquad (2.63)$$

se numește *transformata Hilbert a lui* f.

Operatorul $\mathscr{H}: L_2 \to L_2$, $f \mapsto H_f$ se numește *transformarea Hilbert în* L_2.

9.3. **Observații.** Indicăm succint o altă direcție de cercetare care a impus studiul transformării Hilbert.

Fie $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție din L_1, derivabilă, cu valori reale și satisfăcînd condițiile teoremei II.10, (b). Introducem notațiile

$$a(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt, \qquad b(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt. \qquad (2.64)$$

Atunci conform formulei (2.57) se obține

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}e^{j\omega t}\,d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-j\omega u}\,du=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{j\omega(t-u)}\,du=\frac{1}{2\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\cos\omega(t-u)\,du,$$

deoarece f are valori reale. Așadar, are loc reprezentarea

$$f(t)=\int_0^{\infty}[a(\omega)\cos\omega t+b(\omega)\sin\omega t]d\omega.$$

Considerăm de asemenea funcția

$$g(t)=\int_0^{\infty}[-a(\omega)\sin\omega t+b(\omega)\cos\omega t]\,d\omega$$

și, ținînd seama de (2.64), se obține

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\omega\int_{-0}^{\infty}f(u)\sin(u-t)\,\omega\,du=\frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_0^{A}d\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\sin(u-t)\,\omega\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)\,\frac{1-\cos A(u-t)}{u-t}\,du=\frac{1}{\pi}\lim_{A\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos Ax}{x}\cdot f(t+x)dx=$$

$$=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos Ax}{x}\cdot[f(t+x)-f(t-x)]\,dx.$$

Aplicînd teorema Riemann-Lebesgue și faptul că f este derivabilă, rezultă

$$g(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{f(t+x)-f(t-x)}{x}\,dx=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\,\varepsilon>0}\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(t+u)-f(t-u)}{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\,\varepsilon>0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{f(t+u)}{u}\,du+\int_{\varepsilon}^{\infty}\frac{f(t+u)}{u}\,du\right]=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\,\varepsilon>0}\int_{|u|\geqslant\varepsilon}\frac{f(t+u)}{u}\,du=$$

$$=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{x-t}\,dx.$$

Așadar, $g(t)=-H_f(t)$. Similar se probează că $f(t)=H_g(t)$ și funcțiile f, g se numesc *conjugate*. Această terminologie este justificată și prin aceea că dacă funcția complexă

$$\Phi(z)=\int_0^{\infty}[a(\omega)-jb(\omega)]e^{j\omega z}\,d\omega, \qquad z\in\mathbb{C},\ z=x+jy,$$

este olomorfă, atunci $f(t)=(\mathrm{Re}\Phi)(t,0)$ și $g(t)=-(\mathrm{Im}\Phi)(t,0)$, $(\forall)\,t\in\mathbb{R}$.

Proprietățile principale ale transformării Hilbert sînt concentrate în

Teorema II.17. (a) *Operatorul Hilbert* $\mathscr{H} : L_2 \to L_2$ *este un izomorfism* $\mathbb{C}$*-liniar unitar (adică păstrează produsele scalare) și în plus* $\mathscr{H}^2 = -\mathrm{id}$; *în particular,* $\mathscr{H}^{-1} = -\mathscr{H}$ *și* $\mathscr{H}^4 = \mathrm{id}$.

(b) *Pentru orice* $f \in L_2$, *au loc relațiile*

$$H_f(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{VP}\,\frac{1}{t} * f, \quad f(t) = -\frac{1}{\pi} H_f * \mathrm{VP}\,\frac{1}{t}.$$

(c) *Transformata Fourier a lui* H_f *este egală cu* $\mathrm{j}\cdot\operatorname{sgn}\omega\cdot F_f(\omega)$, $f \in L_2$.

(d) *Dacă* $\varepsilon > 0$, *atunci* $H \circ \Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon \circ H$ *și dacă* $\varepsilon < 0$, *atunci* $H \circ \Delta_\varepsilon = -\Delta_\varepsilon \circ H$, *unde* Δ_ε *este operatorul de* ε*-dilatare* $f(t) \mapsto f(\varepsilon t)$.

Singurul punct mai dificil al demonstrației este faptul că H este operator unitar. Afirmația (b) rezultă direct din definiția (2.63) și din definiția (5.7) a convoluției. Punctul (c) este o consecință a lui (b) și a faptului că transformata Fourier a convoluției este produsul transformatelor Fourier. Verificarea punctului (d) este directă: dacă $\varepsilon > 0$ și $f \in L_2$, atunci $(H \circ \Delta_\varepsilon)f(t) = H(f(\varepsilon t)) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\varepsilon t - \varepsilon u)}{u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_{|u|>\varepsilon} \frac{f(\varepsilon t - \varepsilon u)}{u}\,\mathrm{d}u$ și notînd $\varepsilon u = v$, rezultă

$$(H \circ \Delta_\bullet)f(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0,\varepsilon>0}\int_{|v|>\varepsilon^2} \frac{f(\varepsilon t - v)}{v}\,\mathrm{d}v = H_{f(\varepsilon t)} = (\Delta \circ H_{\varepsilon f})(t).$$

Detalii de demonstrație pot fi găsite în [15, 24].

În § 5 am indicat caracterizarea operatorului de convoluție printre operatorii liniari continui $\mathscr{D} \to \mathscr{E}$ sau $\mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$, anume ca fiind invariant la translații în timp (teoremele II.3 și II.5). Există o caracterizare a operatorului Hilbert printre operatorii liniari mărginiți $L_2 \to L_2$, anume este singurul operator (pînă la un scalar multiplicativ) care comută cu translațiile $f \mapsto T_\tau f$, cu simetriile $f \to \check{f}$ și cu ε-dilatările [24].

Vom da mai tîrziu unele aplicații fizice ale transformării Hilbert și vom studia analogul ei discret.

C. TRANSFORMĂRI INTEGRALE ALE DISTRIBUȚIILOR

Multe din clasele uzuale de funcții (de exemplu L_1^∞, $\mathscr{S}$, funcțiile temperate etc.) pot fi privite ca distribuții, iar cadrul distribuțional este cel firesc pentru teoria transformării Fourier, nu numai pentru

matematician. Funcțiile constante, funcțiile în scară, polinoamele, semnalul unitate σ etc. nu aparțin nici lui L_1, nici lui L_2 și nici lui $\mathscr{S}$, deci transformarea Fourier a lor nu există în sensul uzual al formulei (2.55). De exemplu, pentru orice $R > 0$ avem

$$\int_{-R}^{R} \sigma(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t = \frac{1 - \mathrm{e}^{-R\mathrm{j}\omega}}{\mathrm{j}\omega}$$

și limita cînd $R \to \infty$ nu există. Totuși astfel de funcții apar frecvent în considerații teoretice sau practice, apar în natură și se cer prelucrate matematic. Dacă primul gînd ar fi să renunțăm la a le îngloba în circuitul analizei spectrale, următorul gînd este de a încerca o lărgire a cadrului definiției transformării Fourier, părăsind punctul de vedere al formulei (2.55). Sensul deplin al conceptului de semnal și de transformare Fourier se obține prin considerarea dualului spațiului $\mathscr{S}$.

§ 10. Noțiunea generală de semnal; transformarea Fourier în $\mathscr{S}'$

10.1. **Definiție.** Se numesc *distribuții temperate* funcționalele liniare și continue (prin șiruri) $\mathscr{S} \to \mathbb{C}$ și se notează cu $\mathscr{S}'$ spațiul $\mathbb{C}$-liniar al distribuțiilor temperate.

Deoarece $\mathscr{D}$ este un subspațiu dens al lui $\mathscr{S}$, rezultă că $\mathscr{S}' \subset \mathscr{D}'$ și distribuțiile temperate sînt exact acele distribuții din $\mathscr{D}'$ care admit o prelungire continuă de la $\mathscr{D}$ la $\mathscr{S}$. Reamintim de asemenea că $\mathscr{E}' \subset \mathscr{S}'$ (vezi exemplele 2.3).

Proprietățile principale ale spațiului $\mathscr{S}'$ sînt cuprinse în teorema care urmează.

Teorema II.18. (L. Schwartz). (a) *Spațiul* $\mathscr{S}'$ *este complet* [*în sensul că dacă un șir* $\{f_n\}_{n\geq 1}$ *de distribuții din* $\mathscr{S}'$ *are proprietatea că există* $\lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi\rangle$ *pentru orice* $\varphi \in \mathscr{S}$, *atunci asocierea* $\mathscr{S} \to \mathbb{C}$, $\varphi \mapsto \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \varphi\rangle$ *este o distribuție din* $\mathscr{S}'$].

(b) *Următoarele operații sînt aplicații* $\mathbb{C}$*-liniare și continue* $\mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$:

— *derivarea de orice ordin* $n \geq 0$ (*dacă* $f \in \mathscr{S}'$, *atunci* $\mathrm{D}^n f \in \mathscr{S}'$);

— *schimbarea de variabilă afină* (*daca* $f \in \mathscr{S}'$ *și* a, b *sînt constante reale sau complexe,* $a \neq 0$, *atunci* $f(at + b) \in \mathscr{S}'$);

— *înmulțirea cu funcții de clasă* C^∞, *temperate.*

(c) *Multiplicatorii în $\mathcal{S}'$ sînt exact funcţiile de clasă C^∞, temperate împreună cu derivatele lor (ca şi multiplicatorii în $\mathcal{S}$).*

(d) *Orice distribuţie temperată are ordin finit.*

(e) *Pentru orice distribuţie temperată $f \in \mathcal{S}'$ există o funcţie continuă şi temperată $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi un număr întreg $n \geqslant 0$ astfel încît $f = D^n h$.*

Demonstraţia completă poate fi găsită în [20, 27]. Punctul (e) indică structura distribuţiilor temperate, ca fiind tocmai derivatele distribuţionale ale funcţiilor continue temperate. Se poate dealtfel arăta că $\mathcal{S}'$ este într-un anumit sens cel mai mic spaţiu de distribuţii care conţine funcţiile continue temperate, în care este posibilă derivarea. De exemplu, considerînd funcţia continuă şi temperată $f(t) = t\,\sigma(t)$, atunci $\underline{\sigma} = f'$, $\delta = f''$, $\delta^{(k)} = D^{(k+2)} f$, $k \geqslant 1$, sînt distribuţii din $\mathcal{S}'$.

10.2. **Exemple.** Dăm o listă de distribuţii temperate, din care va reieşi importanţa practică a acestei noţiuni, alături de disponibilităţile teoretice şi de calcul subliniate în teorema II.18.

a) Orice funcţie temperată $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ aparţine lui $\mathcal{S}'$. Într-adevăr există $M > 0$, $n \geqslant 0$ astfel încît $|f(t)| \leqslant M(1 + |t|)^n$ pentru orice $|t|$ suficient de mare. Atunci pentru orice $\varphi \in \mathcal{S}$ va rezulta că există $M_1 > 0$ astfel încît $|\varphi(t)| \leqslant M_1(1 + |t|)^{-n-2}$, pentru orice $|t|$ suficient de mare, deci $f \cdot \varphi \in L_1$. Are atunci sens funcţionala

$$\underline{f} : \mathcal{S} \to \mathbb{C}, \qquad \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

şi aceasta defineşte o distribuţie din $\mathcal{S}'$; în plus, asocierea $f \mapsto \underline{f}$ este injectivă, deci funcţia f se identifică cu distribuţia temperată $\underline{f}$.

În particular, constantele, σ, sgn, funcţiile continue mărginite, polinoamele, funcţiile spline etc. pot fi considerate ca elemente din $\mathcal{S}'$.

Nu orice distribuţie regulată din $\mathcal{S}'$ provine dintr-o funcţie temperată; de exemplu, funcţia $g(t) = e^t \cos e^t$ nu este temperată, dar $\underline{g} = D(\sin e^t)$ este derivata unei funcţii continue temperate, deci $\underline{g} \in \mathcal{S}'$, conform teoremei II.18 ,(b).

b) Cu aceeaşi demonstraţie ca în exemplul precedent rezultă că $L_1 \subset \mathcal{S}'$. În particular, $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$ şi se poate proba că $\mathcal{S}$ este dens în $\mathcal{S}'$. Avem de asemenea $L_2 \subset \mathcal{S}'$. Ştim deja că $L_1^{loc} \subset \mathcal{D}'$, totuşi $L_1^{loc} \not\subset \mathcal{S}'$ (căci funcţia $f(t) = e^t$ este continuă, deci din L^{1loc} dar distribuţia $\underline{f}$ nu aparţine lui $\mathcal{S}'$).

c) Am văzut că $\underline{\sigma}$, δ, δ', δ'' etc. sînt distribuţii temperate şi că orice distribuţie cu suport compact este temperată. Dacă $f \in \mathcal{S}'$, atunci f', f'', ... aparţin lui $\mathcal{S}'$. Funcţia $h(t) = t \ln|t| - t$ este continuă şi temperată, deci aparţine lui $\mathcal{S}'$; atunci $h''(t) = \mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right)$ aparţine de asemenea lui $\mathcal{S}'$ şi, mai general, pentru orice număr întreg $n \geqslant 1$, $\mathrm{PF}\left(\frac{1}{t^n}\right)$ este o distribuţie temperată.

d) Fie $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ un şir de numere reale sau complexe astfel încît să existe $M > 0$, $p \geqslant 0$ cu proprietăţile că $|a_k| \leqslant M|k|^p$, $(\forall) k \in \mathbb{Z}$. Dacă notăm cu $f(t)$ suma seriei de distribuţii $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \delta(t - k)$, atunci $f \in \mathcal{S}'$ (într-adevăr, $(\forall)\varphi \in \mathcal{S}$ avem $|\langle f, \varphi\rangle| = M \sum_{k \in \mathbb{Z}} |k^p \varphi(k)|$ şi seria este convergentă deoarece $t^p \varphi(t) \in \mathcal{S}$; în plus, dacă $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$, atunci $\langle f, \varphi_n\rangle \xrightarrow{\text{în } \mathbb{C}} 0$, pentru $n \to \infty$). Dar distribuţia $f = \sum_{k \geqslant 0} \exp k^2 \cdot \delta(t - k)$ nu aparţine lui $\mathcal{S}'$.

10.3. Convoluţia distribuţiilor temperate. O întrebare firească este următoarea: dacă f şi g sînt distribuţii temperate, în ce condiţii există distribuţia $f * g$ şi este temperată? Răspunsul este afirmativ în cîteva situaţii [27]:

— Dacă una din distribuţii, de exemplu g, are suport compact, atunci $f * g \in \mathcal{S}'$; în plus $\langle f * g, \varphi\rangle = \langle f(x) \times g(y), \eta(y)\varphi(x + y)\rangle$, $(\forall)\varphi \in \mathcal{S}$, unde $\eta \in \mathcal{D}$ şi $\eta = 1$ într-o vecinătate a lui supp g.

— Dacă $f \in \mathcal{S}'$ şi $h \in \mathcal{S}$, atunci $f * h \in \mathcal{S}'$ şi $\langle f * h, \varphi\rangle = \langle f, h * \check{\varphi}\rangle$, $(\forall)\varphi \in \mathcal{S}$.

— Dacă f, g au suport pozitiv, atunci $f * g \in \mathcal{S}'$ etc.

Putem da acum conceptul cel mai general acceptabil de semnal, cuprinzînd toate cazurile particulare semnificative.

10.4. Definiţie. Se numeşte *semnal* orice element din $\mathcal{S}'$. Semnalele de acest tip se mai numesc *deterministice*.

Funcţiile din L_1, L_2, $\mathcal{S}$, $\mathcal{D}$, polinoamele de orice grad, funcţiile continue temperate, σ, δ, $\delta^{(k)}$ etc. sînt semnale în accepţiunea anterioară. Aşa cum am mai remarcat, spaţiul $\mathcal{S}'$ are disponibilităţi corespunzătoare prelucrării semnalelor (teorema II.18), dar proprietatea principală se referă la trasformarea Fourier în $\mathcal{S}'$, studiată în paragraful următor.

10.5. Transformarea Fourier a distribuţiilor din $\mathcal{S}'$. Dacă $f \in \mathcal{S}'$, primul gînd în definirea transformării Fourier a lui f ar fi de considerat $\langle f(t), e^{-j\omega t}\rangle$, dar această operaţie nu are sens, deoarece funcţia $t \mapsto e^{-j\omega t}$ nu aparţine lui $\mathcal{S}$.

Se numeşte *transformare Fourier directă a unui semnal* $f \in \mathcal{S}'$ distribuţia $F[f]$ definită prin

$$\langle F[f], \varphi\rangle \overset{\Delta}{=} \langle f, F_\varphi\rangle, \ (\forall)\varphi \in \mathcal{S}, \tag{2.65}$$

unde F_φ este transformata Fourier uzuală a lui φ [se ştie că dacă $\varphi \in \mathcal{S}$, atunci $\varphi \in L_1$ şi $F_\varphi \in \mathcal{S}$, conform teoremei II.15, (b)].

Facem convenţia ca în cazul transformării Fourier a distribuţiilor să scriem $F[f]$ în loc de F_f.

10.6. **Observație.** Presupunînd că $f \in L_1$ și privind transformata Fourier $F_f(\omega)$ ca distribuție regulată, rezultă formal că dacă φ este o funcție-test, atunci

$$\langle F_f(\omega), \varphi(\omega)\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) F_f(\omega)\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)\, d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t}\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega) e^{-j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, F_\varphi(t)\, dt = \langle f(t), F_\varphi(t)\rangle,$$

ceea ce sugerează definiția (2.65). Sensul cuvîntului „formal" este acela că dacă $\varphi \in \mathcal{D}$, nu avem $F_\varphi \in \mathcal{D}$ decît dacă $\varphi = 0$ (căci altfel, F_φ ar fi funcție analitică cu suport compact !), deci $\mathcal{D}$ nu este un spațiu bun de funcții-test pentru a defini transformarea Fourier. Dar dacă $\varphi \in \mathcal{S}$, atunci calculele anterioare sînt justificate.

Teorema II.19. *Dacă $f \in \mathcal{S}'$, atunci $F[f] \in \mathcal{S}'$ și operatorul $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, $f \mapsto F[f]$ este un izomorfism $\mathbb{C}$-liniar și $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ sînt continue. În plus, $F^{-1}[f]$ este distribuția definită prin*

$$\langle F^{-1}[f], \varphi\rangle \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2\pi} \langle f, F_{\check{\varphi}}\rangle, \quad (\forall)\varphi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}$$

Demonstrație. Faptul că $F[f]$ aparține spațiului $\mathcal{S}'$ este imediat, folosind liniaritatea și continuitatea transformării Fourier $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$. De asemenea se verifică imediat că operatorul $F : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ este $\mathbb{C}$-liniar și continuu. Definind $F^{-1}[f]$ ca mai sus, asocierea $f \mapsto F^{-1}[f]$ este o aplicație $\mathbb{C}$-liniară și continuă $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Este suficient de probat că $F^{-1}[F[f]] = f$ și $F[F^{-1}[f]] = f$, $(\forall) f \in \mathcal{S}'$; se observă însă că aceste relații au loc $(\forall) f \in \mathcal{S}$, iar $\mathcal{S}$ este dens în $\mathcal{S}'$.

Trebuie reținut totodată că $(\forall) f \in \mathcal{S}'$, $F[F[f]] = 2\pi \check{f}$. Proprietățile principale ale transformării Fourier în $\mathcal{S}'$ sînt concentrate în

Teorema II.20. a) *Pentru orice $f \in \mathcal{S}'$ și $(\forall) n \geqslant 0$, $D^n F[f] = F[(-jt)^n f]$, $F[D^n f] = (j\omega)^n F[f]$;*

b) $F[f(t - t_0)] = e^{-jt_0\omega} F[f]$, $F[f](\omega + \omega_0) = F[e^{-j\omega_0 t} f](\omega)$, $(\forall) f \in \mathcal{S}'$, $(\forall) t_0, \omega \in \mathbb{R}$;

c) *Dacă $f, g \in \mathcal{S}'$, una fiind în $\mathcal{E}'$, atunci $F[f * g] = F[f] \cdot F[g]$.*

Pentru orice distribuție $f \in \mathcal{E}'$, $F[f]$ este regulată, anume $F[f](\omega) = \langle f(t), e^{-j\omega t}\rangle$, $\omega \in \mathbb{R}$; într-adevăr, $e^{j\omega t} \in \mathcal{E}$ și $(\forall)\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\langle F[f](\omega), \varphi(\omega)\rangle = \langle f(t), F_\varphi(t)\rangle = \langle f(t), \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\omega)\, e^{-j\omega t}\, d\omega\,\rangle =$$

$$= \langle f(t) \times \varphi(\omega), e^{-j\omega t}\rangle = \langle\langle f(t), e^{-j\omega t}\rangle, \varphi(\omega)\rangle.$$

Similar, dacă $f \in \mathcal{S}'$ și $F[f] \in \mathcal{E}'$, atunci distribuția f este regulată.

10.7. **Exemple.** a) Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție temperată, atunci $\sigma(R - |t|) f(t) \xrightarrow{\mathcal{S}'} f(t)$ pentru $R \to \infty$ și folosind continuitatea transformării Fourier în $\mathcal{S}'$, rezultă

formula

$$F_f(\omega) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \text{ în } \mathcal{S}' \tag{2.66}$$

(de comparat cu cazul cînd $f \in L_2$). Fie $f(t) = e^{j\omega_0 t}$ ($\omega_0 \in \mathbb{R}$ constant) ; atunci

$$F[f](\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) ; \tag{2.67}$$

într-adevăr, aplicînd (2.66) și observînd că

$$\int_{-R}^{R} e^{j\omega_0 t}\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{2\sin R(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0},$$

trebuie arătat că $\dfrac{\sin R(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0} \xrightarrow{\mathcal{S}'} \pi\delta(\omega - \omega_0)$ pentru $R \to \infty$. Cum $\mathcal{D}$ este dens în $\mathcal{S}$, este suficient de probat că

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Rt}{t} \varphi(t)\, dt = \pi\varphi(0), \quad (\forall)\varphi \in \mathcal{D},$$

ceea ce s-a făcut în exemplul 4.3, (d). Pentru $\omega_0 = 0$ se obține direct

$$F[1] = 2\pi\delta. \tag{2.68}$$

b) Folosind (2.66), se verifică direct că

$$F[\sigma] = \pi\delta(\omega) - jVP\,\frac{1}{\omega}, \quad F[\check{\sigma}] = \pi\delta(\omega) + jVP\,\frac{1}{\omega}. \tag{2.69}$$

În particular, $F[\operatorname{sgn} t] = F[\sigma - \check{\sigma}] = -2j\,VP\,\dfrac{1}{\omega}$ și, prin inversare,

$$F\left[VP\,\frac{1}{t}\right] = 2\pi F^{-1}\left[VP\,\frac{1}{t}\right] = -\pi j \operatorname{sgn}\omega.$$

c) Din formula (2.68), prin inversare, rezultă $F[\delta] = 1$, ceea ce se deduce și din 2.65). Din teoremele II.19, II.20 rezultă

$$F[\delta^{(k)}] = (j\omega)^k, \quad F^{-1}[\delta^{(k)}] = (-j\omega)^k, \quad F[\delta(t - t_0)] = e^{-jt_0\omega},$$

$$F[t^k] = \frac{2\pi}{(-j)^k}\,\delta^{(k)}(\omega), \quad F^{-1}[t^k] = \frac{1}{j^k}\,\delta^{(k)}(\omega), \quad (\forall) k \geqslant 0, (\forall) t_0 \in \mathbb{R}.$$

d) Distribuția $f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - nT)$, $T > 0$, are transformata Fourier

$$F[f](\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right), \tag{2.70}$$

fapt utilizat în probleme de eșantionare. Într-adevăr, conform cu (2.35),

$$F[f](\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F[\delta(t - nT)](\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-jnT\omega} F[\delta] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-jnT\omega} =$$

$$= \frac{2\pi}{T} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right).$$

Aceste exemple se adaugă la tabelul dat la 7.2. Se probează fără dificultate că pentru $f(t) = \cos \omega_0 t$, $\omega_0 > 0$, avem

$$F[f](\omega) = \pi[\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)],$$

iar pentru $f(t) = \sin \omega_0 t$, $\omega_0 > 0$, $F[f](\omega) = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$. Remarcăm de asemenea că dacă $f \in \mathscr{S}'$ are transformata Fourier $F(\omega)$, atunci $f(at + b)$, a, b constante, $a \neq 0$, are transformata $\frac{1}{|a|} e^{j\frac{b}{a}\omega} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$, iar semnalul modulat în amplitudine $f(t) \cos \omega_0 t$, $\omega_0 > 0$, are spectrul $\frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$.

§ 11. Transformarea Laplace a distribuțiilor

În anumite considerații, transformarea Laplace (definită în § 6 pentru clasă suficient de restrictivă, anume Ω) trebuie extinsă la distribuții; această extindere este utilizată, de exemplu, în studiul ecuației undelor [28].

11.1. **Definiție.** Fie $\mathscr{D}_1'$ spațiul distribuțiilor $f \in \mathscr{D}'$ nule în intervalul $(-\infty, 0)$ astfel încît să existe $a \in \mathbb{R}$ cu proprietatea că $g(t) = f(t)\, e^{-at}$ aparține lui $\mathscr{S}'$, oricare ar fi $\alpha > a$. Pentru orice distribuție $f \in \mathscr{D}_1'$ se numește *transformata Laplace a lui* f distribuția temperată $F(s)$ definită prin

$$F(s) = F[g](\omega),\ s = \alpha + j\omega.$$

Se mai scrie $F = \mathscr{L}[f]$ sau $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$, $\alpha > a$.

Dacă f este o distribuție regulată (asociată unei funcții din Ω), atunci g este de asemenea regulată și

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\alpha t} e^{-j\omega t}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st}\, dt,$$

regăsind astfel definiția (2.53).

Dacă $f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s)$, atunci $(-t)^k f(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} F^{(k)}(s)$, $f^{(k)}(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} s^k F(s)$, $k \geqslant 0$,

$$f(t)e^{\lambda t} \xrightarrow{\mathscr{L}} F(s - \lambda),\quad f(at) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right),\ a > 0,$$

$$f(t - \tau) \xrightarrow{\mathscr{L}} e^{-\tau s} F(s),\qquad \sigma(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s},\qquad \delta(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} 1,$$

$$\delta^{(k)}(t - \tau) \xrightarrow{\mathscr{L}} s^k e^{-\tau s},\ \tau \geqslant 0,\ k \geqslant 0,\quad \sigma(t) e^{j\omega t} \xrightarrow{\mathscr{L}} \frac{1}{s - j\omega} \text{ etc.}$$

Se poate arăta că distribuția $F(s) = F[f(t)e^{-\alpha t}](\omega)$ este o funcție olomorfă de $s = \alpha + j\omega$, în semiplanul $\operatorname{Re} s > a$ și se pot caracteriza funcțiile olomorfe de acest tip, obținîndu-se implicit o formulă de inversare [27].

11.2. **Definiție.** Fie $f : (0, \infty) \to \mathbb{C}$ o funcție astfel încît

$$|f(t)| \leqslant M_1 t^{-\alpha} \text{ dacă } 0 < t < 1 \text{ și } |f(t)| \leqslant M_2 t^{-\beta} \text{ dacă } t > 1$$

cu M_1, $M_2 > 0$ și $\alpha < \beta$ constante convenabile.

Se numește *transformata Mellin a lui* f funcția complexă

$$F(s) = \int_0^{\infty} t^{s-1} f(t)\, dt.$$

(Se verifică imediat că $t^{s-1} f(t) \in L(0, \infty)$ și că $F(s)$ este olomorfă în banda $\alpha < \operatorname{Re} s < \beta$.)

Așa cum transformarea Laplace este legată de ecuațiile diferențiale cu coeficienți constanți $P(D_t)x = b(t)$, tot astfel transformarea Mellin se aplică ecuațiilor diferențiale de tip Euler

$$t^n x^{(n)} + a_1 t^{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = b(t),$$

adică $P(tD_t)\, x = b(t)$, cu P polinom și $D_t = \dfrac{d}{dt}$. Transformarea Mellin se poate extinde la anumite clase de distribuții [28].

Indicăm pe scurt cîteva proprietăți ale transformării Mellin. Dacă $f(t) \overset{\mathcal{M}}{\to} F(s)$, atunci $f(at) \overset{\mathcal{M}}{\to} \dfrac{F(s)}{a^s}$, $a > 0$, și $t^\alpha f(t) \overset{\mathcal{M}}{\to} F(s + \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ și, în plus, dacă $f'(t)$ este original, atunci $f'(t) \overset{\mathcal{M}}{\to} -(s-1)F(s-1)$. În fine, dacă $t^s f(t) \to 0$ pentru $t \to 0$ și pentru $t \to \infty$, atunci $tf'(t) \overset{\mathcal{M}}{\to} -sF(s)$.

11.3. **Exemplu.** Considerăm un circuit constînd dintr-o inductanță variabilă în timp $L(t) = t$ și o rezistență constantă $R = 1$. Presupunem că tensiunea la capete este nulă pînă la un moment $t = t_0 > 0$ și vrem să determinăm curentul $i(t)$ care apare după alimentarea cu tensiune $v(t)$. Legile lui Kirchhoff conduc la ecuația

$$v = \frac{d}{dt}(Li) + Ri = t\frac{di}{dt} + 2i.$$

Dacă $V(s)$ este transformata Mellin a lui $v(t)$ și $I(s)$ a lui $i(t)$, $t \geqslant t_0$, obținem ecuația $V(s) = -sI(s) + 2I(s)$, deci $I(s) = -\dfrac{V(s)}{s-2}$ etc.

Ne oprim aici cu prezentarea transformărilor integrale ale funcțiilor și distribuțiilor. Nu am făcut decît o introducere într-un capitol vast, din care am omis, printre altele, transformările Hankel (cu aplicații în probleme fizice cu simetrie axială), K-transformările (care au aplicații la rețele electrice cu parametri variabili) etc. [8, 28], după cum nu am tratat cazul multidimensional. Aspecte de matematică discretă legată de transformările integrale vor fi discutate în capitolul următor.

BIBLIOGRAFIE

1. Antosik, P, Mikusinski, J., Sikorski, R. *Teoria obobșcionnth funkțit.* Moscova, Mir, 1976.
2. Arnold, V. I. *Ecuații diferențiale ordinare.* București, Editura științifică și enciclopedică, 1978.
3. Bănică, C., Stănășilă, O. *Metode algebrice în teoria globală a spațiilor complexe.* București, Editura Academiei RSR, 1974; Londra, New York, J. Wiley, 1976; Paris, Gauthier Vilars, 1977.
4. Beltrami, E. J., Wohlers, M. R. *Distributions and the boundary values of analytic functions.* New York, Academic press, 1966.
5. Bremerman, H. *Distributions, complex variables and Fourier transforms,* Massachusetts, Addison-Wesley, 1965.
6. Cristescu, R., Marinescu, Gh. *Applications of the theory of distributions.* București, Editura Academiei RSR, 1966; Londra, New York, J. Wiley, 1973.
7. Franks, L. E. *Signal theory.* New Jersey, Prentice Hall, 1969.
8. Gavrilă, H. *Transient electromagnetic fields in the serromagnetic fields,* În: Revue Roum. de Sciences techniques, Electrot-Energ, 21, Nr. 2, 1976, pp. 159—165.
9. Ghelfand, I. M., Șilov, G. E. *Les distributions* I. Paris, Dunod, 1962.
10. Gussi, Gh. *Itinerar în analiza matematică,* București, Editura Albatros, 1972.
11. Jurchescu, M. *Analiză complexă* (note de curs), București, 1976.
12. Halanay, A. *Ecuații diferențiale.* București, Editura didactică și pedagogică, 1972.
13. Hille, E., Phillips, S. R. *Functional analysis on semigroups.* Providence, American math. soc. coll, publ., 1957.
14. Henrici, P. *Applied and computational complex analysis* II. New York, Wiley Interscience, 1977.
15. Kneazev, P. N. *Integralnie preobrazovaniia,* Minsk, Izd. Vîssaia școla, 1966.
16. Maslov, V. P. *Operational methods.* Moscova, Mir Publishers, 1976.
17. Nicolescu, M. *Funcții reale și elemente de analiză funcțională,* București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
18. Nussenzveig, H. M. *Causality and dispersion relations.* New York, Academic Press, 1972.
19. Paley R. E. A., Wiener, N. *Fourier transforms in the complex domain.* New York, Amer. Math. soc., 1934.
20. Schwartz, L. *Théorie des distributions.* Paris, Hermann, 1966.
21. Stanomir, D. *Unele aspecte ale teoremei simetriei din teoria integralei Fourier.* În: Telecomunicații, Nr. 1, 1969, 34—39.
22. Stanomir, D., Stănășilă, O. *Elemente de teoria matematică a semnalelor.* București, Lit. IPB, 1977.
23. Stănășilă, O. *Analiză matematică.* București, Lit. IPB, 1976.
24. Stein, E. *Singular integrals and differentiability properties of functions,* Princeton, Princeton, Univ. Press, 1970.
25. Șabac. Gh. I. *Matematici speciale,* II. București. Editura didactică și pedagogică, 1965.
26. Teodorescu, N., Olariu, V. *Ecuațiile fizicii matematice.* București, Editura didactică și pedagogică, 1975.
27. Vladimirov, V.S. *Obobșcionnte funkții v matematiceskoi fizike.* Moscova, Nauka, 1976.
28. Zemanian, A. H. *Generalized integral transformations.* New York, Interscience Publishers, 1969.

CAPITOLUL III

STUDIUL SEMNALELOR DISCRETE

A. TRANSFORMĂRI ALE SEMNALELOR DISCRETE

Studiul reprezentărilor digitale (adică prin șiruri de numere sau simboluri) ale semnalelor a avut o dezvoltare impetuoasă în ultimul timp, prin obținerea unor algoritmi puternici de calcul în analiza spectrală, bazați pe concepte din domeniul frecvență. Astfel, prin algoritmul de transformare Fourier rapidă (TFR) s-a obținut un instrument extrem de util în prelucrarea semnalelor în timp sau în frecvență, cu o viteză considerabilă de calcul, cu o reducere substanțială a numărului de operații și acest fapt explică de ce tehnicile de analiză Fourier a semnalelor digitale au o aplicare largă în numeroase domenii ale tehnicii.

Semnalele discrete sînt de natură diferită și apar de exemplu în generatori discreți ai sistemelor de comandă, în tehnica impulsurilor, în telefonie, în televiziune etc. Ele apar cu deosebire în urma discretizării semnalelor analogice (de exemplu, prin eșantionare).

În ultimul timp s-a obținut o perfecționare a modalităților de prelucrare a semnalelor, de estimare a parametrilor caracteristici ai lor, de interpolare a configurațiilor, cu aplicații dintre cele mai semnificative în teoria comunicațiilor, în acustică, radar, seismologie, recunoașterea formelor, biometrie etc. Ca un fapt remarcabil, subliniem tendința actuală a cercetătorilor de a studia semnalele discrete prin ele însele și nu ca aproximări ale semnalelor continuale. Același punct de vedere va fi adoptat în acest capitol, subliniind totuși unele avantaje metodologice ale studiului comparat.

În prima parte a acestui capitol, ne vom ocupa de prezentarea matematică a cîtorva clase de transformări ale semnalelor discrete,

indicînd totodată aplicații ale lor. Ideea rămîne aceeași din totdeauna, anume de a transforma un semnal-original într-unul mai maneabil, mai ușor controlabil, sau de a-i separa unele componente. Transformarea z este un instrument util în studiul proceselor liniare invariante în timp, discretizate. Transformarea Fourier discretă stă la baza tuturor tehnicilor de prelucrare a semnalelor discrete, de transfer de date din domeniul timp în domeniul frecvență și invers. Dacă în cazul semnalelor analogice sau continuale transformarea Fourier este în special un instrument teoretic, așa cum am văzut în cap. II, în schimb în cazul discret prevalează calculul efectiv al ei și nu întîmplător, succesul analizei Fourier se conjugă cu dezvoltarea extraordinară a tehnicii moderne de calcul. Transformarea Hilbert discretă joacă de asemenea un rol important în reprezentările olomorfe ale unor semnale și în filtrarea semnalelor.

§ 1. Clase remarcabile de semnale discrete

Reamintim că se numește *mulțime de momente* (sau *mulțime-timp*) orice mulțime total ordonată $(\mathscr{T}, \leqslant)$. De obicei se presupune că $\mathscr{T}$ posedă un cel mai mic element, numit *moment inițial*. Exemple tipice: $\mathscr{T} = \mathbb{N}$, $\mathscr{T} = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, $N \geqslant 2$ fiind un număr întreg fixat, $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$, $\mathscr{T} = [a, b]$, $\mathscr{T} = \mathbb{R}$, cu ordinea $\leqslant$ uzuală.

1.1. **Definiție.** Se numește *semnal discret* orice funcție $\mathscr{T} \to \mathbb{C}$ definită pe o mulțime de momente $\mathscr{T}$ inclusă în $\mathbb{Z}$, cu ordinea indusă. Așadar, mulțimea $\mathscr{T}$ este finită sau numărabilă.

Orice semnal discret $x : \mathscr{T} \to \mathbb{C}$ se poate identifica cu un șir de numere reale sau complexe $x(t)$, $t \in \mathscr{T}$. În cele mai multe aplicații, $\mathscr{T} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ și atunci x este bine determinat prin cele N eșantioane $x(0)$, $x(1)$, $\ldots$, $x(N-1)$ ale semnalului x, sau $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$ și atunci x este determinat prin șirul componentelor (eșantioanelor) sale $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $x_n = x(n)$.

În cele ce urmează, vom presupune că $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$ și vom nota cu S_d mulțimea tuturor semnalelor discrete $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$; este evident că S_d este un spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$ relativ la operațiile uzuale de adunare și înmulțire cu scalari, pe componente.

1.2. **Exemple.** (a) Semnalul discret *treapta-unitate* este $\sigma : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, definit prin

$$\sigma(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n < 0, \\ 1, & \text{dacă } n \geqslant 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ definim *semnalul-impuls unitate la momentul* k, δ_k prin

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \neq k, \\ 1, \text{ dacă } n = k; \end{cases} \tag{3.2}$$

în particular, vom nota δ în loc de δ_0. Vom vedea că acest δ este un veritabil analog discret al distribuției δ și că nu există vreo confuzie în menținerea aceleiași notații.

În general, un șir $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de numere reale poate fi reprezentat grafic considerînd punctele (n, a_n), $n \in \mathbb{Z}$. Cu această convenție, semnalele σ, δ_k pot fi reprezentate ca în fig. 3.1. O formulă remarcabilă este cea de reprezentare a oricărui semnal discret $x \in S_d$ prin impulsuri unitate

$$x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, \delta_k . \tag{3.3}$$

Demonstrația revine la a proba că $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, \delta_k(n)$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$, ceea ce rezultă din (3.2) și din convenția de notație $x_k = x(k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Un semnal discret sinusoidal este de forma

$x_n = A \cos(\omega n + \varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$ (A, ω, φ fiind numere reale fixate, $\omega > 0$).

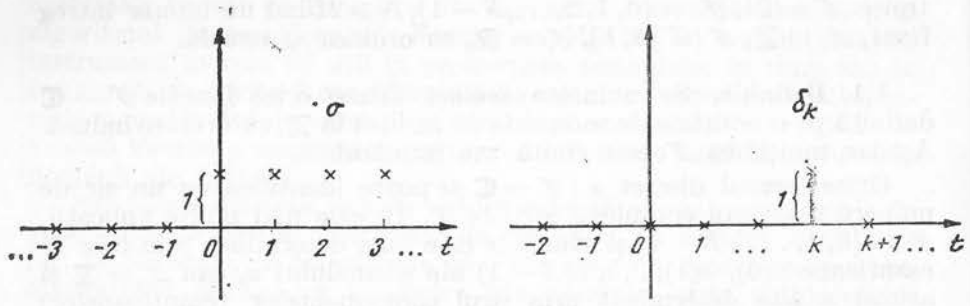


Fig. 3.1. Reprezentarea semnalelor discrete: treaptă-unitate și impuls unitate la momentul k.

Un semnal discret $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ se numește *periodic* dacă există un număr întreg $N \neq 0$, numit *perioadă*, astfel încît $x_n = x_{n+N}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$. Semnalul sinusoidal anterior are perioada $\frac{2\pi}{\omega}$, cu condiția ca aceasta să fie un număr întreg.

(c) Pentru orice funcție $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ și pentru orice $T > 0$ fixat (pas de eșantionare) se poate considera un semnal discret, de componente $x_n = x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Se notează cu S_+ subspațiul lui S_d al semnalelor $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cu suport pozitiv, adică $x_n = 0$ pentru orice $n < 0$. Evident σ, $\delta_k \in S_+$.

Dacă $x, y \in S_+$, $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$, se numește *convoluția lui* x *și* y semnalul discret

$$x * y = \{z_n\}, \text{ unde } z_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, y_{n-k}, \; n \in \mathbb{Z}. \tag{3.4}$$

Convoluția este evident comutativă. Pentru orice $h \in \mathbb{Z}$ fixat, semnalul $x * \delta_h$ este definit pentru orice $x \in S_d$ și se numește *întîrzierea lui* x *cu* h *momente*; acest semnal are eșantioanele $\{x_{n-h}\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Vom nota cu $S_m \subset S_d$ subspațiul semnalelor care au cel mult un număr finit de eșantioane nenule (numite și *semnale cu durată mărginită*). Convoluția $x * y$ se poate defini prin formula (3.4) dacă unul din semnalele x, y aparține lui S_m. Pentru orice $x \in S_d$ avem $x * \delta = x$; de asemenea, $\delta_k * \delta_l = \delta_{k+l}$, $(\forall)\, k, l \in \mathbb{Z}$.

(e) Se notează cu l_1 mulțimea acelor semnale discrete $x \in S$, $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ cu proprietatea că seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n$ este absolut convergentă, adică seriile $\sum_{n\geq 0} |x_n|$, $\sum_{n\geq 1} |x_{-n}|$ sînt convergente; se notează atunci $\| x \|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|$. Se știe că l_1 are o structură de spațiu Banach (complex).

Fie l_2 mulțimea acelor semnale discrete $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ astfel încît seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^2$ să fie absolut convergentă (numite și *semnale de energie finită*). Spațiul l_2 are o structură de spațiu Hilbert complex, relativ la produsul scalar $\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot \overline{y}_n$, $(\forall) x, y \in l_2$.

Dacă $x \in l_2$, atunci $\| x \|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n|^2$ se numește *energia semnalului* x. Este evident că $l_1 \subset l_2$ (dacă $x \in l_1$, atunci $x_n \to 0$ pentru $|n| \to \infty$, deci există $M > 0$ astfel încît $|x_n| \leq M$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$; atunci $|x_n|^2 \leq M |x_n|$ și aplicînd criteriul de comparație de la serii, rezultă că $x \in l_2$). Șirul $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\neq 0}$ este în l_2, dar nu în l_1.

1.3. Răspunsul sistemelor la semnale discrete. Se numește *sistem liniar discret* orice operator $\mathbb{C}$-liniar $T : S_d \to S_d$. Notăm cu h_k, $k \in \mathbb{Z}$ răspunsul sistemului la impulsul unitate aplicat la momentul k, deci $h_k = T(\delta_k)$. Semnalul $H = T(\delta)$, adică $H = h_0$, se numește *răspunsul-impuls* al sistemului.

Pentru orice semnal de intrare $x \in S_d$, răspunsul sistemului este $y = T(x)$ și dacă $x \in S_m$, atunci din formula (3.3) rezultă că $y = T(x) = T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \, \delta_k\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_k$, adică dinamica sistemului este bine determinată prin cunoașterea semnalelor h_k, $k \in \mathbb{Z}$. Există un caz în care este suficientă cunoașterea lui H, anume cazul sistemelor T *invariante în timp* [cu proprietatea definitorie că ori de cîte ori $y = T(x)$,

rezultă $y * \delta_k = T(x * \delta_k)$, $(\forall)k \in \mathbb{Z}$], unde are loc relația $y = H * x$. Într-adevăr, cum $H = T(\delta)$, rezultă $H * \delta_k = T(\delta * \delta_k) = T(\delta_k) = h_k$ și $y = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k h_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k (H * \delta_k) = H * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \delta_k = H * x$.

Reținem că sistemele liniare discrete invariante în timp sînt de tip convoluție, fapt care constituie analogul discret al teoremei II.3, (b).

Exemplu. Fie un sistem cu răspunsul-impuls $H : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, $H(n) = 3^n \sigma(n)$, căruia i se aplică la intrare semnalul $x = \sigma - (\sigma * \delta_2)$; atunci răspunsul y al sistemului este semnalul $y = H * x$, cu eșantioanele

$$y(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(p)H(n-p) = x(0)H(n) + x(1)H(n-1) = H(n) + H(n-1) =$$

$$= 3^n \sigma(n) + 3^{n-1} \sigma(n-1) = \begin{cases} 4 \cdot 3^{n-1}, & \text{dacă } n \geqslant 1, \\ 3, & \text{dacă } n = 0, \\ 0, & \text{dacă } n \leqslant -1. \end{cases}$$

Un sistem liniar discret $T : S_d \to S_d$ se numește *stabil* dacă răspunsul sistemului la orice semnal mărginit este mărginit. Dacă orice eșantion y_n al unui semnal de ieșire $y = T(x)$ depinde numai de eșantioanele x_k ale intrării, cu $k \leqslant n$, atunci sistemul se numește *cauzal*.

Este evident că un sistem liniar discret invariant în timp $T : S_m \to S_d$ este cauzal dacă și numai dacă H are suport pozitiv, iar dacă seria $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |H_n|$ este convergentă, atunci sistemul este stabil. Într-adevăr, pentru orice $x \in S_m$ alegem $M > 0$ astfel încît $\|x_n\| \leqslant M$ pentru orice n, deci notînd $y = T(x)$, $y = \{y_n\}$, avem $y_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_p \cdot x_{n-p}$ și atunci $|y_n| \leqslant M \sum_{p=-\infty}^{\infty} |H_p|$, deci șirul y este mărginit. Sistemul din exemplul precedent este cauzal și nestabil.

O proprietate fundamentală a sistemelor liniare discrete invariante în timp $\left(\text{cu } \sum_{p \in \mathbb{Z}} |H_p| < \infty\right)$ este aceea că răspunsul unui astfel de sistem la o intrare sinusoidală este tot un semnal sinusoidal, cu aceeași frecvență (doar amplitudinea și faza sînt modificate de sistem). Într-adevăr, dacă $x_n = e^{j\omega n}$, $n \in \mathbb{Z}$, atunci

$$y_n = \sum_{p \in \mathbb{Z}} H_p e^{j\omega(n-p)} = e^{j\omega n} H(e^{j\omega}),$$

unde am notat

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{p \in \mathbb{Z}} H_p e^{-j\omega p},$$

numit *răspunsul-frecvență* al sistemului. Evident, răspunsul-impuls are eșantioanele $H_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega p} d\omega$, $p \in \mathbb{Z}$. De exemplu, dacă se consideră funcția

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } |\omega| \leqslant \omega_0, \\ 0, & \text{dacă } \omega_0 < |\omega| \leqslant \pi, \end{cases}$$

prelungită la $\mathbb{R}$ prin periodicitate de perioadă 2π, atunci

$$H_p = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_0}^{\omega_0} e^{j\omega p} d\omega = \frac{\sin \omega_0 p}{\pi p}, \; p \neq 0, \quad \text{și} \quad H_0 = \frac{\omega_0}{\pi}$$

(sistemul corespunzător poartă denumirea de *filtru ideal trece-jos*; evident, acesta nu este cauzal).

1.4. **Filtre digitale.** Se numește *filtru digital (numeric)* un sistem liniar discret invariant $F : S_d \to S_d$, cu proprietatea că pentru orice $x = \{x_n\} \in S_d$, eșantioanele y_n ale semnalului de ieșire corespunzător $y = F(x)$ verifică o relație de forma

$$\sum_{i=0}^{p} a_i y_{n-i} = \sum_{j=0}^{q} b_j x_{n-j}, \quad (\forall)n \in \mathbb{Z}, \tag{3.5}$$

cu $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q$ constante (reale sau complexe, $a_0 \neq 0$).

Așadar, ieșirea este una din soluțiile ecuației (3.5); recunoaștem aici o ecuație cu diferențe finite, cu coeficienți constanți. Printre metodele de rezolvare efectivă, este de subliniat metoda transformării z care va fi expusă în paragraful următor. Ca în cazul ecuațiilor diferențiale, pentru determinarea unei soluții y a ecuației (3.5) este necesară o informație suplimentară, de exemplu, cunoașterea a p eșantioane succesive ale lui y.

Un filtru nu este neapărat cauzal [de exemplu, filtrul definit prin relația $y_n - 2y_{n-1} = x_n$, $y_0 = 0$, deoarece pentru intrarea $x = \delta$, ieșirea y corespunzătoare are eșantioanele $y_n = -2^n \sigma(-n-1)$]; de asemenea, filtrele nu sînt în general stabile deoarece filtrul definit prin $y_n - 2y_{n-1} = x_n$, $y_0 = 1$ face ca la intrarea $x = \delta$ să cores-

pundă ieşirea $y_n = 2^n \sigma(n)$, $n \in \mathbb{Z}$, care nu constituie un semnal mărginit).

Filtrele se clasifică în filtre cu răspuns-impuls finit (sau recursive) dacă $H \in S_m$ şi filtre cu răspuns-impuls infinit dacă $H \notin S_m$. De exemplu, filtrul $y_n - 2y_{n-1} = x_n$, $y_0 = 0$ are răspuns-impuls infinit. Dar filtrele de tipul $y_n = \sum_{j=0}^{q} b_j x_{n-j}$, $n \in \mathbb{Z}$ [luînd $p = 0$ în ecuaţia (3.5)] sînt recursive.

Filtrele digitale, ca şi sistemele de tip convoluţie, nu au doar semnificaţie teoretică, ci sînt utilizate pentru realizarea efectivă a unor sisteme concrete [6, 7].

1.5. **Semnale multidimensionale.** Se numeşte *semnal discret n-dimensional* orice aplicaţie $s : \overbrace{\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}}^{n \text{ ori}} \to \mathbb{C}$. În cele ce urmează, ne restrîngem la cazul $n = 2$. Un *semnal bidimensional* este deci un şir dublu $s = \{s_{mn}\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ de numere reale sau complexe. Pentru a pune în evidenţă un semnal bidimensional este suficient ca în fiecare nod (m, n) al reţelei plane formate de dreptele paralele la axe, duse prin punctele de coordonate întregi, să fie asociat cîte un număr. Exemple de semnale bidimensionale se întîlnesc adesea. Astfel, dacă se consideră un domeniu D din planul xOy şi un pas de eşantionare T, orice funcţie $u(x, y)$, $u : D \to \mathbb{R}$ poate fi aproximată prin şirul dublu $\{u_{mn}\}$, unde

$$u_{mn} = \begin{cases} u(mT, nT), & \text{dacă } (mT, nT) \in D, \\ 0 & \text{altminteri.} \end{cases}$$

Funcţia u poate fi amplitudinea unei unde, o temperatură etc. [7]. Noţiunile întîlnite în cazul unidimensional pot fi extinse fără dificultate. Astfel, *impulsul unitate bidimensional* este definit prin $\delta = \{\delta_{mn}\}$ cu

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } m = 0 \text{ şi } n = 0, \\ 0 \text{ altminteri,} \end{cases}$$

iar *treapta-unitate bidimensională* este definită prin $\sigma = \{\sigma_{mn}\}$,

$$\sigma_{mn} = \begin{cases} 1, \text{ dacă } m \geqslant 0, n \geqslant 0, \\ 0 \text{ altminteri.} \end{cases}$$

Notăm mulţimea semnalelor discrete bidimensionale prin $S_d^{(2)}$. Se extind în mod natural conceptele de sistem discret [ca operator $S_d^{(2)} \to S_d^{(2)}$], cauzalitate, stabilitate, filtre etc. De remarcat că semnalele multidimensionale apar natural în legătură cu discretizarea ecuaţiilor cu derivate parţiale.

§ 2. Transformarea z

Transformarea z este un instrument teoretic şi practic, utilizat în special în analiza sistemelor discrete liniare invariante în timp. Ea poate fi asimilată cu discretizarea transformării Laplace şi foloseşte în mod sistematic rezultate din teoria funcţiilor complexe.

Fixăm $T > 0$ (pas de eşantionare). Dacă $x(t)$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este un semnal continual (analogic), atunci se poate asocia semnalul discret $x^* = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $x_n = x(nT)$, care se poate exprima ca o serie de impulsuri modulate $x^*(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT)\, \delta(t - nT)$ şi formal, conform cu II.11.1, transformata Laplace a semnalului x^* este $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) e^{-nTs}$, adică $\sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) z^{-n}$, notînd $e^{-Ts} = z$. Aceste consideraţii sugerează definiţia următoare.

2.1. **Definiţie.** Fie $s = \{a_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un semnal discret astfel încît seria formală Laurent de puteri $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n X^{-n}$ să fie convergentă deci există $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \neq 0$, astfel încît seria numerică $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z_0^{-n}$ să fie convergentă. Se numeşte *transformata z a lui s* (sau *z-transformata* sau *transformata Laplace discretă bilaterală a lui s*) funcţia complexă L_s definită prin

$$L_s(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^{-n}.$$

Din teoria generală a funcţiilor complexe se ştie că funcţia L_s este olomorfă într-o coroană circulară centrată în origine.

Aşa cum transformarea Laplace continuă, studiată în cap. II, algebrizează unele clase de ecuaţii diferenţiale, tot astfel transformarea z algebrizează unele clase de ecuaţii cu diferenţe finite.

În cele ce urmează, vom considera transformările z unilaterale, pentru semnale din S_+ (deci $a_n = 0$ pentru $n < 0$).

Ca un exemplu, avem $L_\sigma(z) = \sum_{n\geqslant 0} z^{-n} = \frac{z}{z-1}$ pentru $|z|>1$ și $L_{\delta_k}(z) = \frac{1}{z^k}$, pentru $z\neq 0$; în particular $L_\delta(z) = 1$. În cazul semnalelor s din S_+ transformata Laplace $L_s(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n z^{-n}$ este evident o funcție olomorfă în exteriorul unui cerc. În particular, dacă notăm $t = \{t_n\}$, $t_n = ns_n$, atunci $L_t(z) = -z[L_s(z)]'$.

Proprietățile principale ale transformării z sînt concentrate în

Teorema III.1. (a) *Asocierea* $s \overset{\mathscr{Z}}{\mapsto} L_s$ *este* $\mathbb{C}$*-liniară și injectivă.*
(b) *Dacă* $s\in S_+$, $s = \{a_n\}_{n\geqslant 0}$, *atunci* $\lim_{z\to\infty} L_s(z) = a_0$ *(teorema valorii inițiale) și dacă există* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, *atunci* $\lim_{z\to 1} \frac{z-1}{z}\cdot L_s(z) = l$ *(teorema valorii finale).*
(c) *Fie* $s\in S_+$, $s = \{a_n\}_{n\geqslant 0}$ *și funcția* $L_s(z)$ *olomorfă în domeniul* $|z| > R$. *Pentru orice* $r > R$, *fie* γ_r *frontiera discului* $|z|\leqslant r$ *parcursă pozitiv o singură dată. Atunci*

$$a_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma_r} z^{n-1}L_s(z)\,dz,\ n\geqslant 0 \tag{3.6}$$

(teorema de inversare a z-transformării).
(d) *Dacă* $s, t\in S_+$, *atunci* $s * t\in S_+$ *și, în plus,*

$$L_{s*t} = L_s\cdot L_t \text{ (teorema de convoluție).} \tag{3.7}$$

În particular, $L_{s*\delta_k}(z) = z^{-k}L_s(z)$, $(\forall)k\in\mathbb{Z}$.

Demonstrație. (a) Evident, $L_{\alpha s+\beta t} = \alpha L_s + \beta L_t$, pentru orice $\alpha, \beta\in\mathbb{C}$ și $s, t\in S_+$. Apoi dacă $L_s = L_t$, atunci rezultă că $L_{s-t}(z) = 0$, pentru orice z din exteriorul unui cerc și din unicitatea dezvoltării Laurent, rezultă că toți coeficienții dezvoltării sînt nuli, deci $s = t$.
(b) Prima parte este evidentă și probăm teorema valorii finale. Cum șirul $s = \{a_n\}$ este presupus convergent, acesta este mărginit, deci seria $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{-n}$ converge pentru $|z|>1$. Presupunem mai întîi că $l = 0$. Fixînd $\varepsilon > 0$ arbitrar, putem alege N astfel încît $|a_n|<\varepsilon$ pentru orice $n\geqslant N$. Atunci pentru $|z|>1$ avem

$$\left|\frac{z-1}{z}\sum_{n\geqslant N+1}\frac{a_n}{z^n}\right| < \varepsilon \text{ și cum } \lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\sum_{n=0}^{N}\frac{a_n}{z^n} = 0,$$

rezultă $\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\cdot L_s(z) = 0 = l$.

Dacă $l\neq 0$, atunci considerăm șirul $t = s - l\sigma$; evident $t\in S_+$ și $t\to 0$, deci $\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\cdot L_t(z) = 0$ și aplicînd punctul (a), rezultă $\lim_{z\to 1}\left[\frac{z-1}{z}\cdot L_s(z) - \frac{z-1}{z}\cdot l\cdot L_\sigma(z)\right] = 0$, adică $\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}\cdot L_s(z) = 1$.
(c) Reamintim că

$$\int_{\gamma_r} z^k\,dz = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k\neq -1,\\ 2\pi j, & \text{dacă } k = -1,\end{cases}$$

și că o serie uniform convergentă poate fi integrată termen cu termen. Folosind această remarcă, considerăm identitatea valabilă pentru $|z| > R$:

$$z^{n-1}L_s(z) = \sum_{k\geqslant 0} a_k z^{n-k-1},$$

pe care o integrăm în lungul lui γ_r și rezultă formula (3.6).
Din teorema reziduurilor rezultă $a_n = \sum \text{rez}\,[z^{n-1}L_s(z)]$, suma fiind făcută după reziduurile corespunzătoare polilor situați în discul cu frontiere γ_r. În practică se recomandă aplicarea acestei formule pentru $n\geqslant 1$, iar pentru $n = 0$, teorema valorii inițiale.
(d) Dacă $s = \{a_n\}$, $t = \{b_n\}$, atunci $s * t = \{c_n\}$, unde $c_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$. Așadar,

$$L_s(z)\cdot L_t(z) = \left(\sum_{n\geqslant 0} a_n z^{-n}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} b_n z^{-n}\right) = \sum_{n\geqslant 0} c_n z^{-n} = L_{s*t}(z),$$

conform regulii de înmulțire a seriilor absolut convergente.
Relația (3.7) are loc în afara discului comun de convergență al seriilor de puteri asociate lui s și t.
Indicăm un tablou de z-transformate remarcabile de semnale din S_+:

$$L_\sigma(z) = \frac{z}{z-1},\ L_{\delta_k}(z) = \frac{1}{z^k},\ L_\delta(z) = 1,\ \{n\}\overset{\mathscr{Z}}{\mapsto}\frac{z}{(z-1)^2},$$

$$\{n^2\}\overset{\mathscr{Z}}{\mapsto}\frac{z(z+1)}{(z-1)^3},\ \{a^n\},\ a\in\mathbb{C}\overset{\mathscr{Z}}{\mapsto}\frac{z}{z-a},\ \{e^{an}\}\overset{\mathscr{Z}}{\mapsto}\frac{z}{z-e^a},$$

$$\{\sin\omega n\}_{n\geqslant 0}\overset{\mathscr{Z}}{\mapsto}\frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1},\ \{\cos\omega n\}_{n\geqslant 0}\overset{\mathscr{Z}}{\mapsto}\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}.$$

2.2. **Observații.** 1) O parte din rezultatele anterioare, de exemplu punctele (a), (c), (d) ale teoremei III.1, au loc pentru z-transformarea bilaterală și nu doar pentru semnale cu suport pozitiv. De exemplu, dacă $s \in S_d$ are suport mărginit la stînga ($a_n=0$ pentru $n \leqslant N$, N convenabil), atunci $L_s(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_n}{z^n}$. Dacă $t=\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $b_n=a_{n-k}$, adică $t = s * \delta_k$, atunci $L_t(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{b_n}{z^n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{z^n}$, deci $z^k L_t(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{a_{n-k}}{z^{n-k}} = L_s(z)$; așadar, $L_t(z) = z^{-k} L_s(z)$, fapt care rezultă de asemenea din punctul (d) al teoremei anterioare.

2) Punctul (d) al teoremei precedente afirmă că prin z-transformare, convoluția este înlocuită cu produsul uzual; există un rezultat dual: dacă $s = \{x_n\}$, $t = \{y_n\}$ sînt semnale discrete cu z-transformatele X, Y, atunci

$$L_{s\cdot t}(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_n z^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi j} x_n z^{-n} \int_\gamma Y(v)\, v^{n-1}\, dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \int_\gamma Y(v) \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} v^{-1}\, dv = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[x_n \left(\frac{z}{v}\right)^{-n} \right] Y(v) v^{-1}\, dv,$$

deci

$$L_{s\cdot t}(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma X\left(\frac{z}{v}\right) Y(v) v^{-1}\, dv, \tag{3.7}$$

unde γ este un cerc parcurs pozitiv, concentric cu coroana în care este definit Y și situat în această coroană [13].

Similar, are loc relația

$$L_{s\cdot t}(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma'} X(v)\, Y\left(\frac{z}{v}\right) v^{-1}\, dv. \tag{3.8}$$

De exemplu, dacă $s = \{2^n \sigma(n)\}$, $t = \{5^n \sigma(n)\}$, atunci $X(z) = L_s(z) = \frac{z}{z-2}$ pentru $|z| \geqslant 2$, $Y(z) = L_t(z) = \frac{z}{z-5}$ pentru $|z| > 5$. Atunci

$$L_{s\cdot t}(z) = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma \frac{z}{z-2v} \cdot \frac{1}{v-5}\, dv,$$

unde γ este un cerc $|v| = r$ cu $r > 5$, parcurs pozitiv o singură dată; cum $X\left(\frac{z}{v}\right)$ există numai pentru $\left|\frac{z}{v}\right| \geqslant 2$, deci $z \neq 2v$, rezultă că

$$L_{s\cdot t}(z) = \operatorname{rez}\left(\frac{z}{z-2v} \cdot \frac{1}{v-5}\right)\Big|_{v=5} = \frac{z}{z-10}.$$

O consecință remarcabilă a rezultatului anterior este următoarea relație tip Parseval: dacă $s, t \in l_2$, atunci

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \overline{y}_n = \frac{1}{2\pi j} \int_\gamma X(v)\, \overline{Y}\left(\frac{1}{v}\right) v^{-1}\, dv, \tag{3.9}$$

unde γ este un cerc situat în coroana în care sînt definite $X(v)$, $Y\left(\frac{1}{v}\right)$ și concentric cu aceasta.

Într-adevăr, este suficient să aplicăm formula (3.8) pentru $z = 1$ și să observăm că dacă $x = \{x_n\}$ și $\overline{x} = \{\overline{x}_n\}$; atunci $L_{\overline{x}}(z) = \overline{L_x(\overline{z})}$, ceea ce rezultă direct din definiție.

2.3. **Exemple.** (a) Fie ecuația $x(t+1) - cx(t) = \delta(t)$, $t \in \mathbb{Z}$, cu c constantă reală nenulă și determinăm soluția $x \in S_+$. Pentru $t = -1$ se obține $x_0 = 0$ și pentru $t = 0$, $x_1 = 1$, apoi $x_2 = c$ etc. Rezolvăm ecuația prin metoda transformării z, scriind-o sub forma echivalentă $(x * \delta_{-1}) - cx = \delta$, de unde $zL_x(z) - cL_x(z) = 1$, deci $L_x(z) = \frac{1}{z-c}$. Formula (3.6) dă

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma_r} \frac{z^{t-1}}{z-c}\, dz = \operatorname{rez} \frac{z^{t-1}}{z-c}\Big|_{z=c} = c^{t-1} \text{ pentru } t \geqslant 1.$$

Apoi $x(0) = \lim_{z\to\infty} L_x(z) = 0$.

Mai general, considerăm un sistem discret descris printr-o ecuație vectorială de forma $\underline{x}(t+1) - \mathbf{A} \cdot \underline{x}(t) = \mathbf{B}\underline{u}(t)$ cu variabilele de stare $\underline{x} = [x_1\, x_2 \ldots x_n]'$, $\mathbf{A} \in M_{n,n}(\mathbb{C})$, $\mathbf{B} \in M_{n,m}(\mathbb{C})$ și vectorul-comandă $\underline{u}(t)$ presupus m-dimensional. Presupunînd variabilele de stare și comenzile din S_+, sistemul se scrie $\underline{x} * \delta_{-1} - \mathbf{A}\underline{x} = \mathbf{B}\underline{u}$ sau $(\delta_{-1}\mathbf{U} - \delta\mathbf{A}) * \underline{x} = \mathbf{B}\underline{u}$ și în ipoteza că matricea $\delta_{-1}\mathbf{U} - \delta\mathbf{A}$ are inversă, rezultă soluția $\underline{x} = (\delta_{-1}\mathbf{U} - \delta\mathbf{A})^{-1}\, \mathbf{B} * u$, adică $\underline{x} = \mathbf{W} * \underline{u}$, unde $\mathbf{W} = (\delta_{-1}\mathbf{U} - \delta\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{B}$ este matricea de transfer a sistemului [8].

(b) Indicăm expresia explicită a termenului general al șirului lui Fibonacci $s=\{a_n\}_{n\geqslant 0}$ definit prin $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pentru orice $n \geqslant 2$. Facem convenția că $a_n = 0$ pentru $n \leqslant 0$ și atunci rezultă

$$a_n - a_{n-1} - a_{n-2} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n \geqslant 2 \text{ sau dacă } n \leqslant 0, \\ 1, & \text{dacă } n = 1, \end{cases}$$

adică $(\delta - \delta_1 - \delta_2) * s = \delta_1$. Aplicînd transformarea z, rezultă

$$L_s(z) \cdot \left(1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\right) = \frac{1}{z}, \text{ deci } L_s(z) = \frac{z}{z^2 - z - 1}.$$

Această funcție este olomorfă în afara unui disc de frontieră γ_r care conține polii $\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Așadar, conform cu (3.6).

$$a_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{\gamma_r} \frac{z^n}{z^2-z-1}\,dz = \operatorname{rez}\ \frac{z^n}{z^2-z-1}\bigg|_{z=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + \operatorname{rez}\ \frac{z^n}{z^2-z-1}\bigg|_{z=\frac{1-\sqrt{5}}{2}},$$

$$\text{deci } a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\ n\geqslant 0.$$

(c) Considerăm un filtru digital definit prin relația de tip (3.5) următoare:

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = x_n - x_{n+1},\ n\in\mathbb{Z}.$$

Determinăm semnalul $y=\{y_n\}_n\in\mathbb{Z}$ în ipoteza că sistemul este în repaus până la momentul inițial (deci $y\in S_+$) și se aplică semnalul de intrare x cu eșantioanele

$$x_n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n<0,\\ n, & \text{dacă } n\geqslant 0.\end{cases}$$

Notăm $Y(z)=L_y(z)$, $X(z)=L_x(z)$. Din relația precedentă rezultă că $(y*(\delta_{-2}+\delta_{-1}-2\delta)= x*(\delta-\delta_1)$, deci $(z^2+z-2)\cdot Y(z) = \left(1-\frac{1}{z}\right)\cdot X(z)$ și cum $X(z)=\sum_{n\geqslant 0}\frac{n}{z^n} = \frac{z}{(z-1)^2}$, rezultă

$$Y(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z+2)},\ \text{deci } y_n = \operatorname{rez}\ z^{n-1}\cdot Y(z)\Big|_{z=1} + \operatorname{rez}\ z^{n-1}\cdot Y(z)\Big|_{z=-2}.$$

Pentru $n\geqslant 1$ avem

$$\operatorname{rez}\ z^{n-1}\cdot Y(z)\Big|_{z=1} = \lim_{z\to 1}\left(\frac{z^{n-1}}{z+2}\right) = \frac{3n-4}{9}$$

și

$$\operatorname{rez}\ z^{n-1}\cdot Y(z)\Big|_{z=-2} = \lim_{z\to -2}\frac{z^{n-1}}{(z-1)^2} = \frac{(-2)^{n-1}}{9}.$$

Așadar, pentru $n\geqslant 1$ avem $y_n = \frac{3n-4+(-2)^{n-1}}{9}$. În fine, pentru $n=0$, $y_0 = \lim_{z\to\infty} Y(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{(z-1)^2(z+2)} = 0$, conform teoremei valorii inițiale.

(d) Mai general, presupunem că avem o relație de tip (3.5), cu x semnal discret fixat:

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{r}\beta_k x(nT-kT) - \sum_{p=1}^{s}\alpha_p\, y(nT-pT),\ (\forall)\ n\in\mathbb{Z}, \tag{3.10}$$

unde α_p, β_k sînt constante reale sau complexe.

Schema sistemului dinamic de tip filtru digital, descris prin ecuația (3.10), este indicată în fig. 3.2, unde $\triangleright T$, $\oplus$, $\otimes$ simbolizează respectiv întîrzierea de timp T, adunarea și multiplicarea. Facem ipoteza că x, y aparțin lui S_+, adică $x(nT)=0$, $y(nT)=0$ pentru $n<0$. Relația (3.10) definește ieșirea curentă y, cunoscînd cele s ieșiri anterioare

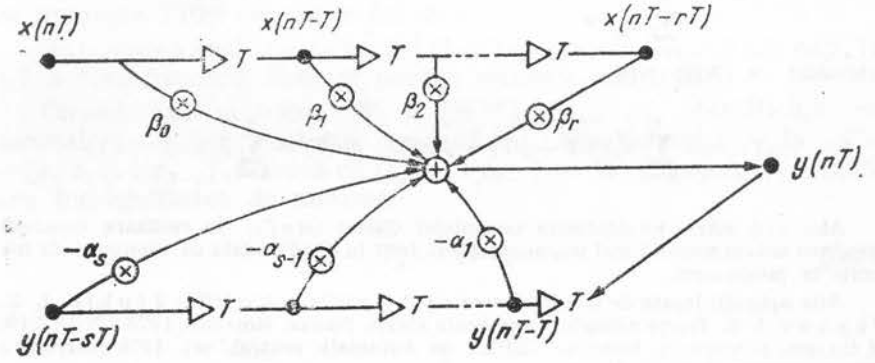


Fig 3.2. Schema sistemului dinamic $x\to y$ descris prin relația (3.10).

și cele $r+1$ intrări anterioară și curentă. Notăm $X(z)=L_x(z)=\sum_{k\geqslant 0}x(kT)z^{-k}$ și $Y(z)=L_y(z)$; presupunînd că $\alpha_0=1$, relația (3.10) se mai scrie

$$\sum_{p=0}^{s}\alpha_p y(nT-pT) = \sum_{k=0}^{r}\beta_k x(nT-kT),$$

de unde rezultă

$$Y(z)\sum_{p=0}^{s}\alpha_p z^{-p} = X(z)\sum_{k=0}^{r}\beta_k z^{-k},\ \text{adică } Y(z)=X(z)H(z), \tag{3.11}$$

unde

$$H(z) = \left(\sum_{k=0}^{r} \beta_k z^{-k}\right) \Big/ \left(\sum_{p=0}^{s} \alpha_p z^{-p}\right). \tag{3.12}$$

Funcția $H(z)$ este numită uneori *funcția de transfer* a filtrului; dacă $x=\delta$, deci $X(z)=1$, rezultă $Y(z) = H(z)$ conform cu (3.11), adică $H(z)$ este z-transformata răspunsului-impuls. Folosind dezvoltarea Laurent $H(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} H_n z^{-n}$, sistemul este cauzal dacă $H_n=0$, $(\forall)n<0$, iar dacă seria precedentă este absolut convergentă în $z=1$, atunci sistemul este stabil (conform cu 1.3); dacă funcția $H(z)$ are poli în puncte $z\neq 0$, atunci răspunsul-impuls nu poate aparține lui S_m. În fine, dacă intrarea este o exponențială discretă, $x(nT) = e^{jn\omega T}$, atunci ieșirea corespunzătoare este $y(nT) = H(e^{j\omega T})\, e^{jn\omega T}$, ceea ce rezultă imediat din (3.12). Așadar, cunoscînd H pe cercul unitate, se deduce răspunsul sistemului (3.10) la orice intrare sinusoidală.

Notînd $V(z) = \dfrac{X(z)}{\sum_{p=0}^{s} \alpha_p z^{-p}}$, relația (3.11) devine $Y(z) = V(z)\sum_{k=0}^{r} \beta_k z^{-k}$; un sistem echivalent cu (3.10) este

$$v(nT) = -\sum_{p=1}^{s} \alpha_p v(nT - pT) + y(nT), \quad y(nT) = \sum_{k=0}^{r} \beta_k v(nT - kT).$$

Aici $V(z)$ este z-transformata semnalului discret $\{v(nT)\}$. În realizare concretă, acest nou sistem necesită mai puține întîrzieri decît în (3.10), odată cu economia de memorie la programare.

Alte aplicații legate de transformarea z pot fi găsite în lucrările: Ţ i p k i n, I. Z., P o p k o v, I. S. *Teoria nelineinih impulsnih sistem*. Nauka, Moscova, 1973; N e c u l a, M. *On some z-transform formulas*. IEEET on Automatic control, oct. 1976 (correspondence), precum și în [7, 8].

§ 3. Transformarea Fourier discretă

Pînă nu demult, în prelucrarea semnalelor se utilizau exclusiv echipamente analogice, deși clase importante de semnale (de exemplu datele seismologice) nu puteau fi prelucrate în timp real. În teoria filtrării semnalelor, în analiza spectrală etc. un loc deosebit îl ocupă tehnicile digitale, iar dezvoltarea calculatoarelor numerice a reprezentat un moment crucial, în special după ce în 1965 a fost elaborat algoritmul TFR de calcul rapid și într-un anumit sens optimal al transformării Fourier discrete (aceasta va fi descris în cap. VI). Calculul transformării Fourier discrete a semnalelor din S_m este

utilizat în implementarea multor altor algoritmi de prelucrare digitală a semnalelor, ca și în descrierea cantitativă a dualității timp-frecvență.

3.1. **Definiție.** Fixăm o mulțime $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ și un semnal discret $x : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $x = \{x_k\}_{0\leq k\leq N-1}$, unde $x_k = x(k)$ sînt eșantioanele semnalului. Se numește *transformata Fourier discretă* (TFD) *directă a lui* x semnalul $F_x = \{f_k\}_{0\leq k\leq N-1}$ peste aceeași mulțime $\mathcal{T}$ de momente, definit prin

$$f_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m\, e^{-\frac{2\pi j}{N}km} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m\, W^{km}, \text{ unde } W = e^{-\frac{2\pi}{N}j}. \tag{3.13}$$

Semnalul discret $F_x^{-1} = \{g_l\}_{0\leq l\leq N-1}$, unde $g_l = \dfrac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x_m\, W^{-lm}$, se numește TFD *inversă a lui* x.

Se remarcă analogia definiției (3.13) cu definiția (2.55) din cap. II, § 7 a transformării Fourier pentru semnale continuale.

Considerăm matricea $\mathbf{W} = [W^{km}]_{0\leq k,m\leq N-1}$; identificînd un semnal $x\in S_d$ cu vectorul coloană al eșantioanelor sale $x = [x_0\, x_1 \ldots x_{N-1}]'$, rezultă că $[f_0 f_1 \ldots f_{N-1}]' = \mathbf{W}\cdot[x_0\, x_1 \ldots x_{N-1}]'$, adică are loc egalitatea de matrice

$$F_x = \mathbf{W}\cdot x \tag{3.14}$$

și similar

$$F_x^{-1} = \frac{1}{N}(\overline{\mathbf{W}}\cdot x). \tag{3.15}$$

Transformările Fourier definesc aplicații

$\mathcal{F} : S_d \to S_d$, $x \mapsto F_x$ și $\mathrm{F}^{-1} : S_d \to S_d$, $x \mapsto F_x^{-1}$.

Cu notațiile anterioare vom mai scrie $\{x_m\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{f_k\}$, $\{x_m\} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \{g_l\}$.

Lema 1. *Pentru orice* $k, l\in\mathbb{Z}$ *avem*

$$\sum_{m=0}^{N-1} W^{km}\cdot W^{-lm} = \begin{cases} N, \text{ dacă } k-l \vdots N, \\ 0 \text{ altfel.} \end{cases}$$

Demonstrație. Evident, $W^{km} \cdot W^{-lm} = e^{-\frac{2\pi jm}{N}(k-l)}$ și este suficient să observăm că dacă $\alpha \in \mathbb{C}$, atunci

$$\sum_{m=0}^{N-1} e^{\alpha m} = \begin{cases} \dfrac{1-e^{N\alpha}}{1-e^{\alpha}}, & \text{dacă } \dfrac{\alpha}{2\pi j} \text{ este întreg,} \\ N & \text{altfel.} \end{cases}$$

Lema rezultă aplicînd această relație pentru $\alpha = -\dfrac{2\pi j(k-l)}{N}$.

3.2. **Observații.** a) Funcțiile $e_k : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $m \mapsto W^{km}$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, în număr de N, se mai numesc *exponențiale discrete* (relativ la N) și lema precedentă exprimă o proprietate de ortogonalitate a exponențialelor discrete. Ulterior vom extinde acest punct de vedere în legătură cu conceptul general de bază standard de semnale discrete.

b) Orice semnal $x = \{x_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ poate fi prelungit ca un semnal din S_d periodic de perioadă N. Este evident că $F_x = \{f_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ are aceeași proprietate, pentru că $W^{(k+N)m} = W^{km}$, pentru orice m, $k \in \mathbb{Z}$; similar pentru $\mathcal{F}^{-1}$. Așadar, se poate considera de la început că semnalele $x : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ sînt restricții ale unor semnale $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ periodice de perioadă N, ceea ce simplifică unele considerații care ar conduce la depășirea cadrului mulțimii de momente $\mathcal{T}$. De exemplu, dacă $x = \{x_m\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$ și $y = F_x = \{f_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ și dacă se consideră o întîrziere fixată $h \in \mathbb{Z}$ și se notează $x_h = \{x_{m+h}\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$, atunci

$$F_{x_h} = \{W^{-hk} \cdot f_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}. \tag{3.16}$$

Într-adevăr, avem de arătat relația $\sum_{m=0}^{N-1} x_h(m) W^{km} = W^{-hk} \sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{km}$, adică $\sum_{m=0}^{N-1} x_{m+h} W^{k(m+h)} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{km}$, ceea ce rezultă din periodicitatea de perioadă N a semnalului x.

c) Există o legătură între transformarea z și TFD, anume: fie $x = \{x_m\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$ și convenim aici că $x_m = 0$ pentru $m < 0$ și pentru $m > N$, deci $L_x(z) = \sum_{m=0}^{N-1} x_m z^{-m}$; se observă că $F_x(k) = L_x(z)\Big|_{z=W^{-k}}$, deci pentru a calcula $F_x(k)$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, este suficient să calculăm valorile transformatei z a lui x în N puncte echidistante de pe cercul unitate.

Spre deosebire de transformarea z, prin transformarea Fourier discretă se evidențiază o dualitate exactă între domeniile timp și frecvență, așa cum rezultă din

Teorema III.2. (a) *Aplicațiile* $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1} : S_d \to S_d$ *sînt izomorfisme* $\mathbb{C}$*-liniare inverse unul altuia.*

(b) *Orice semnal discret este bine determinat prin cunoașterea transformării sale Fourier discrete.*

(c) *Fie* $x \xrightarrow{\mathcal{F}} y$, $x = \{x_m\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$ *și* $y = \{f_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$. *Presupunem că toate eșantioanele* x_m *sînt numere reale și că* N *este par. Atunci* $f_{\frac{N}{2}+r} = \overline{f}_{\frac{N}{2}-r}$, *pentru orice* r, $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{N}{2}$, *și, în particular,* $f_{\frac{N}{2}}$ *este real.*

Demonstrație. (a) Fixăm $x \in S_d$, $x = [x_0\ x_1 \ldots x_{N-1}]'$ și fie $y = F_x$, $z = F_x^{-1}$. Avem de arătat că $F_y^{-1} = x$ și că $F_z = x$. Va rezulta atunci că $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}$ sînt aplicațiile identice ale spațiului S_d și liniaritatea aplicațiilor $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ fiind evidentă, afirmația va fi probată.

Fie deci $y = F_x$, $y = [y_0\, y_1 \ldots y_{N-1}]'$. Din relația (3.13) rezultă $y = \sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{km}$ și calculăm $F_y^{-1} = \{g_l\}_{0 \leqslant l \leqslant N-1}$. Avem pentru orice l,

$$g_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_k W^{-kl} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{-km} \right) W^{-kl} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \left(\sum_{k=0}^{N-1} W^{km} W^{-kl} \right) = x_l,$$

ultima relație decurgînd din lema 1. Așadar, $F_y^{-1} = x$. Cealaltă relație se probează similar.

(b) rezultă direct din (a), fiind o parafrazare a faptului că dacă $x \in S_d$ și $y = F_x$, atunci $x = F_y^{-1}$.

(c) Conform ipotezei, avem $f_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{km}$ și avem de arătat că $\sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot W^{\left(\frac{N}{2}+r\right)m} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \; W^{-\left(\frac{N}{2}-r\right)m}$, ceea ce rezultă din faptul că $W^{Nm} = 1$. Pentru $r = 0$ se obține că $f_{\frac{N}{2}} = \overline{f}_{\frac{N}{2}}$, deci $f_{\frac{N}{2}}$ este real.

3.3. **Legătura cu convoluția și cu corelația.** Fie $x = [x_0\, x_1 \ldots x_{N-1}]'$, $y = [y_0\, y_1 \ldots y_{N-1}]'$ două semnale discrete, prelungite prin periodicitate de perioadă N. Reamintim că se numește *convoluție* (respectiv *corelație*) a lui x și y semnalul $x * y = \{z_m\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$ (respectiv $x \hat{*} y = \{\hat{z}_m\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$), unde

$$z_m = \sum_{p=0}^{N-1} x_p \cdot y_{m-p} \quad \text{și} \quad \hat{z}_m = \frac{1}{N} \sum_{p=0}^{N-1} x_p \cdot y_{m+p}. \tag{3.17}$$

Semnalul $x \hat{*} x$ se numește *autocorelația lui* x.

Relaţiile (3.17) pot fi reprezentate sub formă matriceală astfel : se notează

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_0 \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{N-2} & x_{N-1} & x_0 & \dots & x_{N-3} \\ x_{N-1} & x_0 & x_1 & \dots & x_{N-2} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_{N-1} \\ x_{N-1} & x_0 & x_1 & \dots & x_{N-2} \\ x_{N-2} & x_{N-1} & x_0 & \dots & x_{N-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_0 \end{bmatrix}$$

şi atunci

$$[z_0 z_1 \dots z_{N-1}]' = \mathbf{A}[y_0 y_{N-1} y_{N-2} \dots y_1]',$$

$$[\hat{z}_0 \hat{z}_1 \dots \hat{z}_{N-1}]' = \mathbf{B}[y_0 y_1 \quad y_2 \dots \quad y_{N-1}]'.$$

Teorema următoare indică legătura dintre TFD şi convoluţie (respectiv corelaţie).

Teorema III.3. *Pentru orice x, y, presupuse semnale discrete $\mathscr{T} \to \mathbb{C}$, $\mathscr{T} = \{0, 1, \dots, N-1\}$, au loc relaţiile;*

(a) $F_{x*y} = F_x \cdot F_y$, $F^{-1}_{x*y} = N \cdot F^{-1}_x \cdot F^{-1}_y$, $F_x * F_y = N \cdot F_{xy}$;

(b) $N \cdot F_{x \hat{*} y} = \bar{F}_x \cdot F_y$, $F^{-1}_{x \hat{*} y} = \bar{F}^{-1}_x \cdot F^{-1}_y$, $F_x \hat{*} F_y = F_{\bar{x}y}$.

Demonstraţie. (a) Componenta de ordin k a semnalului F_{x*y} este

$$\sum_{m=0}^{N-1} z_m W^{km} = \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} x_p \, y_{m-p} \right) W^{km} = \sum_{p=0}^{N-1} x_p \left(\sum_{m=0}^{N-1} y_{m-p} W^{km} \right) =$$

$$= \sum_{p=0}^{N-1} x_p W^{pk} F_y(k) = F_y(k) \cdot F_x(k).$$

Deci k fiind arbitrar, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, rezultă $F_{x*y} = F_x \cdot F_y$, cu convenţia uzuală de a înmulţi semnalele pe componente.

Celelalte relaţii se probează în mod similar ; ultimele două relaţii din (a) şi (b) se pot deduce din cele precedente şi din teorema III.2, (a).

Corolarul 1. *Dacă x, y sînt semnale discrete, atunci*

$$x \cdot y = \frac{1}{N} F^{-1}(F_x * F_y) \text{ şi } x * y = F^{-1}(F_x \cdot F_y).$$

Corolarul 2 (Parseval). *Fie x, y semnale discrete $\mathscr{T} \to \mathbb{R}$ şi $F_x = \{f_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$, $F_y = \{g_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ transformatele lor Fourier discrete. Atunci*

$$\sum_{p=0}^{N-1} x_p y_p = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{f}_k \cdot g_k \text{ şi } \sum_{p=0}^{N-1} x_p^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2. \tag{3.18}$$

Demonstraţie. Fie $\hat{z} = x \hat{*} y$, deci $F_{\hat{z}}(k) = \frac{1}{N} \bar{F}_x(k) \cdot F_y(k) = \frac{1}{N} \bar{f}_k \cdot g_k$ pentru $0 \leqslant k \leqslant N-1$. Dar $\hat{z}_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_{\hat{z}}(k) \, W^{-km}$ pentru orice $m \in \mathbb{Z}$, deci conform cu (3.17), rezultă

$$\sum_{p=0}^{N-1} x_p y_{m+p} = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{f}_k \cdot g_k W^{-km}.$$

Pentru $m = 0$ şi apoi pentru $y = x$ se obţin formulele (3.18).

3.4. **Exemplu.** Fie $N=4$, $x = [1\ 1\ -1\ 0]'$ şi $y = [2\ 0\ 0\ 5]'$ semnale periodice de perioadă 4. În acest caz $W = e^{-\frac{\pi j}{2}} = -j$. Calculăm $F_x, F_y, z = x * y$ şi $\hat{z} = x \hat{*} y$. Conform cu (3.13) avem $F_x = [f_0 f_1 f_2 f_3]'$, unde $f_k = \sum_{m=0}^{3} x_m W^{km} = x_0 + x_1(-j)^k + x_2(-1)^k + x_3 j^k = 1 + (-j)^k + (-1)^{k+1}$, deci $F_x = [1\ \ 2-j\ \ -1\ \ 2+j]'$ şi, similar, $F_y = [g_0 g_1 g_2 g_3]'$, unde $g_k = \sum_{m=0}^{3} y_m \cdot W^{km} = 2 + 5W^{3k} = 2 + 5j^k$, deci (fig. 3.3)

$$F_y = [7\ \ 2+5j\ \ -3\ \ 2-5j]'.$$

Se putea de asemenea folosi relaţia (3.14). Aplicăm apoi (3.17) şi rezultă $z = [z_0 z_1 z_2 z_3]' = [-7\ -3\ -2\ 5]'$, $\hat{z} = \left[\frac{2}{4} \ -\frac{5}{4} \ \frac{3}{4} \ \frac{7}{4}\right]'$.

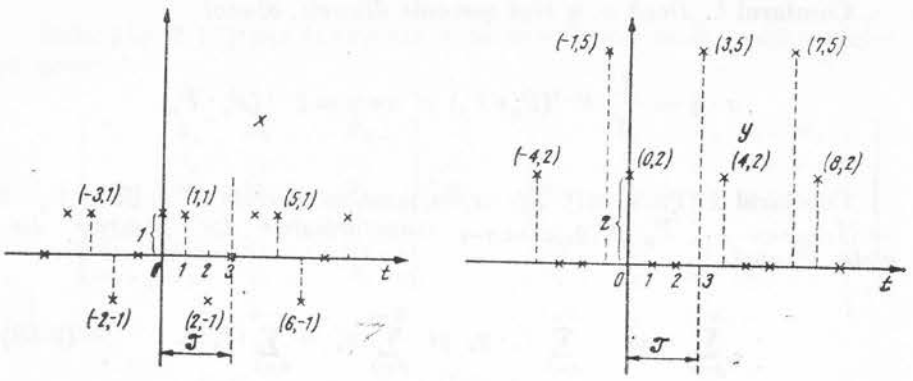


Fig. 3.3. Reprezentarea (prin puncte ×) a valorilor semnalelor x și y, periodice, de perioadă 4.

§ 4. Transformarea Hilbert discretă

Adeseori în aplicarea tehnicilor de analiză Fourier este utilă explicitarea relațiilor între părțile reale și imaginare (sau între modulele și fazele) transformatelor Fourier ale semnalelor; acestea sînt numite de obicei relații de transformare Hilbert. În cap. II am prezentat principalele proprietăți ale transformării Hilbert a semnalelor continuale; pentru studiul cazului discret nu este posibilă o analogie directă și sînt necesare unele pregătiri.

Pentru orice semnal discret $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ vom nota

$$x^{(p)} = \left\{\frac{x_n + x_{-n}}{2}\right\}_n, \text{ } \textit{partea pară} \text{ a lui } x,$$
$$x^{(i)} = \left\{\frac{x_n - x_{-n}}{2}\right\}_n, \text{ } \textit{partea impară} \text{ a lui } x. \tag{3.19}$$

Dacă $x \in S_+$ (adică $x_n = 0$ pentru $n < 0$), atunci semnalul x este bine determinat dacă se cunosc $x_n^{(p)} = \frac{1}{2}(x_n + x_{-n})$, $n \in \mathbb{Z}$. Mai precis,

$$x_n = \begin{cases} 2x_n^{(p)}, & \text{dacă } n > 0, \\ x_0^{(p)}, & \text{dacă } n = 0, \\ 0, & \text{dacă } n < 0, \end{cases}$$

și similar

$$x_n = \begin{cases} 2x_n^{(i)}, & \text{dacă } n > 0, \\ 0, & \text{dacă } n < 0. \end{cases}$$

Considerînd semnalul discret $v = \{v_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ definit prin

$$v_n = \begin{cases} 2, & \text{dacă } n > 0, \\ 1, & \text{dacă } n = 0, \\ 0, & \text{dacă } n < 0, \end{cases} \tag{3.20}$$

au loc formulele

$$x = x^{(p)} \cdot v \text{ și } x = x^{(i)} \cdot v + x_0 \cdot \delta. \tag{3.21}$$

Fie $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in S_+ \cap l_1$, cu valori reale. Are atunci sens considerarea funcției continue și periodice de perioadă 2π, $F_x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$F_x(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \cdot e^{-jn\omega}, \tag{3.22}$$

deci

$$x_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_x(\omega) \cdot e^{jn\omega}\, d\omega, \ (\forall)\, n \in \mathbb{Z}. \tag{3.23}$$

Dacă $L_x(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{x_n}{z^n}$ este z-transformata lui x (conform definiției 2.1), atunci $F_x(\omega) = L_x(e^{j\omega})$, $(\forall)\, \omega \in \mathbb{R}$. Fie $u = \operatorname{Re} F_x$, $v = \operatorname{Im} F_x$, deci $F_x = u + jv$. Atunci

$$F_{x^{(p)}}(\omega) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (x_n + x_{-n})\, e^{-jn\omega} = \frac{1}{2}\left[2x(0) + \sum_{n\geqslant 1} x_n e^{-jn\omega} + \right.$$
$$\left. + \sum_{n\geqslant 1} x_n e^{jn\omega}\right] = x_{(0)} + \sum_{n\geqslant 1} x_n \frac{e^{jn\omega} + e^{-jn\omega}}{2} = \sum_{n\geqslant 0} x_n \cos n\omega,$$

deci conform cu (3.22), $F_{x^{(p)}}(\omega) = u(\omega)$; similar, $F_{x^{(i)}}(\omega) = v(\omega)$.

Dacă se cunoaște u, atunci se poate determina $x^{(p)}$ printr-o formulă de tip (3.23), deci conform cu (3.21) se determină x. Așadar,

z-transformata lui x poate fi complet recuperată dacă se cunoaşte doar partea reală (sau imaginară) a ei pe cercul unitate. O problemă similară este cea a determinării lui $L_x(z)$ din cunoaşterea modulului sau fazei ei pe cercul unitate.

Fie acum $z = r\,e^{j\omega}$, $r > 1$, şi notăm $H(\omega) = L_x(z)$, deci

$$H(\omega) = \sum_{n \geqslant 0} x_n\, r^{-n}\, e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n^{(p)}\, v_n\, r^{-n}\, e^{-jn\omega},$$

adică $H(\omega)$ este transformata Fourier de tip (3.22) a şirului $\{x_n^{(p)} \cdot v_n r^{-n}\}$ şi cum $u = F_{x(p)}$, iar transformata Fourier a şirului $\{v_n r^{-n}\}$ este funcţia $\omega \mapsto \dfrac{1+r^{-1}e^{-j\omega}}{1-r^{-1}e^{-j\omega}}$, rezultă conform cu (3.7) că

$$H(\omega) = L_x(z)\Big|_{z=re^{j\omega}} = \frac{1}{2\pi j}\int_C \frac{u(t)\,(1 + r^{-1}\,e^{-j\omega}t)}{1 - r^{-1}\,e^{-j\omega}\,t} \cdot \frac{dt}{t},$$

C fiind cercul unitate parcurs în sens pozitiv o singură dată.

Astfel, punînd $t = e^{j\theta}$, se obţine

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{j\theta}) \cdot \frac{1 + r^{-1}\,e^{j(\theta-\omega)}}{1 - r^{-1}\,e^{j(\theta-\omega)}}\,d\theta.$$

Această formulă dă expresia lui $L_x(z)$ pentru $|z| = r > 1$, în termeni de partea reală a lui $L_x(z)$ pentru $|z| = 1$. Trecînd la limită $r \to 1$, $r > 1$, rezultă

$$v(\omega) = \operatorname{Im} H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi} u(e^{j\theta}) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta - \omega}{2}\,d\omega \qquad (3.24)$$

(unde valoarea principală se referă la singularitatea $\theta = \omega$ a integrandului).

Similar se poate arăta că

$$u(\omega) = \operatorname{Re} H(\omega) = x_0 - \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi} v(e^{j\theta}) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta - \omega}{2}\,d\theta. \qquad (3.25)$$

Reamintim că în discuţia precedentă am presupus că domeniul de convergenţă al seriei care defineşte $L_x(z)$ cuprinde cercul unitate (ceea ce este asigurat prin ipoteza $x \in S_+ \cap l_1$).

4.1. **Definiţie.** Pentru orice funcţie continuă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodică de perioadă 2π, se numeşte *transformată Hilbert a lui* g funcţia $H_g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$H_g(\omega) \overset{\Delta}{=} \text{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta - \omega}{2}\,d\theta. \qquad (3.26)$$

Relaţiile date anterior (3.24), (3.25) pot fi atunci scrise sub forma

$$v = \frac{1}{2\pi} H_u,\ u = x_0 - \frac{1}{2\pi} H_v,$$

unde u, v sînt părţile reale ale z-transformatei $L_x(z)$, $|z| > 1$ ale oricărui semnal $x \in S_+ \cap l_1$.

4.2. **Condiţia de fază minimă.** Am văzut că z-transformata unui semnal discret x din $S_+ \cap l_1$ este determinată peste tot dacă se cunoaşte partea reală sau imaginară a ei pe cercul unitate. Studiem acum recuperarea aceleiaşi z-transformate din cunoaşterea modulului (mărimea spectrului semnalului) sau fazei ei tot pe cercul unitate [7].

Fie $L_x(z) = \rho(z)e^{j\alpha(z)}$, unde $\alpha(z)$ este o ramură continuă a argumentului. Presupunem că semnalul x *verifică condiţia de fază minimă*, adică funcţia

$$\hat{H}(z) = \ln \rho(z) + j\alpha(z), \qquad (3.27)$$

care constituie o ramură continuă a lui $\ln L_x(z)$, este z-transformata unui şir $\{\hat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ din $S_+ \cap l_1$ cu valori reale; aşadar $\hat{H}(z) = \sum_{n \geqslant 0} \dfrac{\hat{x}_n}{z^n}$, relaţia valabilă în afara unui disc centrat în origine cu raza $r < 1$ [deci acolo nu pot exista poli sau zerouri ale lui $L_x(z)$ şi acelaşi lucru se întîmplă la infinit]. Din relaţiile (3.25), (3.24) rezultă atunci

$$\ln \rho\,(e^{j\omega}) = \hat{x}_0 - \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi} \alpha(e^{j\theta}) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta - \omega}{2}\,d\theta \qquad (3.28)$$

şi, similar,

$$\alpha(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\,\text{v.p.}\int_{-\pi}^{\pi} \ln \rho\,(e^{j\theta}) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\theta - \omega}{2}\,d\theta. \qquad (3.29)$$

4.3. **Exemplu.** Dăm un exemplu de semnal discret verificînd condiția de fază minimă. Fie $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, cu $x_n = \frac{\sigma(n)}{2^n}$, $n \in \mathbb{Z}$ (fig. 3.4, a). În acest caz, $L_x(z) = \frac{2z}{2z-1}$, deci zerourile și polii lui $L_x(z)$, adică punctele $z = 0$, $z = \frac{1}{2}$ sînt în discul $|z| < \frac{3}{4} < 1$. Funcția $\hat{H}(z) = \ln \frac{2z}{2z-1}$ are derivata $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\hat{H}(z) = -\frac{1}{z(2z-1)}$; reamintim că dacă

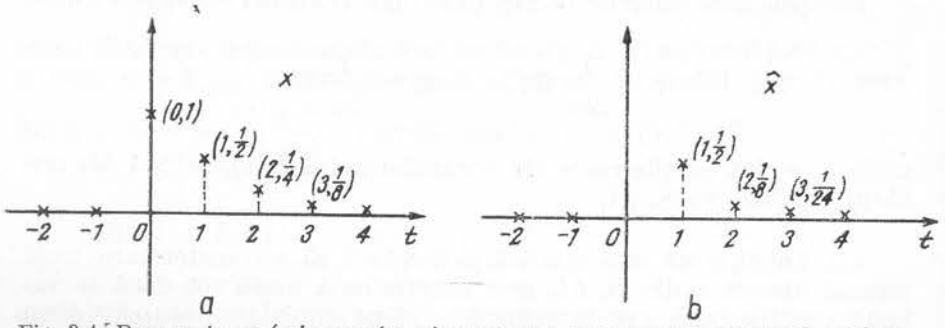


Fig. 3.4. Reprezentarea (prin puncte ×) a valorilor semnalului x satisfăcînd condiția de fază minimă și a semnalului $\hat{x}$.

$\hat{H}(z)$ este z-transformata unui semnal $\hat{x} = \{\hat{x}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, atunci $-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\hat{H}(z) = \frac{1}{2z-1} = \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$ este z-transformata lui $\{n\hat{x}_n\}$, adică $n\hat{x}_n = \frac{\sigma(n-1)}{2^n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Am arătat deci că x satisface condiția de fază minimă (deoarece $\hat{x}$ aparține evident lui $S_+ \cap l_1$ (fig. 3.4, b).

4.4. **Cazul semnalelor discrete periodice.** Fie $\mathscr{T} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ și $x : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$, $x = \{x_n\}_{0\leqslant n\leqslant N-1}$ un semnal real cu N eșantioane $x_n = x(n)$. Prelungim x prin periodicitate de perioadă N la $\mathbb{Z}$, deci x poate fi interpretat ca un semnal discret periodic de perioadă N; vom presupune că semnalul x este cauzal, adică $x_n = 0$ pentru $\frac{N}{2} < n \leqslant N-1$. Presupunem N par și introducem notațiile următoare, similare cu (3.19), (3.20):

$$x_n^{(p)} = \frac{x_n + x_{-n}}{2},\quad x_n^{(i)} = \frac{x_n - x_{-n}}{2},\quad x^{(p)} = \{x_n^{(p)}\},\ x^{(i)} = \{x_n^{(i)}\}, \tag{3.30}$$

$$t = \{t_n\}_{0\leqslant n\leqslant N-1},\ t_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 0 \text{ sau } n = N/2, \\ 2, & \text{dacă } n = 1, 2, \ldots, \frac{N}{2} - 1, \\ 0, & \text{dacă } N/2 < n \leqslant N-1. \end{cases} \tag{3.31}$$

Evident, pentru orice $n \in \mathscr{T}$,

$$x_n = x_n^{(p)} t_n,\quad x_n = x_n^{(i)} t_n + x_0\,\delta_n + x_{\frac{N}{2}}\,\delta\left(n - \frac{N}{2}\right). \tag{3.32}$$

Un calcul imediat arată că transformata Fourier discretă (TFD) a semnalului t este semnalul $F_t = \{g_k\}_{0\leqslant k\leqslant N-1}$, definit conform cu (3.13) prin

$$g_k = \sum_{m=0}^{N-1} t_m W^{km} = \begin{cases} N, & \text{dacă } k = 0, \\ -2\mathrm{j}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi k}{N}, & \text{dacă } k \text{ este impar}, \\ 0, & \text{dacă } k \text{ este par}. \end{cases}$$

Fie $F_x = \{f_k\}_{0\leqslant k\leqslant N-1}$, $f_k = u_k + \mathrm{j}v_k$ transformata Fourier a lui x. Atunci conform primei relații din (3.32) rezultă $x = x^{(p)}t$ și atunci $F_x = \frac{1}{N} F_{x^{(p)}} * F_t$, aplicînd teorema III.3, (a). Așadar $u_k + \mathrm{j}v_k = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u_m \cdot g_{k-m}$ și notînd

$$g_p^* = g_p - N\delta_p = \begin{cases} -2\mathrm{j}\,\mathrm{ctg}\,\frac{\pi p}{N}, & \text{dacă } p \text{ este par}, \\ 0, & \text{dacă } p \text{ este impar}, \end{cases}$$

rezultă

$$u_k + \mathrm{j}v_k = u_k + \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u_m g_{k-m}^*,\quad 0 \leqslant k \leqslant N-1,$$

deci

$$v_k = -\frac{\mathrm{j}}{N}\sum_{m=0}^{N-1} u_m g_{k-m}^*,\quad k \in \mathscr{T}. \tag{3.33}$$

În mod similar, pornind de la relația secundă din (3.32), va rezulta

$$u_k = \frac{\mathrm{j}}{N} \sum_{m=0}^{N-1} v_m g^*_{k-m} + x_0 + x_{\frac{N}{2}} (-1)^k. \tag{3.34}$$

Pe de altă parte, semnalul $\{u_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ este TFD a lui $x^{(p)}$ și, la fel, $\{v_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1} = F_{x^{(i)}}$.

Am probat astfel că din cunoașterea cantităților u_k (respectiv v_k), $0 \leqslant k \leqslant N-1$, se recuperează complet F_x, deci x; calculul efectiv poate utiliza algoritmul TFR, descris în cap. VI.

Pentru orice semnal real $y = \{y_n\}_{0 \leqslant n \leqslant N-1}$, se numește *transformată Hilbert discretă a lui* x semnalul discret $H_y = \{\chi_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ definit prin

$$\chi_k = -\mathrm{j} \sum_{m=0}^{N-1} y_m g^*_{k-m}, \tag{3.35}$$

unde

$$g^*_p = \begin{cases} -2\mathrm{j}\ \mathrm{ctg}\ \dfrac{\pi p}{N}, & \text{dacă } p \text{ este par,} \\ 0, & \text{dacă } p \text{ este impar.} \end{cases}$$

Relațiile (3.33), (3.34) pot fi atunci scrise sub forma

$$v = \frac{1}{N} \cdot H_u, \quad u = x_0 + x_{\frac{N}{2}} \cdot s - \frac{1}{N} \cdot H_v,$$

unde am notat $u = \{u_k\}$, $v = \{v_k\}$, $s = \{(-1)^k\}$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$. Așadar, u, v sînt părțile reală și respectiv imaginară ale transformatei Fourier F_x ale semnalului periodic discret cauzal x.

Se pot reface fără dificultate considerațiile de la punctul 4.2.

4.5. **Transformator Hilbert.** Fie $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \mathrm{l}_1$ un semnal discret cu valori complexe; fie $F_x(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\omega}$, funcția continuă $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$, periodică de perioadă 2π asociată lui x. În 4.1 am stabilit relațiile Hilbert între părțile reală și imaginară ale z-transformatei unui semnal; stabilim acum relații asemănătoare pentru transformata Fourier. Facem ipoteza că $F_x(\omega) = 0$ pentru orice $\omega \in [-\pi, 0)$,

numită uneori *condiția de cauzalitate*. Dacă x ar avea toate eșantioanele reale, atunci ar rezulta $F_x(-\omega) = \overline{F_x(\omega)}$ și deci $F_x = 0$, caz banal pe care îl excludem. Fie $x_n = p_n + \mathrm{j}q_n$, $n \in \mathbb{Z}$, cu $p_n = \mathrm{Re}\ x_n$, $q_n = \mathrm{Im}\ x_n$ și $p = \{p_n\}$, $q = \{q_n\}$.

Este evident că

$$F_p(\omega) = \frac{1}{2} [F_x(\omega) + \overline{F_x(-\omega)}], \quad F_q(\omega) = -\frac{\mathrm{j}}{2} [F_x(\omega) - \overline{F_x(-\omega)}].$$

Din condiția de cauzalitate rezultă direct că $F_x(\omega)$ poate fi determinat dacă sînt cunoscute $F_p(\omega)$ sau $F_q(\omega)$, anume

$$F_x(\omega) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } \omega \in [-\pi, 0), \\ 2F_p(\omega), \text{ dacă } \omega \in [0, \pi), \end{cases}$$

și, similar,

$$F_x(\omega) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } \omega \in [-\pi, 0), \\ 2\mathrm{j}F_q(\omega), \text{ dacă } \omega \in [0, \pi). \end{cases}$$

Aceste formule constituie analogul formulelor (3.21), (3.32).

Introducem semnalul periodic continual h: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de perioadă 2π definit în domeniul-frecvență prin

$$H(\omega) = \begin{cases} \mathrm{j}, \text{ dacă } \omega \in [-\pi, 0), \\ -\mathrm{j}, \text{ dacă } \omega \in [0, \pi), \end{cases}$$

numit *transformator Hilbert ideal*. Evident, $F_q(\omega) = H(\omega) \cdot F_p(\omega)$ și $H^2(\omega) = -1$, $(\forall)\omega \in \mathbb{R}$. Așadar, au loc relațiile

$$F_q = H F_p, \quad F_p = -H F_q. \tag{3.36}$$

Se observă că $H(\omega)$ are modulul $|H(\omega)| = 1$ și faza $\arg H(\omega) = \pm \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$.

Pentru a explicita semnalul $h = \{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ în domeniul-timp astfel încît $F_h = H$, aplicăm formula (3.23), deci

$$h_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\, \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{0} \mathrm{j}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega}\, \mathrm{d}\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} (-\mathrm{j})\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega} \mathrm{d}\omega$$

și, după un calcul imediat, rezultă (fig. 3.5)

$$h_n = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi n}, & \text{dacă } n \text{ este impar,} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ este par.} \end{cases} \tag{3.37}$$

Relațiile $F_q = HF_p$ și $F_p = -HF_q$ devin în domeniul-timp $q = h * p$, $p = -h * q$, sau explicit

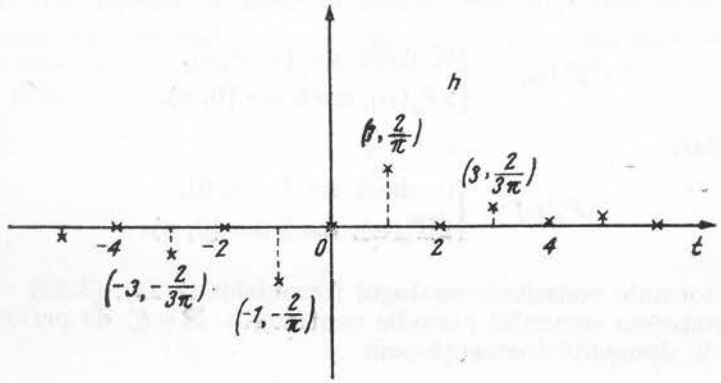


Fig. 3.5. Reprezentarea în domeniul-timp a transformatorului Hilbert ideal h.

$$q_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_{n-k}\, h_k \text{ și } p_n = -\sum_{k \in \mathbb{Z}} q_{n-k}\, h_k . \tag{3.38}$$

Evident h aparține lui l_2, dar nu este cauzal și nici nu aparține lui l_1. Seria $\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-j\omega n}$ converge și are ca sumă $H(\omega)$, în medie pătratică (adică în l_2).

Pentru orice semnal discret $x \in l_1$ cu condiția de cauzalitate $F_x(\omega) = 0$ pentru $\omega \in [-\pi, 0)$, se poate defini semnalul $H_x = h * x$ cu h definit prin (3.37), deci

$$H_x = \{z_n\}_{n \geq 0}, \text{ unde } z_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{n-k}\, x_k , \tag{3.39}$$

numit *transformata Hilbert a lui* x. Se probează imediat că operatorul Hilbert $\mathscr{H}$ astfel definit verifică proprietățile :

(a) $\mathscr{H}^2 = -\mathrm{id}$ (deci $\mathscr{H}^{-1} = -\mathscr{H}$ și $\mathscr{H}^4 = \mathrm{id}$);

(b) $q = H_p$ și $p = -H_q$ [conform cu (3.38)];

(c) $H_{x*y} = H_x * y = x * H_y$,

în condiții ușor de precizat. Se observă analogia cu proprietățile din cazul semnalelor continuale (teorema II.17).

Ne oprim aici cu considerațiile privind transformarea Hilbert discretă. În cele de mai înainte, am stabilit o serie de relații pentru părțile reale și imaginare ale transformatelor Fourier ale unor semnale discrete, în trei cazuri distincte : pentru semnale cauzale din l_1 [formulele (3.24), (3.25)], pentru semnale discrete periodice satisfăcînd o condiție de cauzalitate specifică [formulele (3.33), (3.34)] și pentru semnale complexe $x \in l_1$ astfel încît $F_x(\omega) = 0$ pentru $-\pi \leqslant \omega < 0$ [formulele (3.36)]. Aceste relații pot fi reformulate folosind transformări de tip Hilbert convenabil definite de la caz la caz.

B. STUDIU COMPARATIV AL SEMNALELOR DISCRETE ȘI CONTINUALE

Așa cum s-a arătat în paragrafele anterioare, există o legătură de analogie privind studiul semnalelor discrete și al celor continuale și, în acest sens, discuția s-a purtat în jurul conceptului de transformare. Există însă și alte aspecte privind dualitatea discret-continuu în teoria semnalelor, care se referă la fenomenele de cuantizare și discretizare sau conversie analog digitală.

Un rezultat fundamental în teoria semnalelor, ca și în analiza numerică a sistemelor îl constituie teorema de eșantionare, care dă condiții în care semnale fizice dintr-o clasă suficient de largă sînt determinate prin cunoașterea a numai un număr discret de valori ale lor, adică semnale continuale sînt înlocuite prin semnale digitale convenabile. Un astfel de rezultat a fost obținut în varianta pur matematică de Whittacker [16], în anul 1915, și a fost pus în valoare de Kotelnikov (1933) și în special de către Shannon (după 1948); au apărut atunci o serie de aplicații legate de transmiterea

semnalelor deterministice sau aleatoare, avînd funcția spectrală cu suport mărginit (caz care cuprinde multe din semnalele întîlnite în practică, deoarece caracteristicile de transmisie ale oricărui sistem fizic — dispozitive audiovideo, voce umană, captori etc. — au valori mici la frecvențe foarte mari).

§ 5. Corespondențe remarcabile între semnale discrete și semnale continuale

5.1. **Reprezentări ale unor spații de șiruri.** Fie $L_1(\mathbb{T})$ mulțimea funcțiilor $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ care sînt periodice de perioadă 2π, integrabile Lebesgue pe intervalul $[-\pi, \pi]$; se vor identifica orice două funcții care coincid a.p. Această mulțime are o structură de spațiu Banach relativ la norma definită prin (v. anexa 2)

$$\| \varphi \| = \int_{-\pi}^{\pi} | \varphi(t) | \, dt, \quad (\forall)\, \varphi \in L_1(\mathbb{T}).$$

Similar $L_2(\mathbb{T})$ este spațiul funcțiilor măsurabile Lebesgue $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodice de perioadă 2π de pătrat integrabil. Acesta este un spațiu Hilbert relativ la produsul scalar

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \cdot \overline{\psi(t)} \, dt, \quad (\forall)\, \varphi, \psi \in L_2(\mathbb{T}).$$

Evident, $L_2(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$, deoarece $1 \in L_2(\mathbb{T})$ și pentru orice $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$, este definit $\langle \varphi, 1 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) \, dt$, deci $\varphi \in L_1(\mathbb{T})$.

Prezența literei $\mathbb{T}$ se explică prin faptul că se notează de obicei $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, mulțimea numerelor reale, în care se identifică între ele orice două numere reale care diferă printr-un multiplu întreg de 2π; această mulțime este în bijecție cu mulțimea numerelor complexe de modul 1 (prin corespondența $\hat{x} \mapsto e^{jx}$) și se mai numește *torul 1-dimensional*. Funcțiile $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodice de perioadă 2π pot fi identificate cu funcțiile arbitrare $\mathbb{T} \to \mathbb{C}$.

5.1. **Definiție.** Pentru orice semnal $x \in l_1$, $x = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, se numește *transformata Fourier directă* (respectiv *inversă*) *a lui* x,

funcția $F_x : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ (respectiv $F_x^{-1} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$) din $L_1(\mathbb{T})$, definită prin

$$F_x(t) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-jnt} \tag{3.40}$$

și respectiv

$$F_x^{-1}(t) \stackrel{\Delta}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{jnt}. \tag{34.1}$$

Este evident că seriile din membrul al doilea sînt absolut convergente și de asemenea uniform convergente în raport cu t.

Reamintim apoi că pentru orice funcție $\varphi \in L_1(\mathbb{T})$ *transformata sa Fourier directă* (respectiv *inversă*) este șirul coeficienților Fourier ai lui φ, adică semnalul discret

$$F_\varphi = \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \text{ (respectiv } F_\varphi^{-1} = \{d_n\}_{n \in \mathbb{Z}}),$$

unde

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{-jnt} \, dt \left(\text{respectiv } d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{jnt} \, dt \right), \tag{34.2}$$

$(\forall) n \in \mathbb{Z}$. Se mai scrie $x \overset{\mathscr{F}}{\mapsto} F_x$, $\varphi \overset{\mathscr{F}}{\mapsto} c_n$ etc.

Lema 1 (Parseval). (a) *Dacă* $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$, *atunci* $F_\varphi \in l_2$;
(b) *Pentru orice* $\varphi, \psi \in L_2(\mathbb{T})$, *avem* $\langle F_\varphi, F_\psi \rangle = 2\pi \langle \varphi, \psi \rangle$.
În particular, $\| F_\varphi \| = \sqrt{2\pi} \| \varphi \|$ *și* $\mathscr{F}$ *este aplicație injectivă* $L_2(\mathbb{T}) \to l_2$. *Afirmații similare sînt valabile pentru aplicația* $\mathscr{F}^{-1}$.
Lema 1 este un rezultat binecunoscut din teoria seriilor Fourier.

Lema 2. (a) *Dacă* $x \in l_1$, *atunci* $F^{-1} F_x = x$.
(b) *Dacă* $\varphi \in L_2(\mathbb{T})$ *și* $F_\varphi^{-1} \in l_1$, *atunci* $F F_\varphi^{-1} = \varphi$.

Demonstrație. (a) Fie $\varphi = F_x$, deci $\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-jnt}$ conform cu (3.40) și atunci

$$F_\varphi^{-1}(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(t) e^{jpt} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jpt} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-jnt} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(p-n)t} \, dt = x_p, \, (\forall)\, p \in \mathbb{Z}.$$

Așadar, $F_\varphi^{-1} = x$ și $F^{-1} F_x = F_\varphi^{-1} = x$.

(b) Fie $y = F_\varphi^{-1}$; conform cu (a) avem $F^{-1}F_y = y$, deoarece am presupus $y \in l_1$. Deoarece aplicația F^{-1} este injectivă, rezultă $\varphi = F_y$, deci $\varphi = FF_\varphi^{-1}$.

5.2. **Definiție.** Un semnal discret $x \in S_d$, $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ se numește *rapid descrescător* dacă $(\forall)\alpha > 0$, $n^\alpha x_n \to 0$ pentru $n \to \infty$ și pentru $n \to -\infty$.

Vom nota mulțimea acestor semnale cu s; evident, s este un subspațiu vectorial al lui l_1 (deoarece dacă $x \in s$, atunci $n^2 x_n \to 0$ pentru $|n| \to \infty$). Șirul $\{e^{-n^2}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ este un element din s.

Lema 3. (a) *Dacă* $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$, *atunci* F_φ *și* F_φ^{-1} *aparțin lui* s.
(b) *Reciproc, dacă* $x \in s$, *atunci* F_x *și* F_x^{-1} *aparțin lui* $C^\infty(\mathbb{T})$.

Demonstrație. $C^k(\mathbb{T})$ reprezintă spațiul funcțiilor $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ de clasă C^k, periodice de perioadă 2π.
(a) Observăm mai întîi că dacă $\varphi \in C^1(\mathbb{T})$ și dacă notăm $x = F_\varphi$, $y = F_{\varphi'}$, atunci conform cu (3.42) avem

$$y_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(t)\, e^{-jnt}\, dt = jnx_n, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{Z},$$

după o integrare prin părți. Similar, notînd $x^{(p)} = F_\varphi^{(p)}$, $p \geqslant 0$, rezultă că $x_n^{(p)} = (jn)^p x_n^{(0)}$, deci $n^p x_n = \frac{1}{j^p} x_n^{(p)}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{Z}$. Dar

$$x_n^{(p)} = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi^{(p)}(t)\, e^{-jnt}\, dt \to 0 \text{ pentru } |n| \to \infty.$$

Așadar, $x \in s$. În mod similar se raționează pentru F_φ^{-1}.
(b) Fie $\varphi = F_x$, definit prin (3.40). Cum șirul $\{nx_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ aparține lui l_1 $\left(\text{căci } x \in s, \text{ deci } n^3 x_n \to 0, \text{ adică } |nx_n| \leqslant \frac{M}{n^2}\right)$, rezultă că funcția φ este derivabilă și $\varphi'(t) = -j\sum_{n\in\mathbb{Z}} nx_n e^{-jnt}$. Repetînd raționamentul, rezultă că φ este infinit derivabilă etc.

Teorema III.4. *Aplicațiile* $\mathcal{F} : s \to C^\infty(\mathbb{T})$ *și* $\mathcal{F}^{-1} : C^\infty(\mathbb{T}) \to s$ *sînt izomorfisme* $\mathbb{C}$*-liniare, inverse una alteia.*

Demonstrație. Liniaritatea este evidentă. Conform lemei 2, (a), pentru orice $x \in s$, avem $F^{-1}F_x = x$. Apoi conform lemei 3, (b), pentru

$\varphi = F_x$, rezultă $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T})$, iar lema 3, (a) arată că $F_\varphi^{-1} \in s \subset l_1$. Atunci lema 2, (b) arată că $F(F_\varphi^{-1}) = \varphi$ și teorema este complet probată.

5.3. **Observație.** Teorema precedentă poate fi precizată, definind topologii convenabile pe spațiile s, $C^\infty(\mathbb{T})$ astfel încît $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ să devină nu numai izomorfisme algebrice, dar și topologice. Rezultatul cuprins în teorema III.4 poate fi formulat spunînd că o clasă de semnale discrete (anume s) poate fi identificată cu o clasă de semnale continue [anume $C^\infty(\mathbb{T})$].

5.4. **Cazul semnalelor de energie finită.** Stabilim aici o legătură între spațiile L_2 și l_2, distinctă de cea binecunoscută din teoria clasică Fourier-Plancherel [8].

Reamintim că dacă $f \in L_2$, atunci există

$$F_f(s) = \underset{R\to\infty}{\text{l.i.m.}} \int_{-R}^{R} f(t)\, e^{-st}\, dt \text{ (limită în norma din } L_2)$$

pentru $s = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, și funcția $F_f(j\omega)$ aparține lui L_2. Notăm

$$\Phi = \{F_f(j\omega) \mid f \in L_2\}, \text{ deci } \Phi \subset L_2.$$

În plus, $(\forall) f, g \in L_2$, are loc relația

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\overline{g(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} F_f(s)\,\overline{F_g(s)}\, ds. \qquad (3.43)$$

Pe de altă parte, dacă $x \in l_2$, $x = \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, atunci există

$$F_x(\omega) = \underset{N\to\infty}{\text{l.i.m.}} \sum_{n=-N}^{N} x_n e^{-jn\omega} \text{ (limită în norma din } l_2) \qquad (3.44)$$

și aparține lui $L_2(\mathbb{T})$. Notăm $z = e^{j\omega}$, deci $F_x(\omega) = L_x(z)$, $|z| = 1$. Notăm $\mathcal{X} = \{F_x \mid x \in l_2\} \subset L_2(\mathbb{T})$. Pentru orice x, $y \in l_2$ avem

$$\langle x, y\rangle \overset{\Delta}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n y_n = \frac{1}{2\pi j}\int_{|z|=1} F_x(z)\cdot\overline{F_y(z)}\cdot\frac{1}{z}\, dz. \qquad (3.45)$$

Transformarea conformă definită prin $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ transformă semiplanul $\operatorname{Re} z > 0$ pe discul unitate $|w| < 1$. Asocierea

$$\varphi(z) \mapsto \frac{\sqrt{2}}{z+1}\,\varphi\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \tag{3.46}$$

definește o aplicație $\theta : \Phi \to \mathscr{Z}$.

Teorema III.5 [13]. *Compunerea funcțiilor* $L_2 \xrightarrow{\mathscr{F}} \Phi \xrightarrow{\theta} \mathscr{Z} \xrightarrow{\mathscr{F}^{-1}} l_2$, $u = \mathscr{F}^{-1} \circ \theta \circ \mathscr{F}$ *este un izomorfism* $\mathbb{C}$*-liniar* $L_2 \to l_2$, *care conservă produsele scalare.*

Demonstrație. Este evident că aplicațiile $L_2 \xrightarrow{\mathscr{F}} \Phi$, $f \mapsto F_f$ și $l_2 \xrightarrow{\mathscr{F}} \mathscr{Z}$, $x \mapsto F_x$ sînt $\mathbb{C}$-liniare și surjective. De asemenea aplicația θ este $\mathbb{C}$-liniară și surjectivă, deci u va avea aceeași proprietate. Rămîne de arătat injectivitatea lui u. Fixăm $(\forall) f, g \in L_2$; conform formulei (3.45), avem

$$\langle u(f), u(g)\rangle = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{|z|=1} \theta(F_f) \cdot \overline{\theta(F_g)} \cdot \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{|z|=1} \frac{2}{(z+1)^2} \cdot F_f\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \cdot \overline{F_g\left(\frac{z-1}{z+1}\right)}\,\mathrm{d}z$$

și făcînd substituția $w = \dfrac{z-1}{z+1}$, rezultă

$$\langle u(f), u(g)\rangle = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} F_f(w) \cdot \overline{F_g(w)}\,\mathrm{d}w = \langle f, g\rangle,$$

ultima relație rezultînd din (3.43). Așadar, u conservă produsele scalare. În particular, $\langle u(f), u(f)\rangle = \langle f, f\rangle$ și dacă $u(f) = 0$, $f \in L_2$, atunci $f = 0$, deci aplicația u este injectivă.

5.5. **Observație.** Există și alte izomorfisme $\mathbb{C}$-liniare $L_2 \to l_2$ (de exemplu cel tipic, prin care se asociază oricărei funcții din L_2 șirul coeficienților ei Fourier). Dar izomorfismul u din teorema III.5 are o proprietate specifică, anume o legătură remarcabilă cu polinoamele Laguerre λ_n (cf. [13]). Fie $f \in L_2$ și

$$u(f) = \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}. \tag{3.47}$$

Atunci

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \lambda_n(t), \tag{3.48}$$

unde x_n este definit prin (3.47). Așadar, eșantioanele semnalului discret $\{x_n\}_n$ pentru $n \geqslant 1$ corespund dezvoltării Laguerre (3.48) a lui $f(t)$.

5.6. **Aplicație.** Dăm o aplicație a teoremei III.5 care sugerează posibilitatea de a transfera în domeniul discret unele concepte fizice continuale și invers. Convenim să numim *filtru analogic* (respectiv *digital sau numeric*) orice operator liniar continuu $L_2 \xrightarrow{P} L_2$ (respectiv $l_2 \xrightarrow{p} l_2$). Un astfel de filtru se numește *filtru invariant în timp* dacă are loc implicația

$$\{f(t) \xrightarrow{P} g(t)\} \Rightarrow \{f(t+\tau) \xrightarrow{P} g(t+\tau)\},\ (\forall)\,\tau \in \mathbb{R},$$

și respectiv

$$\{x \xrightarrow{p} y\} \Rightarrow \{x_{n+k}\} \xrightarrow{p} \{y_{n+k}\},\ (\forall)\,k \in \mathbb{Z}.$$

De asemenea, filtrul P (respectiv p) se numește *cauzal* dacă

$$\{f(t) = 0 \text{ pentru } t < 0\} \Rightarrow \{g(t) = 0 \text{ pentru } t < 0\}, \text{ unde } g = P(f),$$

respectiv

$$\{x_n = 0 \text{ pentru } n \leqslant 0\} \Rightarrow \{y_n = 0 \text{ pentru } n \leqslant 0\}, \text{unde } y = p(x).$$

Definiții mai generale vor fi date în cap. IV.

Corolar. *Funcția* u *din teorema* III.5 *realizează o corespondență biunivocă între filtrele analogice și filtrele digitale, cu păstrarea proprietăților de invarianță în timp și cauzalitate.*

Demonstrație. Fie P un filtru analogic oarecare; atunci $p = i \circ P \circ u^{-1}$ va fi un filtru digital bine determinat și cum u este izomorfism $\mathbb{C}$-liniar, asocierea $P \mapsto p$ este bijectivă. Dacă P este invariant în timp, atunci notînd cu $h(t)$ răspunsul-impuls al filtrului P, rezultă că dacă $f(t) \xrightarrow{P} g(t)$, atunci $g = f * h$, deci $F_g = F_f \cdot F_h$, adică $\theta(F_g) = \theta(F_f) \cdot H$, adică $u(f) = u(g) * F^{-1}(H)$, unde am notat $H = F_h$. Așadar, operatorul $p : u(f) \to u(g)$ este de tip convoluție, deci este invariant în timp [conform demonstrației teoremei II.3, (a)]. În fine, cauzalitatea lui p rezultă din cauzalitatea lui P.

§ 6. Studiu matematic al eșantionării semnalelor continuale

6.1. **Spații Hilbert cu nucleu reproducător.** Stabilim acum încă o legătură între semnale continuale și semnale discrete, legată de eșantionarea semnalelor care va fi studiată mai tîrziu. Sînt necesare unele pregătiri.

Fie H un spațiu Hilbert (real sau complex) fixat. Un șir $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ de elemente din H se zice *total* dacă orice element din H se aproximează în normă printr-o combinație liniară finită de φ_n-uri (adică subspațiul S generat de φ_n-uri este dens în H). Șirul $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ se zice *complet* dacă ori de cîte ori $f \in H$ și $\langle f, \varphi_n\rangle = 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, se deduce că $f = 0$. Reamintim că relația clasică a lui Parseval arată că dacă $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ este un șir ortonormal și dacă $f \in H$, atunci $f \in \bar{S}$ dacă și numai dacă $\sum\limits_{k\geqslant 1} |c_k|^2 = \|f\|^2$, unde $c_k = \langle f, \varphi_k\rangle$, $k \geqslant 1$; în particular, un șir ortonormal $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ este total dacă și numai dacă pentru orice element $f \in H$ avem $\sum\limits_{k\geqslant 1} |c_k|^2 = \|f\|^2$.

Lema 4. *Un șir $\{\psi_n\}_{n\geqslant 1}$ de elemente dintr-un spațiu Hilbert H este complet dacă și numai dacă este total.*

Demonstrație. Folosind în prealabil procedeul Gram-Schmidt, putem presupune de la început că șirul $\{\psi_n\}_{n\geqslant 1}$ este ortonormal.

Dacă $\{\psi_n\}_{n\geqslant 1}$ ar fi complet, fie $f \in H$, $c_k = \langle f, \psi_k\rangle$, $k \geqslant 1$. Conform inegalității lui Bessel avem $\sum\limits_{k\geqslant 1} |c_k|^2 < \infty$. Fie $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k\psi_k$; atunci pentru $m > n$, $\|s_m - s_n\|^2 = \left\|\sum\limits_{k=n+1}^{m} c_k\psi_k\right\|^2 = \sum\limits_{k=n+1}^{m} |c_k|^2$, deci șirul $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ este șir Cauchy în H, deci converge către un element $g \in H$. Dar coeficienții Fourier ai lui g vor fi $\{c_k\}_{k\geqslant 1}$, deci $f = g$. Rezultă astfel că $s_n \to f$ și cum $s_n \in S$, atunci $f \in \bar{S}$, deci șirul $\{\psi_n\}_{n\geqslant 1}$ este total.

Invers, dacă șirul $\{\psi_n\}_{n\geqslant 1}$ este total și dacă $f \in H$ are proprietatea $\langle f, \psi_n\rangle = 0$, $(\forall)\ n \geqslant 1$, atunci toți coeficienții Fourier ai lui f relativ la șirul $\{\psi_n\}$ sînt nuli și atunci, din relația lui Parseval, se deduce că $\|f\| = 0$, deci $f = 0$ și în acest mod șirul $\{\psi_n\}_{n\geqslant 1}$ rezultă complet. Lema 4 este probată.

Se știe că șirul de funcții $\varphi_n(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jnt}$, $n \in \mathbb{Z}$, este un șir ortonormal complet în $L_2[-\pi, \pi]$. Considerăm șirul de funcții

$\psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, definit prin

$$\psi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{jnt}, & \text{dacă } t \in [-\pi, \pi], \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

Evident, șirul $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ este ortonormal în L_2 și necomplet (deoarece orice funcție nenulă care este nulă în afara intervalului $[-\pi, \pi]$ este ortogonală la toate ψ_n pe $\mathbb{R}$). Cum transformarea Fourier este un izomorfism $\mathbb{C}$-liniar $\mathcal{F} : L_2 \to L_2$, $\varphi(t) \mapsto F_\varphi(\omega)$, care păstrează produsele scalare (conform teoremei II.14), rezultă că șirul de transformate $\{F\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ este de asemenea ortonormal și incomplet în L_2. Notăm cu H_π închiderea topologică a subspațiului liniar al lui L_2 generat de funcțiile $F\psi_n$, $n \in \mathbb{Z}$. Desigur, H_π este un spațiu Hilbert (ca subspațiu închis al lui L_2). O proprietate importantă a lui H_π este aceea că are nucleu reproducător, de unde vor decurge consecințe remarcabile, culminînd cu o teoremă de eșantionare.

Dacă A este o mulțime oarecare și H este un spațiu Hilbert (complex) de funcții $A \to \mathbb{C}$, relativ la un produs scalar $\langle f, g\rangle$, $f, g \in H$, se spune că H are *nucleu reproducător* $K(x, y)$, $K : A \times A \to \mathbb{C}$ dacă sînt îndeplinite condițiile:

1) pentru orice $y \in A$, funcția $K_y : A \to \mathbb{C}$ definită prin $K_y(x) = K(x, y)$ aparține lui H;

2) pentru orice $y \in A$ și $f \in H$, avem $f(y) = \langle f, K_y\rangle$.

Este evident că dacă nucleul reproducător există, atunci acesta este unic (într-adevăr, fie K, K' două astfel de nuclee; pentru orice $f \in H$ am avea $\langle f, K_y\rangle = \langle f, K'_y\rangle$, deci $K_y = K'_y$, $(\forall)\ y \in A$, deci $K = K'$).

Lema 5. *Fie $H \subset L_2$ un subspațiu închis format cu funcții continue $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Atunci H este un subspațiu Hilbert avînd nucleu reproducător.*

Demonstrație. Fixăm $y \in \mathbb{R}$. Pentru orice $\varepsilon > 0$ fixăm o funcție continuă $\varphi_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încît

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_\varepsilon(t)\, dt = 1 \text{ și supp } \varphi_\varepsilon \subset (y - \varepsilon, y + \varepsilon),$$

deci $\varphi_\varepsilon \in L_2$. Definim atunci funcționalele liniare

$$T_\varepsilon : H \to \mathbb{C},\ f \mapsto \langle f, \varphi_\varepsilon\rangle,$$

care sînt evident mărginite (deoarece $|T_\varepsilon(f)| \leqslant \|\varphi_\varepsilon\| \cdot \|f\|$); arătăm că

$$\lim_{\varepsilon \to 0} T_\varepsilon(f) = f(y), \overset{\forall}{} (\forall) f \in H, \tag{3.49}$$

şi pentru aceasta este suficient să observăm că $|T_\varepsilon(f) - f(y)| = |\langle f, \varphi_\varepsilon\rangle - \langle f(y), \varphi_\varepsilon\rangle| = |\langle f - f(y), \varphi_\varepsilon\rangle|$ şi să folosim faptul că f este continuă, ceea ce este asigurat prin ipoteză.

Din relaţia (3.49) rezultă în particular că $(\forall) f \in H$ există $m_f > 0$ astfel încît $|T_\varepsilon(f)| \leqslant m_f$ pentru orice $\varepsilon > 0$. Conform principiului mărginirii uniforme [10], mulţimea de numere reale $\{\|T_\varepsilon\|, \varepsilon > 0\}$ este majorată, deci există un număr $M > 0$ astfel încît $|T_\varepsilon(f)| \leqslant M\|f\|$, pentru orice $\varepsilon > 0$. Făcînd $\varepsilon \to 0$ şi folosind (3.49), rezultă relaţia

$$|f(y)| \leqslant M\|f\|, \quad (\forall) f \in H. \tag{3.50}$$

Considerăm acum funcţionala liniară $V : H \to \mathbb{C}$, $f \mapsto f(y)$, care este continuă conform relaţiei (3.50), deci conform teoremei lui Riesz de reprezentare a funcţionalelor liniare continue pe un spaţiu Hilbert, există şi este unic un element $K_y \in H$ astfel încît $V = \langle ., K_y\rangle$, adică $f(y) = \langle f, K_y\rangle$ pentru orice $f \in H$. Punînd $K(x, y) = K_y(x)$, se verifică evident condiţiile din definiţia nucleului reproducător pe H.

Lema 6. *Fie H un spaţiu Hilbert de funcţii $A \to \mathbb{C}$, avînd nucleu reproducător $K : A \times A \to \mathbb{C}$.*

(a) *Pentru orice $x, y \in A$ avem $K(y, x) = \overline{K(x, y)} = \langle K_x, K_y\rangle$.*

(b) *Presupunem că un şir de elemente $\{u_n\}_{n \geqslant 1}$ din H converge în normă către $u \in H$. Dacă există $M > 0$ astfel încît $|K(y, y)| \leqslant M$ pentru orice $y \in A$, atunci şirul de funcţii u_n este uniform convergent pe A către u.*

Demonstraţie. (a) Avem succesiv

$$K(y, x) \overset{\text{cf.1)}}{=} K_x(y) \overset{\text{cf. 2)}}{=} \langle K_x, K_y\rangle = \overline{\langle K_y, K_x\rangle} \overset{\text{cf. 2)}}{=} \overline{K_y(x)} \overset{\text{cf.1)}}{=} \overline{K(x, y)}.$$

(b) Fie $(\forall) y \in A$ fixat. Conform cu (a) avem $K(y, y) = \|K_y\|^2$, deci $\|K_y\| \leqslant \sqrt{M}$. Atunci pentru orice $y \in A$ avem $u_n(y) - u(y) = \langle u_n, K_y\rangle - \langle u, K_y\rangle = \langle u_n - u, K_y\rangle$ şi conform inegalităţii lui Schwartz, rezultă $|u_n(y) - u(y)| \leqslant \sqrt{M}\|u_n - u\|$. Dacă $\varepsilon > 0$ este arbitrar

fixat, atunci pentru orice n suficient de mare, $\|u_n - u\| < \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{M}}$, deci pentru orice $y \in A$ rezultă $|u_n(y) - u(y)| < \varepsilon$, adică $u_n \to u$ uniform pe A.

Lema 7. *Spaţiul Hilbert H_π are nucleu reproducător şi, în plus, şirul de funcţii*

$$K_n(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)}, & \text{dacă } t \neq n, \\ 1, & \text{dacă } t = n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z},$$

este ortonormal complet în H_π.

Demonstraţie. Am definit H_π ca fiind închiderea subspaţiului generat de $F\psi_n$, $n \in \mathbb{Z}$, în L_2. Folosind lema 4, se poate da o explicitare utilă a funcţiilor din H_π, anume : dacă $g \in L_2$, relaţia $\langle g, F\psi_n\rangle = 0$ este echivalentă cu $\langle F^{-1}g, \psi_n\rangle = 0$, produsul scalar fiind obţinut prin integrare pe intervalul $[-\pi, \pi]$, conform definiţiei lui ψ_n. Dar şirul $\psi_n|_{[-\pi, \pi]} = \varphi_n$, $n \in \mathbb{Z}$, este complet, deci $\langle g, F\psi_n\rangle = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{Z} \rightleftarrows F^{-1}g = 0$ pe intervalul $[-\pi, \pi]$. Şirul $\{F\psi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ fiind total în H_π, el este complet (conform lemei 4) şi atunci va rezulta că

$$H_\pi = \{g \in L_2 \mid F^{-1}g = 0 \text{ în afara intervalului } [-\pi, \pi]\}.$$

Aşadar, H_π este mulţimea funcţiilor $g \in L_2$ astfel încît să existe $f \in L_2$ cu $g = F_f$ şi $f = 0$ în afara intervalului $[-\pi, \pi]$, deci în final H_π coincide cu mulţimea funcţiilor de forma

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-jxt}\, dt, \text{ cu } f \in L_2. \tag{3.51}$$

În particular, fiecare funcţie din H_π este o funcţie continuă $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ şi aplicînd lema 5, rezultă că spaţiul H_π are nucleu reproducător.

Prin verificare directă a proprietăţilor 1), 2) se poate vedea că nucleul reproducător al lui H_π este

$$K(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin \pi(x - y)}{\pi(x - y)}, & \text{dacă } y \neq x, \\ 1, & \text{dacă } y = x, \end{cases}$$

deci $K(x, y) = \text{sa}\,(x - y)$, „sa" fiind funcția de eșantionare definită în formula (2.2).

Rămîne de probat că șirul $K_n(t) = K(t, n)$, $n \in \mathbb{Z}$, este ortonormal complet în H_π. Conform lemei 6, (a) avem pentru $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$\langle K_m, K_n \rangle = K(n, m) = \delta_{mn} = \begin{cases} 0, \text{ dacă } n \neq m, \\ 1, \text{ dacă } n = m, \end{cases}$$

deoarece $\sin p\pi = 0$ pentru orice $p \in \mathbb{Z}$. În fine, probăm completitudinea șirului K_n, $n \in \mathbb{Z}$. Fie $g \in H_\pi$ fixat astfel încît $\langle g, K_n \rangle = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{Z}$. Conform condiției 2) avem $g(n) = 0$. Dar există $f \in \mathrm{L}_2$ astfel încît să aibă loc relația (3.51), deci

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nt}\, \mathrm{d}t = 0, \quad (\forall)\, n \in \mathbb{Z}.$$

Dar atunci rezultă $f = 0$ a.p., deci $g = 0$ în L_2.

6.2. Teorema lui Whittaker-Kotelnikov-Shannon (teorema WKS). Teoria dezvoltată la punctul precedent are ca scop demonstrarea rezultatului principal al acestui capitol, anume :

Teorema III.6 (teorema WKS). *Fie g o funcție din L_2 de forma* (3.51). *Atunci seria $\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n)\, K_n(t)$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$ și are ca sumă $g(t)$, adică are loc formula*

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n) \cdot \frac{\sin \pi(t - n)}{\pi(t - n)}, \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}. \tag{3.52}$$

Demonstrație. În lema 7 am evidențiat șirul $\{K_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ortonormal complet din spațiul H_π. Atunci pentru orice funcție $g \in H_\pi$ se poate considera seria Fourier a lui g relativ la șirul $\{K_n\}$ și notînd $c_n = \langle g, K_n \rangle$, avem $g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n K_n(t)$, convergența fiind în norma din L_2. Pe de altă parte, aplicînd lema 6, (b), rezultă că seria $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n K_n(t)$ este uniform convergentă pe $\mathbb{R}$, deoarece $K(t, t) = 1$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. În fine, făcînd $t = m$, $m \in \mathbb{Z}$, în relația precedentă, rezultă

$$g(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n K_n(m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n K(m, n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \delta_{mn} = c_m,$$

deci

$$g(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n)\, K_n(t).$$

Teorema WKS este demonstrată. În limbaj de semnale, această teoremă arată că orice semnal continual $g \in \mathrm{L}_2$ este bine determinat prin semnalul discret $\{g(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.

Dăm acum o altă demonstrație a teoremei III.6, folosind rezultate din cap. II. Mai întîi reformulăm enunțul, cu notații schimbate.

Teorema III. 6′. *Fie $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un semnal din L_2 [cu bandă mărginită de frecvență [adică există $f > 0$ astfel încît funcția $F_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\, \mathrm{d}t$ să fie nulă pentru $|\omega| \geqslant f$]]. Atunci*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{2f}\right) \cdot \text{sa}\,[\pi(2ft - n)]. \tag{3.53}$$

Demonstrație. Probăm mai întîi relația

$$F_x(\omega) = [\sigma(\omega + f) - \sigma(\omega - f)]\, [F_x(\omega) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - 2nf)]. \tag{3.54}$$

Folosind relația (2.50), avem de verificat că

$$F_x(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\sigma(\omega + f) - \sigma(\omega - f)] \cdot F_x(\omega - 2nf).$$

Dacă $|\omega| \geqslant f$, atunci $F_x(\omega) = 0$ conform ipotezei și de asemenea $\sigma(\omega + f) - \sigma(\omega - f) = 0$. Pe de altă parte, dacă $|\omega| < f$, atunci $\omega - 2nf$ aparține intervalului $(-f, f)$ numai pentru $n = 0$; așadar, dacă $n \neq 0$, atunci $F_x(\omega - 2nf) = 0$ și relația de demonstrat revine la $F_x(\omega) = F_x(\omega)$. Identitatea (3.54) fiind probată, aplicăm F_x^{-1} celor doi membri, folosind teorema II.14 ($F^{-1}F_x = 2\pi x$ pentru $x \in \mathrm{L}_2$) ; se va obține

$$x(t) = \frac{\sin 2\pi ft}{\pi t} * \left[x(t) \cdot \frac{1}{2f} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \left(t - \frac{n}{2f} \right) \right],$$

adică

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(t - \frac{n}{2f}\right) \cdot \left[\frac{\sin 2\pi ft}{2\pi ft} * x(t)\right] =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} x\left(\frac{n}{2f}\right) \cdot \frac{\sin \pi(2ft-n)}{\pi(2ft-n)},$$

tocmai relația căutată.

Formula (3.53) poate fi scrisă mai condensat astfel:

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x(t) \cdot (\psi * \delta_{n/(2f)}), \quad \text{unde} \quad \psi(t) = \text{sa}\,(2\pi ft).$$

6.3. **Eșantionare și interpolare complexă.** Dăm o extindere a teoremei III.6, din care va reieși totodată o legătură strînsă între eșantionarea în domeniul timp și interpolarea Lagrange în domeniul complex. Sînt necesare unele pregătiri de analiză complexă.

Fie o funcție complexă $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$; aceasta se numește *întreagă* dacă este olomorfă în întreg planul complex, deci fără singularități la distanță finită (exemple: polinoamele, exp, sin, cos, z^n etc.). Pentru orice $r>0$, se poate considera numărul real $M_f(r) = \sup_{|z|\leqslant r} |f(z)|$ și conform principiului maximului, acest supremum este atins chiar pe frontiera $|z| = r$ a discului $|z|\leqslant r$ (exemple: pentru $f(z) = e^z$ avem $M_f(r) = e^r$, pentru $f(z) = \sin z$ avem $M_f(r) = \text{sh}\, r$). Se știe că dacă f nu este polinom, atunci $M_f(r)$ crește mai repede decît orice putere r^n, $n\geqslant 1$, pentru $r\to\infty$; așadar în studiul creșterii lui $M_f(r)$ este utilă comparația cu funcții mai rapid crescătoare decît r^n. O funcție întreagă se numește *de ordin finit* dacă există $\alpha>0$ astfel încît $M_f(r) < \exp(r^\alpha)$ pentru orice r suficient de mare; în acest caz, marginea inferioară a acestor α se numește *ordinul lui f* (exemple: funcțiile întregi exp z^n, exp (jz^n), sin z^n au ordinul n, $n\geqslant 1$).

Fie $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$ un șir de numere complexe distincte tinzînd la infinit, astfel încît $|z_{n+1}| > |z_n|$, $(\forall)\, n\geqslant 1$; funcția întreagă

$$\varphi(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\cdot \exp\,(P_n(z)), \text{ unde } P_n(z) = \sum_{p=1}^{k_n} \frac{z^p}{p\cdot z_n^p}, \qquad (3.55)$$

cu k_n întregi aleși convenabili, are proprietatea că are ca mulțime de zerouri simple tocmai $\{z_n\}_{n\geqslant 1}$; există însă și alte funcții întregi cu această proprietate.

Dacă $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$ este un șir de numere complexe date, problema Lagrange pentru șirurile $\{z_n\}$, $\{a_n\}$, adică determinarea unei funcții întregi f astfel încît $f(z_n) = a_n$, $n\geqslant 1$, admite soluții în ipoteze convenabile asupra șirului $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, de exemplu are soluția

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n \varphi(z)}{\varphi'(z_n)\,(z - z_n)} \qquad (3.56)$$

cu φ definit în (3.55) și cu condiția ca seria din membrul al doilea să fie uniform convergentă pe orice compact. Desigur, șirurile $\{z_n\}$, $\{a_n\}$ pot fi indexate nu numai după valori $n\geqslant 1$, dar și după toate valorile întregi $n\in\mathbb{Z}$.

Considerăm cazul particular $z_n = nT$, $n\in\mathbb{Z}$, cu $T>0$ real fixat (pas de eșantionare). În acest caz se poate lua $\varphi(z) = \sin\frac{\pi z}{T}$. Pentru orice șir $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de numere complexe cu proprietatea că $(\forall)\alpha>0$, $(\exists)A>0$ și $n(\alpha)$ astfel că $|a_n| < \frac{A}{|n|^{1+\alpha}}$ pentru orice $n\geqslant n(\alpha)$, seria de funcții întregi (3.56) devine

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \frac{\sin\frac{\pi z}{T}}{\frac{\pi}{T}\cos\left(\frac{\pi}{T}\cdot nT\right)(z-nT)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{T}(z-nT)}{\frac{\pi}{T}(z-nT)} =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \cdot \text{sa}\left[\frac{\pi}{T}(z-nT)\right]$$

și în ipoteza anterioară relativ la șirul $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ această serie este uniform convergentă pe orice compact din $\mathbb{C}$: într-adevăr, pentru orice $|z|\leqslant R$ și pentru orice $|n|$ suficient de mare, avem

$$\left|a_n \cdot \text{sa}\left[\frac{\pi}{T}(z-nT)\right]\right| \leqslant \frac{A\cdot\mu(R)}{|n|^{1+\alpha}}, \text{ unde } \mu(R) = \sup_{|u|\leqslant R}\left|\frac{\sin u}{u}\right|,$$

deci pentru orice N fixat, avem

$$\left|\sum_{|n|>N} a_n \cdot \text{sa}\left[\frac{\pi}{T}(z-nT)\right]\right| \leqslant 2A\mu(R)\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

ceea ce atestă că restul seriei de funcții anterioare converge uniform către 0 pentru $N \to \infty$. Deoarece suma unei serii de funcții întregi, uniform convergente pe orice compact, este o funcție întreagă, rezultă că o funcție întreagă f astfel încît $f(nT) = a_n$, $(\forall) n \in \mathbb{Z}$, este următoarea:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \operatorname{sa}\left[\frac{\pi}{T}(z - nt)\right]. \tag{3.57}$$

Teorema III.7. *Fixăm $T > 0$ și o funcție întreagă f astfel încît să existe $M > 0$ și $0 < \alpha < \frac{\pi}{T}$ cu proprietatea că $|f(x)| \leqslant M$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ și $|f(z)| \leqslant M \exp(\alpha r |\sin\theta|)$, $(\forall) z = re^{j\theta} \in \mathbb{C}$. Atunci*

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \cdot \operatorname{sa}\left[\frac{\pi}{T}(z - nT)\right],$$

seria din membrul al doilea fiind uniform convergentă pe orice compact din $\mathbb{C}$. În plus, dacă valorile $f(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, sînt prescrise, atunci funcția f este unică.

Demonstrație. Fie γ_n discul $|z| \leqslant r_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)T$, $n \in \mathbb{Z}$. Pentru orice $z \in \mathbb{C}$ fixat, notăm

$$I_n(z) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\operatorname{Fr}\gamma_n} \frac{f(u)\,du}{(u - z)\sin\frac{\pi u}{T}}.$$

Fie $\operatorname{rez}(a)$ reziduul integrandului în punctul a; atunci aplicînd formula de calcul al reziduului într-un pol simplu, rezultă

$$\operatorname{rez}(kT) = \frac{f(kT)}{\left(k\pi - \frac{\pi z}{T}\right)\cos k\pi} \text{ și pentru } z \neq kT,\ \operatorname{rez}(z) = \frac{f(z)}{\sin\frac{\pi z}{T}}.$$

Din teorema reziduurilor rezultă

$$I_n(z) = \sum_{kT \in \gamma_n} \frac{f(kT)}{\left(k\pi - \frac{\pi z}{T}\right)\cos k\pi} + \frac{f(z)}{\sin\frac{\pi z}{T}}. \tag{3.58}$$

Pe de-altă parte, să evaluăm integrala curbilinie I_n cu ajutorul parametrizării drumului $\operatorname{Fr}\gamma_n$, punînd $u = r_n e^{j\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$; se obține

$$2\pi |I_n(z)| = \left| \int_0^{2\pi} \frac{f(r_n e^{j\theta})\, r_n j e^{j\theta}}{(r_n e^{j\theta} - z)\sin\left(\frac{\pi}{T} r_n e^{j\theta}\right)}\, d\theta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} \frac{4\,|f(r_n e^{j\theta})|}{\left|e^{j\theta} - \frac{z}{r_n}\right| \exp\left(\frac{\pi}{T} r_n |\sin\theta|\right)}\, d\theta,$$

ultima inegalitate rezultînd din faptul că $\exp\left(\frac{\pi}{T} r_n |\sin\theta|\right) \leqslant$ $< 4\left|\sin\left(\frac{\pi}{T} r_n e^{j\theta}\right)\right|$, oricare ar fi $\theta \in [0, 2\pi]$, și pentru orice n suficient de mare. Mai departe, oricare ar fi z fixat, avem $\lim_{n\to\infty}\left|e^{j\theta} - \frac{z}{r_n}\right| = 1$, deci $\left|e^{j\theta} - \frac{z}{r_n}\right| > \frac{1}{2}$ pentru orice n suficient de mare. Se obține atunci

$$|I_n(z)| \leqslant \frac{4}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(r_n e^{j\theta})|}{\exp\left(\frac{\pi}{T} r_n |\sin\theta|\right)}\, d\theta.$$

În fine, conform ipotezei din enunț asupra lui f, rezultă că

$$|f(r_n e^{j\theta})| \leqslant M \exp(\alpha r_n |\sin\theta|),$$

deci

$$|I_n(z)| \leqslant \frac{4M}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{T}\right) \cdot r_n |\sin\theta|\right] d\theta$$

și cum prin ipoteză $\alpha < \frac{\pi}{T}$, atunci $I_n(z) \to 0$ pentru $n \to \infty$, uniform în orice disc $|z| < R$. Așadar, seria din relația (3.58) converge uniform pentru $n \to \infty$ către $-\frac{f(z)}{\sin \frac{\pi z}{T}}$, de unde se obține relația

$$\frac{f(z)}{\sin \frac{\pi z}{T}} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{f(nT)}{\frac{\pi}{T}(z - nT) \cos n\pi}$$

și cum $\sin \frac{\pi z}{T} \cdot \frac{1}{\cos n\pi} = \sin \frac{\pi}{T}(z - nT)$, se obține tocmai relația din enunț.

Rămîne să probăm unicitatea lui f. Fie g o altă funcție întreagă verificînd condițiile din enunț, astfel încît $f(nT) = g(nT)$, $(\forall) n \in \mathbb{Z}$. Atunci funcția $h(z) = [f(z) - g(z)] / \sin \frac{\pi z}{T}$ va fi de asemenea întreagă și verifică, ca și f, g, condițiile din enunț. Punînd $z = re^{j\theta}$, pentru orice r suficient de mare au loc inegalități de forma $|f(re^{j\theta})| \leqslant M \exp(\alpha r |\sin\theta|)$ și $|g(re^{j\theta})| \leqslant M_1 \exp(\alpha r |\sin\theta|)$ și punînd $\varepsilon = \alpha - \frac{\pi}{T}$, rezultă

$$\left|\frac{f(z)}{\sin \frac{\pi z}{T}}\right| \leqslant 2M \exp(\varepsilon r |\sin\theta|) \text{ și } \left|\frac{g(z)}{\sin \frac{\pi z}{T}}\right| \leqslant 2M_1 \exp(\varepsilon r |\sin\theta|).$$

Cum $\varepsilon < 0$, făcînd $r \to \infty$, rezultă că $h(z) \to 0$ pe orice direcție cu excepția axei reale, adică $h = 0$, deci $f = g$.

6.4. **Observație.** Se poate arăta că funcțiile întregi f de ordin $\leqslant 1$, mărginite pe axa reală și cu proprietatea că $M_f(r) < e^{\frac{\pi}{T} r}$ pentru orice r suficient de mare, satisfac condiția din enunț.

Teorema precedentă poate părea fără legătură cu problematica paragrafului. În combinație cu o teoremă binecunoscută a lui Paley-Wiener [5], [27$_{II}$], ea dă un rezultat profund și anume următorul:

Corolar. *Fie $x(t)$ un semnal din L_1, mărginit și avînd spectrul cu suport mărginit, cuprins în banda de frecvență $[-\alpha, \alpha]$. Dacă $0 < T < \frac{\pi}{\alpha}$, atunci pentru orice $t \in \mathbb{R}$ are loc formula*

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \cdot \operatorname{sa}\left[\frac{\pi}{T}(t - nT)\right], \tag{3.59}$$

unde seria din membrul al doilea este uniform convergentă pe orice compact de pe dreapta reală.

Demonstrație. Teorema Paley-Wiener afirmă că un semnal mărginit din L_1, care nu crește mai repede decît vreo putere a lui $|t|$ pentru $|t| \to \infty$, are spectrul mărginit în bandă [$(\exists) A > 0$ astfel încît $F_x(\omega) = 0$ pentru $|\omega| \geqslant A$] dacă și numai dacă funcția x poate fi prelungită la o funcție întreagă, notată la fel, de ordin $\leqslant 1$ și cu proprietatea că $M_x(r) < e^{Ar}$, pentru orice r suficient de mare. Se dă astfel o caracterizare a semnalelor din L_1 verificînd condiția (3.51) ca fiind funcții care pot fi prelungite în complex la funcții întregi de tip exponențial.

Funcția x din enunț poate fi deci prelungită la o funcție întreagă, notată tot cu x și verificînd condițiile teoremei III.7. Restrîngînd la axa reală formula dată în această teoremă, se obține (3.59).

6.5. **Observații.** 1) În enunțul corolarului semnalul continual $x(t)$ este presupus mărginit și nu cu durată mărginită (echivalent, nu cu suport mărginit). Dealtfel pentru o clasă largă de semnale din L_1 (de exemplu cele cauzale) nu există semnale care să aibă durata și spectrul mărginite, în afară de semnalul nul a.p.

2) În general, dacă se studiază un semnal $x(t)$, $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, cunoașterea eșantioanelor $x(nT)$, $n \in \mathbb{Z}$, $T > 0$ fiind un pas de eșantionare fixat, nu poate permite determinarea semnalului în puncte distincte de nodurile nT. Teoremele III.6, III.7 pun în evidență clase de semnale pentru care este posibilă nu numai o formulă aproximativă, de interpolare, ci chiar una exactă, permițînd recuperarea completă a semnalului din cunoașterea eșantioanelor la momentele nT. Acesta este sensul primar la teoremelor de eșantionare de tipul WKS. Remarcăm că o ipoteză esențială a fost aceea că spectrul semnalului are suport mărginit (dealtfel T este ales convenabil în funcție de lățimea benzii de frecvență a lui x) și astfel, succesul eșantionării în domeniul timp este legat de neglijarea frecvențelor spre $\pm\infty$.

3) Fără modificări esențiale de raționament, formula (3.59) de eșantionare poate fi extinsă la cazul cînd eșantioanele nu ar fi luate la momente echidistante.

Alte considerații, în special îndreptate spre aplicațiile eșantionării, vor fi date în cap. VI.

C. REPREZENTĂRI ALE SEMNALELOR DISCRETE CU DURATĂ FINITĂ

În această parte vom dezvolta aparatul matematic necesar descrierii și prelucrării semnalelor discrete periodice cu număr finit de eșantioane (pe orice perioadă de timp). În același timp, vom da o

prezentare unificată a exponențialelor discrete ca și a funcțiilor ortogonale discrete de tip Walsh, prin utilizarea sistematică a conceptului de bază standard de semnale discrete, introdus de autori în [11].

§ 7. Noțiunea de bază standard de semnale discrete

Fixăm $q \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ întregi și fie $N = q^n$; considerăm mulțimea $\mathscr{T} = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$, ale cărei elemente le numim uneori momente. Orice element $a \in \mathscr{T}$ are o reprezentare q-adică de lungime exact n și anume

$$a = a_1 q^{n-1} + a_2 q^{n-2} + \ldots + a_n \text{ notată și } a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)_q. \quad (3.60)$$

Pentru orice element $a \in \mathbb{Z}$ există și este unic un element $\bar{a} \in \mathscr{T}$ astfel încît $a - \bar{a} \vdots N$; dacă $a \in \mathscr{T}$, atunci $\bar{a} = a$. Pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}$, se poate defini un element bine determinat $a \oplus b \in \mathscr{T}$ în modul următor: se consideră scrieri q-adice de forma (3.60) pentru $\bar{a}$, $\bar{b}$ și se definește

$$a \oplus b \overset{\Delta}{=} (c_1, c_2, \ldots, c_n)_q, \text{ unde } c_k = a_k + b_k \pmod q,\ 0 \leqslant k \leqslant N-1.$$

În acest mod este definită o aplicație surjectivă $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathscr{T}$, $(a, b) \mapsto a \oplus b$.

De exemplu, dacă $q = 3$, $n = 2$, $N = 9$, $a = 20$, $b = 50$, atunci $\bar{a} = 2 = (0, 2)_3$, $\bar{b} = 5 = (1\ 2)_3$, deci $a \oplus b = (c_1\, c_2)_3$, unde $c_1 = 0 + 1 \bmod 3$, $c_2 = 2 + 2 \bmod 3$, deci $c_1 = 1$, $c_2 = 1$ și în concluzie, $20 \oplus 50 = (1\ 1)_3 = 4$.

Similar, dacă $q = 2$, $n = 4$, $N = 16$, $a = 20$, $b = 50$, atunci $\bar{a} = 4$, $\bar{b} = 2$ și luînd scrierile binare, $\bar{a} = (0\ 1\ 0\ 0)$, $\bar{b} = (0\ 0\ 1\ 0)$, deci $a \oplus b = (c_1\, c_2\, c_3\, c_4)$, unde $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 0$ și în acest caz, rezultă $20 \oplus 50 = 6$.

Pentru orice $a \in \mathscr{T}$ există și este unic un element $b \in \mathscr{T}$ astfel încît $a \oplus b = 0$ și acesta va fi notat cu $\ominus a$. Este evident că dacă $a = (a_1 a_2 \ldots a_n)_q$, atunci $b = (b_1 b_2 \ldots b_n)_q$, unde $b_j = q - a_j$ dacă $a_j \neq 0$ și $b_j = 0$ dacă $a_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

De exemplu, pentru $q = 2$, $n = 4$, $a = 12$, rezultă $a = (1\ 1\ 0\ 0)$, deci $\ominus a = (1\ 1\ 0\ 0) = 12$; dealtfel pentru $q = 2$ avem în general $\ominus a = a$. Luînd $q = 3$, $n = 4$ și din nou $a = 12$, rezultă $a = (0\ 1\ 1\ 0)$ și atunci $\ominus a = (0\ 2\ 2\ 0) = 24$.

Mulțimea $\mathscr{T}$ are evident o structură de grup comutativ în raport cu operația $\oplus$ de adunare, definită anterior. Pentru orice $a, b \in \mathscr{T}$

vom nota $a \ominus b \overset{\Delta}{=} a \oplus c$, unde $c = \ominus b$. Acest fapt permite definirea q-întîrzierilor $t \ominus \tau$, $\tau \in \mathscr{T}$ fixat.

Vom nota din nou cu S_d mulțimea semnalelor discrete $x(t)$, $x : \mathscr{T} \to \mathbb{C}$ (cazul semnalelor cu valori reale este desigur inclus). Un astfel de semnal se identifică cu un punct din $\mathbb{C}^N$, deci cu o matrice coloană $x = [x_0\, x_1 \ldots x_{N-1}]'$, unde $x_i = x(i)$, $i \in \mathscr{T}$, sînt eșantioanele lui x la momentele din $\mathscr{T}$. Mulțimea S_d are o structură naturală de spațiu vectorial complex; în plus, se introduc ca de obicei produsul pe componente $x \cdot y = [x_0 y_0\ x_1 y_1 \ldots x_{N-1} y_{N-1}]'$, produsul scalar a două elemente $x, y \in S_d$ ca fiind $\langle x, y \rangle \overset{\Delta}{=} x' \cdot \bar{y} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \bar{y}_k$, norma lui x prin $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Fie U frontiera discului unitate din planul complex, $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Fixăm q, n, $N = q^n$ ca mai sus.

7.1. **Definiție.** Vom numi *bază standard de semnale discrete* (în S_d) orice șir finit de N semnale $E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$ din S_d astfel încît:

(a) matricea de tip, $N \times N$, $\mathbf{E} = [E_0 | E_1 | \ldots | E_{N-1}]$, să fie simetrică și cu toate elementele luate din U;

(b) pentru orice r, s să avem $E_r \cdot E_s = E_{r \oplus s}$ (*proprietatea de multiplicativitate*);

(c) pentru orice r, s $(r \neq s)$ să avem $\langle E_r, E_s \rangle = 0$ (*proprietatea de ortogonalitate*).

Vom nota $E_i = [u_0^i\, u_1^i \ldots u_{N-1}^i]'$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$. Atunci

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} u_0^0 & u_0^1 & \ldots & u_0^{N-1} \\ u_1^0 & u_1^1 & \ldots & u_1^{N-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_{N-1}^0 & u_{N-1}^1 & \ldots & u_{N-1}^{N-1} \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

și proprietatea (a) se exprimă prin $u_j^i = u_i^j$, $|u_i^j| = 1$ pentru orice $i, j \in \mathscr{T}$, iar proprietatea (b) revine la $u_r^i u_s^i = u_{r \oplus s}^i$ pentru orice $i \in \mathscr{T}$. Pentru $s = 0$ se obține $u_0^i = 1$, deci $E_0 = [1\ 1 \ldots 1]'$, iar pentru $s = \ominus r$, se obține $u_r^i u_{\ominus r}^i = u_0^i = 1$, de unde $u_{\ominus r}^i = \dfrac{1}{u_r^i} = \bar{u}_r^i$ (deoarece $u_r^i \in U$). Pe de altă parte,

$$\langle E_r, E_s \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} u_r^i \bar{u}_s^i = \sum_{i=0}^{N-1} u_r^i \cdot u_{\ominus s}^i = \sum_{i=0}^{N-1} u_{r \ominus s}^i,$$

deci în ipoteza îndeplinirii condițiilor (a), (b), proprietatea (c) de ortogonalitate este echivalentă cu faptul că dacă $r \neq s$, adică $r \ominus s \neq 0$, atunci $\sum_{i=0}^{N-1} u^i_{r\ominus s} = 0$, adică suma elementelor de pe orice linie a matricei (3.61), cu excepția primei linii (considerată de indice 0), este nulă. Remarcăm de asemenea că $\langle E_r, E_r \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} u_0^i = N$, adică $\|E_r\|^2 = N$ pentru orice $r \in \mathcal{T}$. Enunțăm atunci

Teorema III.8. *Fie* $\mathcal{B} = \{E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}\}$ *un șir de semnale din* S_d *verificînd condițiile* (a), (b). $\mathcal{B}$ *este bază standard în* S_d *dacă și numai dacă suma elementelor fiecărei linii a matricei* $\mathbf{E}$ *cu excepția primeia este nulă. În acest caz,* $\mathcal{B}$ *este bază în sens uzual a spațiului vectorial complex* S_d *și matricea* $\mathbf{E}$ *este nesingulară.*

Demonstrație. Prima afirmație a fost probată anterior. Deoarece $\dim_{\mathbb{C}} S_d = N$, este suficient de arătat că vectorii E_r, $0 \leqslant r \leqslant N-1$, sînt liniar independenți peste $\mathbb{C}$. Dar din orice relație liniară $\sum_{r=0}^{N-1} \lambda_r E_r = 0$ se deduce, înmulțind scalar cu E_s și ținînd seama de (c), $\lambda_s \cdot \|E_s\|^2 = 0$ și cum $\|E_s\|^2 = N$, rezultă $\lambda_s = 0$ pentru orice s, $0 \leqslant s \leqslant N-1$.

În fine, matricea $\mathbf{E}$ are atunci coloanele liniar independente, deci este nesingulară.

7.2. **Exemple.** a) Baza canonică a lui $S_d = \mathbb{C}^N$, $e_i = (0, \ldots \underset{i+1}{0}, 1, 0, \ldots, 0)$ (N componente), $0 \leqslant i \leqslant N-1$, satisface numai condițiile (a), (c), deci nu este o bază standard în S_d. Desigur, e_i coincide cu semnalul δ_{i+1}, impuls unitate la momentul $i+1$.

b) Pentru q, n, N, $\mathcal{T}$ aleși ca mai sus, definim semnalele $\mathcal{E}_k : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $k \in \mathcal{T}$ punînd

$$\mathcal{E}_k = [e_0^k, e_1^k, \ldots, e_{N-1}^k]', \text{ unde } e_t^k = \exp\left(-\mathrm{j}\frac{2\pi}{N} kt\right). \tag{3.62}$$

Condiția (a) din definiția 7.1 este evident îndeplinită, iar pentru a proba (b) este suficient de observat că pentru orice $k, r, s \in \mathcal{T}$ avem $e_r^k \cdot e_s^k = e_{r\oplus s}^k$, adică

$$\exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{N} k(r+s)\right] = \exp\left[\mathrm{j}\frac{2\pi}{N} k(r \oplus s)\right],$$

ceea ce rezultă din faptul că $r + s - (r \oplus s)$ este divizibil cu N. Putem atunci aplica teorema III.8, observînd că $\sum_{k=0}^{N-1} e_t^k = 0$ pentru orice $t \neq 0$ (conform lemei 1 din § 3). Rezultă atunci că semnalele $\{\mathcal{E}_k\}_{k \in \mathcal{T}}$ definite în (3.62) constituie o bază standard în S_d, *baza standard a exponențialelor discrete.*

Cu notația $W = \exp\left(-\frac{2\pi}{N} j\right)$, introdusă în formula (3.13), rezultă că $e_t^k = W^{kt}$. Elementele de analiză spectrală dezvoltate în § 3 s-au referit la cazul exponențialelor discrete; acestea vor fi extinse în cele ce urmează la cazul unei baze standard oarecare de semnale discrete.

c) Un alt exemplu de bază standard în S_d este constituit de *semnalele de tip Hadamard.* Reamintim mai întîi că pentru orice matrice pătrată $\mathbf{A} \in M_k(\mathbb{C})$, $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1 \leqslant i, j \leqslant k}$ și pentru orice întreg $n \geqslant 2$, se pot defini puterile Kronecker $\mathbf{A}^{\otimes n}$, punînd

$$\mathbf{A}^{\otimes 1} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^{\otimes 2} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}^{\otimes n} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}^{\otimes(n-1)};$$

pentru orice matrice pătrată (de ordinul l) $\mathbf{B}$, se notează $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ matricea celulară de ordin kl:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1k}B \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{k1}B & a_{k2}B & \ldots & a_{kk}B \end{bmatrix}.$$

Matricea $\mathbf{A}^{\otimes n}$, $n \geqslant 1$, este o matrice pătrată (celulară) de ordin k^n.

Fie $\mathbf{E} = [\mathcal{E}_0 | \mathcal{E}_1 | \ldots | \mathcal{E}_{q-1}]$ matricea de ordin q, avînd drept coloane vectorii (3.62); conform teoremei III.8 și exemplului b), această matrice este nesingulară. Notînd $v = \exp\left(\frac{2\pi}{q} \mathrm{j}\right)$, rezultă

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & v & v^2 & \ldots & v^{q-1} \\ 1 & v^2 & v^4 & \ldots & v^{2(q-1)} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 1 & v^{q-1} & v^{2(q-1)} & \ldots & v^{(q-1)(q-1)} \end{bmatrix}$$

și se poate forma matricea $\mathbf{H} = \mathbf{E}^{\otimes n}$ de ordin $q^n = N$, numită uneori *matricea Hadamard în baza q.* Se probează ușor că semnalele definite prin coloanele matricei $\mathbf{H}$, adică

$h_k : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$, $t \mapsto$ elementul de pe linia k și coloana t din $\mathbf{H}$,

constituie o bază standard în S_d și, în plus,

$$h_k(t) = v^{\sum_{p=1}^{n} k_p t_p},$$

unde $t = (t_1 t_2 \ldots t_n)_q$, $k = (k_1 k_2 \ldots k_n)_q$ sînt scrierile q-adice ale lui t și k de forma (3.60).

Aceste exemple arată deja că noțiunea de bază standard în S_d este consistentă. În paragraful următor vom studia în detaliu un alt exemplu remarcabil, anume cel oferit de funcțiile Walsh.

§ 8. Elemente de analiză Fourier relativ la o bază standard

Fixăm q, n, $N = q^n$, $\mathcal{T}$ ca mai sus și fie $\mathcal{B} = \{E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}\}$ o bază standard de semnale în S_d, $E_i = [u_0^i\, u_1^i \ldots u_{N-1}^i]'$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$. Așadar, $u_j^i = u_i^j$, $u_0^i = 1$, $\bar{u}_i^j = 1/u_i^j$, pentru orice i, j. Pentru orice întreg $k \in \mathbb{Z}$ există și este unic un element $\tilde{k} \in \mathcal{T}$ astfel încît $k - \tilde{k}$ să fie divizibil cu N și se poate defini $E_k = E_{\tilde{k}}$, deci $E_k = E_{k+l\,N}$ pentru orice $k, l \in \mathbb{Z}$; această prelungire prin periodicitate a șirului $\mathcal{B}$ este utilizată tacit în continuare. Fie $\mathbf{E}$ matricea (3.61) asociată lui $\mathcal{B}$.

8.1. **Definiție.** Pentru orice semnal discret $x \in S_d$ asimilat cu un vector coloană din $\mathbb{C}^N$ se numește *transformarea Fourier directă* (respectiv *inversă*) *a lui x relativ la $\mathcal{B}$* semnalul discret F_x (respectiv F_x^{-1}) definit prin

$$F_x = \mathbf{E}x \qquad \left[\text{respectiv } F_x^{-1} = \frac{1}{N}(\bar{\mathbf{E}}x)\right]. \tag{3.63}$$

Semnalul F_x se mai numește *realizarea în secvență a lui x* sau *spectrul secvențial al lui x*, conform terminologiei din [3]. Se observă analogia cu formulele (3.14), (3.15) din cazul exponențialelor discrete.

De exemplu, transformata Fourier a impulsului unitate δ_k la momentul k, definit în (3.2), este cel de-al k-lea element E_k al bazei standard fixate.

Teorema III.9. *Aplicațiile $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}^{-1}$ sînt izomorfisme $\mathbb{C}$-liniare $S_d \to S_d$, inverse unul altuia. În particular, orice semnal discret este bine determinat prin cunoașterea spectrului său secvențial.*

Demonstrație. Faptul că $\mathcal{F}$ și $\mathcal{F}^{-1}$ sînt izomorfisme $\mathbb{C}$-liniare rezultă direct din nesingularitatea matricelor $\mathbf{E}$, $\frac{1}{N}\bar{\mathbf{E}}$, asigurată prin teorema III.8. Este suficient deci de arătat că $\mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{N}\bar{\mathbf{E}}$ și atunci va rezulta că aplicațiile $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1}$ și $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}$ coincid cu aplicația identică a lui S_d. Calculăm

$$\mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}} = [E_0 | E_1 | \ldots | E_{N-1}] \cdot [\bar{E}_0 | \bar{E}_1 | \ldots | \bar{E}_{N-1}] = [c_{rs}]_{0 \leqslant r,s \leqslant N-1},$$

unde am notat $c_{rs} = \langle E_r, E_s \rangle$. Deoarece $\mathcal{B}$ este bază standard în S_d, rezultă $c_{rs} = 0$ pentru $r \neq s$ și $c_{rr} = N$ și atunci

$$\mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} N & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & N & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & N \end{bmatrix} = N \cdot \mathbf{U}_N$$

($\mathbf{U}_N$ fiind matricea unitate de ordin N), adică $\mathbf{E}^{-1} = \frac{1}{N}\bar{\mathbf{E}}$.

Ultima afirmație din enunț este evidentă, deoarece dacă se cunoaște $y = F_x$, atunci x se recuperează în mod univoc, anume $x = F_y^{-1}$.

8.2. **Observații.** 1) Transformarea Fourier $y = F_x$ a unui semnal $x \in S_d$ este un șir de N numere complexe, care se poate extinde la un șir infinit periodic de perioadă N. Într-adevăr, punînd $y_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot u_k^m$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, rezultă $y_k = y_{k+N}$, deoarece $u_k^m = u_{k+N}^m$, $(\forall)\, m, k$, conform convenției anterioare de prelungire a bazei standard. Se poate deci considera de la început că semnalul x este restricția la $\mathcal{T}$ a unui semnal periodic de perioadă N definit pe $\mathbb{Z}$. Astfel, teoria dezvoltată aici poate fi asimilată cu studiul semnalelor discrete pe intervale finite care pot fi prelungite prin periodicitate în afara intervalelor respective.

2) Am văzut că orice bază standard în S_d este bază de spațiu vectorial peste $\mathbb{C}$, deci orice $x \in S_d$ admite o scriere unică $x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k E_k$ cu c_k constante complexe. Punînd $c_4^{\tau} = [c_0 c_1 \ldots c_{N-1}]'$, rezultă atunci că $\mathbf{x} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{c}$ și deci $\mathbf{c} = \frac{1}{N}\bar{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{x} = F_x^{-1}$, de unde se obține o altă semnificație a spectrului secvențial al lui x.

Teorema III.10. *Fie $x \in S_d$, $x = \{x_m\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$ un semnal periodic de perioadă N și $y = F_x = \{y_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$.*

(a) *Fie $h \in \mathbb{Z}$ o întîrziere fixată și $x_h = \{x_{m+h}\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$. Atunci*

$$F_{x_h} = \{\bar{u}_k^h \cdot y_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}.$$

(b) *Dacă toate eșantioanele x_m sînt reale și dacă q este par, atunci $y_{\frac{N}{2}+r} = \bar{y}_{\frac{N}{2}-r}$ pentru orice r, $0 \leqslant r \leqslant \frac{N}{2}$. În particular, $y_{\frac{N}{2}}$ este real.*

Demonstrație. (a) Avem de arătat că

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_h(m) \cdot u_k^m = \bar{u}_k^h \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot u_k^m,$$

adică

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_{m+h} \cdot u_k^m = \bar{u}_k^h \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot u_k^m,$$

ceea ce rezultă din convențiile anterioare asupra periodicității.

(b) Deoarece $y_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot u_k^m$, avem de arătat că

$$\sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot u_{\frac{N}{2}+r}^m = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \cdot \bar{u}_{\frac{N}{2}-r}^m,$$

ceea ce rezultă din relațiile

$$\bar{u}_{\frac{N}{2}-r}^m = \left(u_{\frac{N}{2}-r}^m\right)^{-1} = u_{\frac{N}{2}+r}^m,$$

consecință a proprietății de multiplicativitate în $\mathscr{B}$ și a faptului că $u_N^m = u_0^m = 1$, pentru orice m.

Pentru $r = 0$ se obține ultima afirmație din enunț.

Două operații importante în teoria semnalelor sînt cele de convoluție și de corelație. Folosind structura aditivă specifică a mulțimii $\mathscr{T}$, definită prin operația $\oplus$, se poate defini un concept corespunzător de convoluție a semnalelor din S_d.

8.3. **Definiții.** Fie x, y două semnale oarecare din S_d. Numim *convoluție* a lor semnalul discret $z = x * y = \{z_l\}_{0 \leqslant l \leqslant N-1}$, definit prin

$$z_l = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot y_{l \ominus k}. \tag{3.64}$$

Corelația lui x și y este semnalul $\hat{z} = x \hat{*} y = \{\hat{z}_l\}_{0 \leqslant l \leqslant N-1}$, definit prin

$$\hat{z}_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot y_{l \oplus k}. \tag{3.65}$$

Autocorelația unui semnal x este semnalul $x \hat{*} x$.

Se verifică ușor că pentru orice x, y, $z \in S_d$ au loc relațiile:

$$x * y = y * x, \quad x * (y * z) = (x * y) * z, \quad x * \delta_a = \{x_{i \ominus a}\}_{i \in \mathscr{T}}$$

și, în particular, $x * \delta = x$, $\delta_a * \delta_b = \delta_{a \oplus b}$, pentru orice a, $b \in \mathscr{T}$. Trebuie remarcat că prin convoluție cu δ_r un semnal este decalat cu r pași de eșantionare, adică el suportă o q-întîrziere care revine la o permutare (controlabilă!) a eșantioanelor sale.

În analogie cu teorema III.3, demonstrăm

Teorema III.11. *Fixăm o bază standard ca mai sus. Atunci pentru orice x, $y \in S_d$ au loc relațiile*

(a) $F_{x*y} = F_x \cdot F_y$, $F_{x*y}^{-1} = N F_x^{-1} \cdot F_y^{-1}$, $F_x * F_y = N F_{x \cdot y}$,

$$F_x^{-1} * F_y^{-1} = F_{x \cdot y}^{-1};$$

(b) $N F_{x \hat{*} y} = \bar{F}_x \cdot F_y$, $F_{x \hat{*} y}^{-1} = \bar{F}_x^{-1} \cdot F_y^{-1}$, $F_x \hat{*} F_y = F_{\bar{x} \cdot y}$,

$$N F_x^{-1} \hat{*} F_y^{-1} = F_{x \cdot y}^{-1}.$$

Demonstrație. (a) Componenta de ordin k a semnalului F_z, $z = x * y$, este conform cu (3.64)

$$\sum_{m=0}^{N-1} z_m \cdot u_k^m = \sum_{m=0}^{N-1} \left(\sum_{p=0}^{N-1} x_p y_{m \ominus p} \right) \cdot u_k^m = \sum_{p=0}^{N-1} x_p \left(\sum_{m=0}^{N-1} y_{m \ominus p} \cdot u_k^m \right).$$

Suma din paranteză este tocmai componenta de ordin k a lui F_{y_h}, unde $h = \ominus p$, și conform teoremei III.10, (a), aceasta este egală cu $\bar{u}_k^h \cdot f_k$, unde f_k este componenta de ordin k a lui F_y. Așadar

$$(F_{x*y})_k = \sum_{p=0}^{N-1} x_p \bar{u}_k^h (F_y)_k = \sum_{p=0}^{N-1} (x_p u_k^p) (F_y)_k = (F_x)_k \cdot (F_y)_k.$$

Acest calcul are loc pentru orice k, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, deci $F_{x*y} = F_x \cdot F_y$.

Celelalte relații din (a), (b) se probează similar; afirmațiile relativ la $\mathscr{F}^{-1}$ pot fi deduse din cele pentru operatorul $\mathscr{F}$ folosind teorema III. 9.

Corolarul 1. *Pentru orice semnal* $x \in S_d$ *şi pentru orice* $0 \leqslant k \leqslant N-1$

$$F_{x*\delta_k} = F_x \cdot E_k, \quad F_{x\hat{*}\delta_k} = \frac{1}{N} \bar{F}_x \cdot E_k .$$

Corolarul 2 (Parseval). *Fie* x, y *semnale din* S_d *cu eşantioane reale şi* $F_x = \{f_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$, $F_y = \{g_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$. *Atunci*

$$\sum_{p=0}^{N-1} x_p y_p = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{f}_k g_k \text{ şi } \sum_{p=0}^{N-1} x_p^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |f_k|^2 .$$

Demonstraţie. Considerăm corelaţia $\hat{z} = x \hat{*} y$; aplicînd teorema III.11, (b), rezultă $(F_{\hat{z}})_k = \bar{f}_k g_k$ pentru orice k, $0 \leqslant k \leqslant N-1$. Pe de altă parte, conform teoremei III.9, rezultă

$$(\hat{z})_l = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (F_{\hat{z}})_k \, \bar{u}_l^k \text{ pentru } 0 \leqslant l \leqslant N-1.$$

Comparînd cu definiţia (3.65) a corelaţiei, se deduce relaţia

$$\sum_{p=0}^{N-1} x_p y_{l \oplus p} = \sum_{k=0}^{N-1} \bar{f}_k g_k \bar{u}_k^l \text{ pentru orice întreg } l.$$

Făcînd $l = 0$ şi apoi $y = x$, se obţin formulele din enunţ.

Pentru orice semnal $x \in S_d$ vom nota $\Delta x = x - (x * \delta_1)$ şi, inductiv, $\Delta^r x = \Delta(\Delta^{r-1} x)$, pentru orice întreg $r \geqslant 2$. În mod explicit, dacă $x = \{x_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$, atunci $(\Delta x)_k = x_k - x_{k \ominus 1}$, $\Delta^2 x = \Delta(x - x * \delta_1) = x - 2x * \delta_1 + x * \delta_{1 \oplus 1}$, $\Delta^3 x = x - 3x * \delta_1 + 3x * \delta_{1 \oplus 1} - x * \delta_{1 \oplus 1 \oplus 1}$, etc. Direct din teorema III.11, (a) şi din corolarul 1 de mai sus, rezultă prin inducţie după r următorul

Corolarul 3. *Pentru orice* $x \in S_d$ *avem* $F_{\Delta^r x} = (1 - E_1)^r \cdot F_x$ *pentru orice întreg* $r \geqslant 1$.

Trebuie deci reţinut că operaţia de convoluţie între semnale corespunde operaţiei de înmulţire pe componente între spectrele în secvenţă corespunzătoare. Rezultatele date extind deopotrivă cazul exponenţialelor discrete ca şi cazul funcţiilor Walsh [1, 2, 14].

§ 9. Funcţii Walsh şi aplicaţii ale lor

Alături de semnalele sinusoidale care au proprietăţi remarcabile de completitudine şi ortogonalitate, în aplicarea tehnicilor digitale s-au impus şi alte sisteme de funcţii ortogonale păstrînd proprietăţile anterioare, dar adăugînd noi disponibilităţi. Trecem la prezentarea funcţiilor Walsh, care constituie cea mai cunoscută clasă de semnale discrete pe intervale finite.

Fixăm întregii $q \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ şi notăm ca mai sus $N = q^n$, $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$. Este util să identificăm elementele mulţimii $\mathcal{T}$ prin nodurile echidistante obţinute prin împărţirea intervalului $[0, 1]$ în N părţi egale, adică $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \ldots, \frac{N-1}{N}$ şi, în mod corespunzător, să reprezentăm grafic un semnal discret $x \in S_d$, $x = [x_0 x_1 x_2 \ldots x_{N-1}]'$ prin funcţia în scară $\hat{x} : [0, 1) \to \mathbb{C}$ egală cu x_i pe fiecare interval $\left[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}\right)$, $0 \leqslant i \leqslant N-1$, ca în fig. 3.6 (desigur am presupus aici că toate eşantioanele x_i sînt reale).

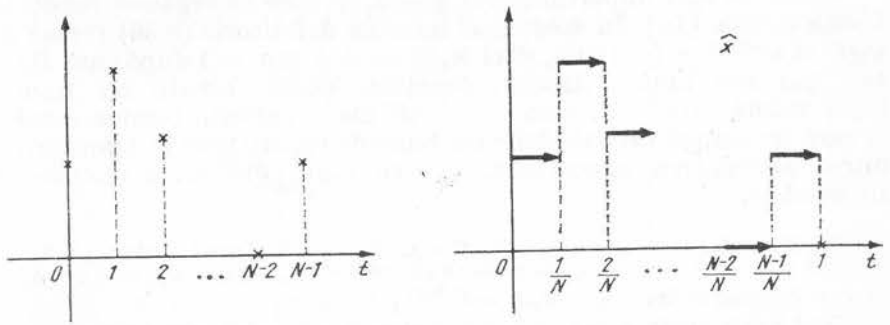


Fig. 3.6. Reprezentarea unui semnal discret x prin funcţia în scară $\hat{x}$.

Trebuie remarcat că produsul scalar $\langle x, y \rangle$ în S_d coincide cu produsul scalar $\langle \hat{x}, \hat{y} \rangle$ în $L_2[0, 1]$, anume

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \bar{y}_i = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{\frac{i}{N}}^{\frac{i+1}{N}} \hat{x}(t) \, \overline{\hat{y}}(t) \, dt = \int_0^1 \hat{x}(t) \, \overline{\hat{y}}(t) \, dt = \langle \hat{x}, \hat{y} \rangle .$$

9.1. **Definiție.** Se numesc *funcții Walsh* (în baza q, cu N eșantioane) cele N semnale discrete $w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}$, definite prin

$$w_k(t) = e^{j\frac{2\pi}{q}B_k(t)}, \quad k, t \in \mathcal{T}, \tag{3.66}$$

unde

$$B_k(t) = \sum_{l=1}^{n} A_l \cdot t_l, \; A_l = \begin{cases} (k_{n-l} + k_{n+1-l}) \pmod q, & \text{dacă } 1 \leqslant l \leqslant n-1, \\ k_1, & \text{dacă } l = n, \end{cases} \tag{3.67}$$

iar $t = (t_1\, t_2 \ldots t_n)_q = t_1 q^{n-1} + t_2 q^{n-2} + \ldots + t_n$,

$$k = (k_1\, k_2 \ldots k_n)_q = k_1 q^{n-1} + k_2 q^{n-2} + \ldots + k_n$$

sînt scrierile q-adice ale lui t și k [3, 14].

Asocierea $(k_1, k_2, \ldots, k_n) \mapsto (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ este uneori numită *codificarea lui Gray*.

Cazul cel mai important este $q = 2$, în care se regăsesc funcțiile Walsh clasice [15]. În acest caz, formula definitorie (3.66) revine la $w_k(t) = e^{j\pi B_k(t)} = (-1)^{B_k(t)}$, deci $w_k(t) = +1$ sau -1 după cum $B_k(t)$ este par sau impar. Așadar, funcțiile Walsh binare au numai două valori, $+1$, -1, ceea ce constituie o calitate fundamentală, la care se adaugă proprietățile lor bune de calcul, care le transformă într-o alternativă importantă, pentru cazul discret, a semnalelor sinusoidale.

9.2. **Exemplu.** Presupunem $q = 2$, $N = 8$, deci $n = 3$. Atunci scriind $k = 4k_1 + 2k_2 + k_3$, $t = 4t_1 + 2t_2 + t_3$, formula (3.67) devine $A_1 = (k_2 + k_3) \pmod 2$, $A_2 = (k_1 + k_2) \pmod 2$, $A_3 = k_1$ și $w_k(t) = e^{j\pi B_k(t)}$.

Dacă $k = 0$, atunci $k_1 = k_2 = k_3 = 0$, deci $w_0(t) = 1$ pentru orice $t \in \mathcal{T}$.

Dacă $k = 1$, atunci $k_1 = k_2 = 0$, $k_3 = 1$, deci $A_1 = 1$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ și $w_1(t) = e^{j\pi t_1} = (-1)^{t_1}$. Similar se obțin explicitările

$$w_2(t) = (-1)^{t_1+t_2}, \; w_3(t) = (-1)^{t_2}, \; w_4(t) = (-1)^{t_2+t_3}, \tag{3.68}$$

$$w_5(t) = (-1)^{t_1+t_2+t_3}, \; w_6(t) = (-1)^{t_1+t_3}, \; w_7(t) = (-1)^{t_3}.$$

Reprezentarea grafică a acestor semnale (identificate cu funcții în scară $[0, 1) \to \{+1, -1\}$) este indicată în fig. 3.7.

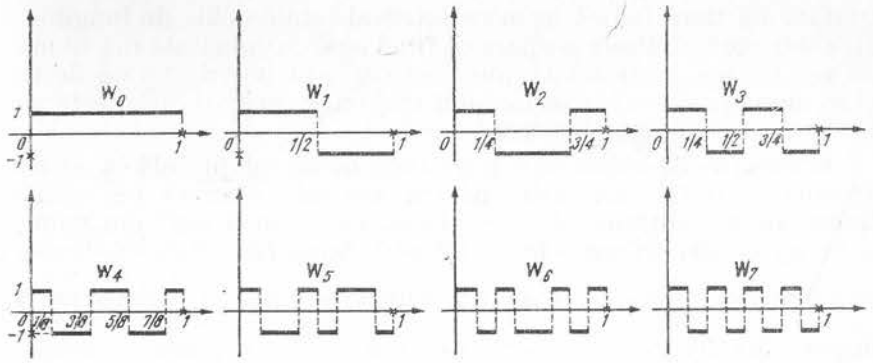


Fig. 3.7. Graficul funcțiilor Walsh $w_0 - w_7$, pentru $q = 2$, $N = 8$, pe un interval unitate.

Vom vedea că șirul de semnale $\{w_0, w_1, \ldots, w_7\}$ constituie o bază standard (pentru opt eșantioane) în S_d. Matricea pătrată asociată avînd drept coloane valorile acestor semnale este $\mathbf{W} = [w_0 | w_1 | \ldots | w_7]$, adică

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Pentru semnale periodice sinusoidale noțiunea de frecvență este fundamentală. Pentru familia de funcții reale $\{\sin 2\pi\omega t\}$ indexată după $\omega \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, fiecare funcție este bine determinată prin indicele ω corespunzător; dacă ω este fixat, atunci funcția $t \mapsto \sin 2\pi\omega t$ are perioada $\frac{1}{\omega}$ și în orice interval semideschis de lungime $\frac{1}{\omega}$ funcția are exact două zerouri (sau schimbări de semn), deci semnalul $\sin 2\pi\omega t$ are 2ω zerouri (sau echivalent, schimbări de semn) în orice

unitate de timp (adică în orice interval semideschis de lungime 1). În acest mod, indicele ω apare ca fiind egal cu jumătate din numărul de zerouri ale semnalului sinusoidal $\sin 2\pi\omega t$ într-o unitate de timp și se numește *frecvența* semnalului respectiv. Același lucru este valabil pentru semnalele $\cos 2\pi\omega t$.

Harmuth [3] a introdus o noțiune nouă, adaptabilă la semnale aperiodice și în particular, pentru semnale discrete pe intervale finite, anume noțiunea de *secvență*, ca fiind „jumătate" din numărul σ de schimbări de semn în unitatea de timp (în sensul că secvența este egală cu $\frac{\sigma}{2}$ dacă σ este un număr par și $\frac{\sigma+1}{2}$ dacă σ este impar). Evident, pentru semnale sinusoidale secvența coincide cu frecvența.

De exemplu pentru semnalul w_0 avem $\sigma(w_0) = 0$; similar $\sigma(w_1) = 1$, $\sigma(w_2) = 2$ și în general, $\sigma(w_k) = k$, $0 \leqslant k \leqslant 7$. Secvențele acestor opt semnale sînt respectiv 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, pentru că aplicînd definiția anterioară, rezultă că secvența funcției Walsh binare w_k este „jumătate" din k.

După cum frecvența poate fi exprimată prin cicli pe secundă (Hz), în mod similar secvența poate fi exprimată prin zerouri sau schimbări de semn pe secundă (notate zs).

9.3. **Notă istorică.** Prezentăm pe scurt evoluția ideilor matematice care au condus la degajarea familiilor de funcții Walsh. S-a observat că șirul de funcții $\{\sin n\pi t\}_{n\geqslant 1}$ este ortogonal pe intervalul $[0, 1)$ în sensul produsului scalar din L_2, în schimb șirul $s_n(t) = \operatorname{sgn}(\sin n\pi t)$, $n \geqslant 1$, nu verifică proprietatea de ortogonalitate (aici am socotit că $\operatorname{sgn} u = 1$ dacă $u \geqslant 0$ și $\operatorname{sgn} u = -1$ dacă $u < 0$). Rademacher [9] a reușit să indice un subșir ortogonal al lui s_n, anume $r_n = s_{2^n}$, $n \geqslant 1$. Se observă că

$$r_1(t) = \begin{cases} 1, \text{ dacă } t \in \left[0, \frac{1}{2}\right), \\ -1, \text{ dacă } t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right). \end{cases}$$

și că $r_n(t) = r_1(2^{n-1}t)$, $(\forall) t \in [0, 1)$, $n \geqslant 1$. Prin convenție se consideră $r_0 \equiv 1$.

Așadar, toate funcțiile r_n, numite și *funcțiile lui Rademacher*, iau numai valorile $1, -1$ și ele pot fi prelungite la întreg $\mathbb{R}$ prin periodicitate de perioadă 1 ; se poate vedea ușor că r_n se poate identifica prin semnalul discret din S_d definit prin $r_n(t) = (-1)^{t_n}$, unde t_n este ultima cifră din scrierea binară a lui $t \in \mathcal{T}$. [În cazul general $q \geqslant 2$ se definește $r_n(t) = \exp\left(j\frac{2\pi}{q} \cdot t_n\right)$.]Graficele lui r_1, r_2, r_3 pentru $q = 2$ sînt redate în fig. 3.8.

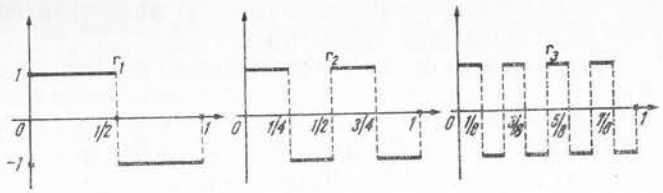


Fig. 3.8. Graficul funcțiilor Rademacher r_1, r_2, r_3 pentru $q = 2$.

Faptul că șirul $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ este ortogonal pe $[0, 1]$ revine la a proba că

$$\int_0^1 r_m(t)\ r_n(t)\, dt = 0 \text{ pentru } 0 \leqslant m < n,$$

ceea ce este imediat, deoarece pe fiecare interval diadic, unde r_m este constant, r_n ia pe jumătate din interval valoarea 1 și pe cealaltă jumătate valoarea -1. Defectul principal al șirului ortogonal $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ îl constituie faptul că el nu este șir complet în sensul indicat în 6.1, deoarece, luînd $g(t) = \cos 2\pi t$ sau $g = r_1 r_2$, se obține o funcție din $L_2[0,1]$ care este ortogonală la toate funcțiile r_n, $n \geqslant 0$, fără a fi nulă. Walsh [15] a reușit să „completeze" șirul $\{r_n\}_{n\geqslant 0}$ prin considerarea tuturor produselor finite Rademacher, definind astfel un exemplu remarcabil de șir ortogonal complet de funcții în $L_2[0, 1]$ având doar două valori.

9.4. **Proprietățile funcțiior Walsh.** Fixăm $q \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $N = q^n$, $\mathcal{T} = \{0, 1, \ldots, N-1\}$ ca mai sus.

a) Legătura între funcțiile Rademacher și funcțiile Walsh este exprimată prin formula

$$w_k(t) = r_1(t)^{A_1} \cdot r_2(t)^{A_2} \cdot \ldots \cdot r_n(t)^{A_n},\ (\forall)\ k,\ t \in \mathcal{T}.$$

Demonstrație. Reamintim că $r_l(t) = \exp\left(j\frac{2\pi}{q} t_l\right)$, $(\forall)\ l$, deci aplicînd formulele (3.66) și (3.67), rezultă

$$w_k(t) = \exp\left(j\frac{2\pi}{q} B_k(t)\right) = \exp\left(j\frac{2\pi}{q} \sum_{l=1}^{n} A_l t_l\right) = \prod_{l=1}^{n} r_l(t)^{A_l}.$$

Se poate proba că familia funcțiilor $\{w_k\}_{k\in\mathcal{T}}$ coincide cu familia funcțiilor $\{h_k\}_{k\in\mathcal{T}}$ definite în exemplul 7.2, (c), doar ordinea diferă în cele două cazuri.

b) Pentru orice k, $t \in \mathcal{T}$ avem $|w_k(t)| = 1$ și $w_k(t) = w_t(k)$.

Demonstrația este imediată conform cu (3.66) și observînd că $B_k(t) = B_t(k)$, ceea ce rezultă prin calcul direct.

c) Are loc proprietatea de multiplicativitate : pentru orice $r, s \in \mathscr{T}$, $w_r \cdot w_s = w_{r \oplus s}$.

Într-adevăr, trebuie probat că $w_r(t) \cdot w_s(t) = w_{r\oplus s}(t)$, $(\forall)\, t \in \mathscr{T}$, ceea ce rezultă folosind definiția (3.66) și observînd că $B_r(t) + B_s(t) - B_{r\oplus s}(t)$ este un întreg divizibil cu q.

d) Are loc relația $w_1 + w_2 + \ldots + w_{N-1} = 0$.

Acest fapt revine la a proba că

$$e^{j\frac{2\pi}{q}\cdot B_1(t)} + e^{j\frac{2\pi}{q}\cdot B_2(t)} + \ldots + e^{j\frac{2\pi}{q}\cdot B_{N-1}(t)} = 0, \quad (\forall) t \in \mathscr{T}.$$

Notînd $\alpha = e^{j\frac{2\pi}{q}}$, rezultă $\alpha^q = 1$ și relația anterioară decurge folosind definiția numerelor $B_k(t)$.

Din proprietățile b), c), d) și din teorema III.8 rezultă următorul rezultat fundamental :

Teorema III.12. *Șirul* $\{w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}\}$ *de funcții Walsh constituie o bază standard de semnale în* S_d.

În particular, are loc proprietatea de ortogonalitate : $\langle w_r, w_s\rangle = 0$ pentru $r \neq s$ și $\langle w_r, w_r\rangle = N$. De aici rezultă imediat completitudinea șirului finit $\{w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}\}$ în S_d (căci dacă $f \in S_d$ și $\langle f, w_k\rangle = 0$ pentru orice $k \in \mathscr{T}$, scriind $f = \sum_{l=0}^{N-1} \lambda_l w_l$, rezultă $\lambda_k = 0$, deci $f = 0$). Desigur, toate proprietățile stabilite în § 8 au loc pentru cazul bazei standard Walsh.

Fie $x \in S_d$ un semnal discret oarecare ; acesta admite o reprezentare unică sub forma $x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k w_k$, cu c_k constante reale sau complexe, numită *reprezentarea Walsh a lui* x. Coeficienții λ_k se determină imediat din relațiile de ortogonalitate, anume

$$c_k = \frac{1}{N}\langle x, w_k\rangle = \frac{1}{N}\int_0^1 x(t)\,\overline{w}_k(t)\,dt, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1,$$

în analogie cu cazul dezvoltării clasice Fourier în serie de semnale sinusoidale (sau exponențiale complexe). Conform observației 8.2, 2) șirul $\{c_k\}_{0\leqslant k\leqslant N-1}$ este tocmai transformata Fourier inversă a lui x relativ la baza standard Walsh (numită pe scurt *transformata Fourier-Walsh*).

9.5. **Observații.** 1) Sinteza unui semnal discret cu ajutorul semnalelor Walsh prezintă avantaje în raport cu sinteza Fourier clasică, în special în cazul semnalelor rectangulare sau al unor semnale discontinue. Trebuie notat că transformarea Fourier discretă definită în § 3 angajează înmulțiri repetate de numere complexe, în timp ce transformarea Fourier-Walsh pentru $q = 2$ este definită doar prin adunări și scăderi, ceea ce ușurează calculul ei prin metode digitale. Detalii se găsesc în cap. VI.

2) Faptul că produsul a două funcții Walsh este tot o funcție Walsh poate fi utilizat în unele probleme neliniare. Presupunem că un semnal discret $x \in S_d$ poate fi reprezentat ca o combinație liniară de p funcții Walsh (cu $q = 2$, $N = 2^m$) și că se efectuează o transformare neliniară $y = \Phi(x)$ cu Φ polinom ; atunci și y va fi o combinație liniară a celor p funcții Walsh inițiale, w_0 și încă a cel mult $(p-1)$! funcții Walsh cu secvențele obținute prin operația $\oplus$. De exemplu, fie $x(t) = \alpha w_k(t) + \beta w_l(t)$ și $\Phi(x) = ax^2 + bx$ cu a, b, α, β constante și $k, l \in \mathscr{T}$ fixate. Atunci rezultă $y(t) = a(\alpha^2 + \beta^2)\, w_0(t) + \alpha\, b w_k(t) + b\beta w_l(t) + 2a\alpha\beta w_{k\oplus l}(t)$, folosind proprietatea de multiplicitate și relațiile $l \oplus l = 0$, $k \oplus k = 0$. În cazul cînd x ar fi un semnal sinusoidal continuu, $x(t) = \alpha \cos \omega\, kt + \beta \sin \omega\, lt$, atunci semnalul $y(t) = ax(t)^2 + bx(t)$ ar consta din semnalul x amplificat, din armonicele sale secunde și două produse intermodulate ; în general, extragerea semnalului x din y este mai simplă în cazul funcțiilor Walsh [2].

3) Trebuie subliniat că se poate demonstra o teoremă de eșantionare relativ la transformarea Fourier-Walsh, similară teoremei III.6 ; anume, dacă $q = 2$ și dacă un semnal $x(t)$ are spectrul secvențial nul pentru secvențe mai mari decît 2^p zs, atunci el poate fi reconstituit din eșantioane echidistante luate la intervale de lungime $\frac{1}{2^{p+1}}$.

4) A. Haar a construit un șir ortonormal complet de funcții din $L_2[0, 1]$, avînd cel mult cîte trei valori, care aproximează uniform și rapid orice funcție continuă $[0, 1] \to \mathbb{R}$. Există o legătură strînsă între funcțiile Haar și funcțiile Walsh, există o transformare de tip Fourier-Haar, utilizată în probleme de filtrare digitală și recunoașterea formelor, dar semnalele Haar nu formează o bază standard [4, 10].

9.6. **Ecuații cu q-diferențe finite.** Este evident că un operator L, $Ly = \sum_{i=0}^{r} a_i y^{(n-i)}(x)$, $a_i \in \mathbb{C}$ constante, are vectori proprii printre exponențialele $e^{\alpha x}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Fie un operator $\mathbb{C}$-liniar în q-diferențe finite

$$L : S_d \to S_d, \quad x(t) \mapsto \sum_{i=0}^{r} a_i x(t \ominus i), \tag{3.69}$$

unde a_i, $0 \leqslant i \leqslant r$, sînt constante reale sau complexe. Așadar,

$$L(x) = \sum_{i=0}^{r} a_i (x * \delta_i).$$

Fixăm o bază standard $\mathscr{B} = \{E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}\}$, $E_k = [u_0^k, u_1^k, \ldots, u_{N-1}^k]'$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$. Introducem constantele c_k, definite prin

$$c_k = \sum_{i=0}^{r} a_i \bar{u}_i^k, \quad k \in \mathscr{T}. \tag{3.70}$$

Teorema III.13 [11]. (a) *Semnalele discrete* E_k *sînt vectori proprii pentru operatorul* L *definit prin* (3.69), *avînd ca valori proprii scalarii* c_k, $0 \leqslant k \leqslant N-1$.

(b) *Ecuaţia omogenă* $L(x) = 0$ *are soluţii netriviale în* S_d *dacă şi numai dacă există* $k \in \mathcal{T}$ *astfel încît* $c_k = 0$.

(c) *O ecuaţie neomogenă* $L(x) = b(t)$ *cu* $b \in S_d$, $b = \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k E_k$ *are soluţii în* S_d *dacă şi numai dacă de îndată ce* $\lambda_k \neq 0$ *rezultă* $c_k \neq 0$.

Demonstraţie. (a) Avem $E_k \neq 0$ prin însăşi definiţia bazei standard. Rămîne de probat că $L(E_k) = c_k E_k$, adică $\sum_{i=0}^{r} a_i (E_k * \delta_i) = \left(\sum_{i=0}^{r} a_i \bar{u}_i^k \right) E_k$, pentru orice $k \in \mathcal{T}$. Egalitatea a două semnale discrete revine la egalitatea pe componente, deci trebuie verificat că

$$\sum_{i=0}^{r} a_i u_{j \ominus i}^k = \sum_{i=0}^{r} a_i \bar{u}_i^k u_j^k,$$

ceea ce rezultă observînd că $u_{j \ominus i}^k = u_j^k \cdot u_{\ominus i}^k = u_j^k \cdot \bar{u}_i^k$.

(b) Orice $x \in S_d$ se scrie unic ca o combinaţie liniară de vectori din $\mathcal{B}$, $x = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_k E_k$. Scriind că x este soluţie a ecuaţiei $L(x) = 0$, rezultă că $\mu_k c_k = 0$ pentru orice $k \in \mathcal{T}$. Soluţia este netrivială dacă şi numai dacă există $k \in \mathcal{T}$ astfel încît $\mu_k \neq 0$, adică $c_k = 0$.

(c) Raţionînd ca la punctul (b), rezultă $\mu_k c_k = \lambda_k$, de unde se obţine concluzia.

Dacă se identifică $y = Lx$ cu ieşirea unui sistem dinamic, se poate considera că intrarea $x = \sum_{k=0}^{N} \mu_k E_k$ generează ieşirea $y = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_k L(E_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_k c_k E_k$, deci coeficienţii c_k, $k \in \mathcal{T}$, pot fi interpretaţi ca ponderi ale sistemului.

Corolarul 1. *Operatorul* L *are soluţie fundamentală (adică există un semnal* $e \in S_d$ *astfel încît* $L(e) = \delta$) *dacă şi numai dacă* $c_k \neq 0$ *pentru orice* $k \in \mathcal{T}$. *În acest caz,*

$$e = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{c_k} E_k .$$

Demonstraţie. Se poate proba imediat că $\delta = \frac{1}{N}(E_0 + E_1 + \ldots + E_{N-1})$; utilizînd teorema III.13, (c) cu $\lambda_k = \frac{1}{N} \neq 0$ şi punînd $e = \sum_{k=0}^{N-1} \mu_k E_k$, rezultă $\mu_k c_k = \frac{1}{N}$, deci $\mu_k = \frac{1}{N c_k}$.

Din corolarul 1 şi din teorema III.13, (b) rezultă direct că operatorul L are soluţie fundamentală dacă şi numai dacă acesta este injectiv.

Corolarul 2. *Presupunem că* L *are soluţie fundamentală* $e \in S_d$. *Atunci ecuaţia* $L(x) = b$ *are soluţia unică* $x = b * e$.

Demonstraţie. Evident, $L(b * e) = \sum_{i=0}^{r} a_i (b * e) * \delta_i = b * \sum_{i=0}^{r} a_i (e * \delta_i) = b * L(e) = b * \delta = b$. Unicitatea soluţiei rezultă din faptul că L este injectiv.

Ecuaţia $Lx = b$, $b \in S_d$ fiind dat, poate fi rezolvată şi prin aplicarea operatorului Fourier. Anume, din corolarul 1 al teoremei III.13, rezultă relaţia $\sum_{i=0}^{r} a_i \cdot F_x \cdot E_i = F_b$, deci $F_x = \frac{F_b}{\sum_{i=0}^{r} a_i E_i}$ şi semnalul x căutat se recuperează aplicînd F_x^{-1}.

9.7. **Exemple.** a) Considerăm mişcarea liberă a unui pendul q-adic descrisă prin ecuaţia $x(t \ominus 2) + \omega^2 x(t) = 0$, cu ω constantă reală. Ecuaţia se scrie $L_x = x * \delta_2 + \omega^2 x = 0$. Conform teoremei III.13, (b), rezultă că ecuaţia are soluţii nebanale dacă există $k \in \mathcal{T}$ astfel încît $\overline{E_k(2)} + \omega^2 = 0$, de unde se obţine în mod necesar că $|\omega| = 1$, adică $\omega = \pm 1$. Considerăm că $\mathcal{B}$ este baza standard Walsh (teorema III.12) şi fie $k = (k_1 k_2 \ldots k_n)_q$. Atunci $w_k(1) = \exp\left(j \frac{2\pi}{q} k_1\right)$, $w_k(2) = \exp\left(j \frac{4\pi}{q} k_1\right)$ şi se obţine relaţia $\exp\left(-j \frac{4\pi}{q} k_1\right) = -1$. Aşadar, există $l \in \mathbb{Z}$ astfel că $4k_1 + q = 2lq$, $0 \leqslant k_1 \leqslant q-1$ şi, în particular, q este necesar par.

Luînd $q = 2$, relaţia precedentă nu poate avea loc şi rezultă că nu există „2-vibraţii libere" de tip w_k ale pendulului. Dacă $q = 4$, rezultă $k_1 = 2l - 1$, deci $k_1 = 1$ sau $k_1 = 3$ şi, în concluzie, 4-vibraţiile libere de tip Walsh w_k sînt cele pentru care secvenţa k are prima cifră, din scrierea 4-adică, egală cu 1 sau 3.

b) Considerăm ecuaţia $x(t \ominus 2) + x(t \ominus 1) = 8\delta_1 + 8\delta_2$ şi căutăm soluţiile ei Walsh (pentru $q = 2$, $n = 3$); în acest caz, avem $8\delta_1 + 8\delta_2 = 2(w_0 + w_1 + w_2 + w_3)$, ceea ce sugerează existenţa unor soluţii de forma $x = \sum_{k=0}^{7} c_k w_k$; se obţine

$$c_k[w_k(2) + w_k(1)] = \begin{cases} 2, & \text{dacă } 0 \leqslant k \leqslant 3, \\ 0, & \text{dacă } 4 \leqslant k \leqslant 7, \end{cases}$$

și cum $w_k(2) = 1$, $w_k(1) = (-1)^{k_1}$, se obține $c_k = 1$ dacă $0 \leqslant k \leqslant 3$ (nedeterminat în rest) și, ca atare, soluția generală a ecuației este $x = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + \sum_{k=4}^{7} A_k w_k$, $A_k \in \mathbb{C}$ fiind constante arbitrare.

c) În corolarul 1 s-a probat că existența unei soluții fundamentale a unui operator L depinde de îndeplinirea condiției $c_k \neq 0$ pentru orice $k \in \mathcal{T}$, condiție de tip diofantic, în dependență de q și n. De exemplu, operatorul $Lx = x * \delta_2 + x$ are soluție fundamentală dacă și numai dacă $\bar{u}_2^k \neq -1$ pentru orice $k \in \mathcal{T}$. Dacă q este impar, atunci această condiție este îndeplinită atît în baza standard a funcțiilor Walsh, cît și în baza standard a exponențialelor discrete [căci dacă q este impar și A este întreg, atunci $\exp\left(j\frac{2\pi}{q}A\right) \neq -1$].

BIBLIOGRAFIE

1. Ahmed, N., Rao, K. R. *Orthogonal transforms for digital signal processing.* Berlin, Springer Verlag, 1975.
2. Beauchamp, K. G., *Walsh functions and their applications.* New York, Academic Press, 1975.
3. Harmuth, H. F. *Transmission of information by orthogonal functions.* Berlin, Springer Verlag, 1970.
4. Higgins, J. R. *Completeness and basis properties of sets of special functions.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1977.
5. Hurghin, Ia. I., Iakovlev, V.P. *Metodi teorii felih funkții v radiotehnike i optike.* Moscova, Sov. Radio, 1962.
6. Nicolau, E., Popovici, Al. *Introducere în cibernetica sistemelor: discrete* (1966); *continue* (1972); *hibride.* București, Editura tehnică, 1975.
7. Oppenheim, A. V., Schafer, R. W. *Digital signal processing.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1975.
8. Pallu de la Barriére, R. *Cours d'automatique.* Paris, Dunod, 1966.
9. Rademacher, H. *Einige Sätze von allgemeinen Orthogonalfunktionen,* Math. Annalen, Nr. 87, 1922, pp. 122–138.
10. Singer, I. *Bases in Banach spaces.* Berlin, Springer Verlag, 1970.
11. Stanomir, D., Stănășilă, O. *Towards a general theory of discrete signals* I. Buletinul IPB, București, Nr. 3, Seria electrotehnică, 1977, pp. 1–8; II, Buletinul Politehnicii Iași, Fasc. 3–4, 1978, pp. 9–13.
12. Stanomir, D., Stănășilă, O. *Elemente de teoria matematică a semnalelor.* București, Litografia IPB, 1977.
13. Steiglitz, K. *The equivalence of digital and analog signal processing.* Inform. Control, Nr. 8, 1965, pp. 455–467.
14. Trahtman, A. M., Trahtman, V. A. *Osnovi teorii diskretnih signalov na konecinih intervalah.* Moscova, Sov. Radio, 1975.
15. Walsh, J. L. *A closed set of orthogonal functions.* Amer. J. of Math. Nr. 45, 1923, pp. 5–24.
16. Whittaker, E. T. *On the functions which are represented by the extension of the interpolation theory.* Proc. Royal Soc. Edinbourg, 35, 1915, pp. 181–194.

Capitolul IV

STUDIUL MATEMATIC AL REALIZABILITĂȚII UNOR SISTEME LINIARE

A. CIRCUITE ELECTRICE

Teoria transformărilor integrale ale sistemelor de tip funcție sau distribuție, prezentată în cap. II, oferă un cadru natural pentru dezvoltarea teoriei generale a circuitelor electrice și în particular, permite fundamentarea teoretică riguroasă a conceptului de realizabilitate a funcțiilor de circuit. În prima parte a acestui capitol, sînt prezentate succint cîteva noțiuni legate de descrierea circuitelor electrice, adoptînd cu precădere un punct de vedere sistemic, fără a insista pe aspecte fenomenologice.

§ 1. Circuite electrice, funcții de circuit

1.1. **Structura ecuațiilor de evoluție a circuitelor electrice.** O rețea electrică este un graf, avînd noduri și laturi în număr finit. Fiecărei laturi îi sînt asociate cîte două semnale, tensiunea și curentul; mai precis, dacă numărul laturilor este b și dacă se notează prin $u_k(t)$ și $i_k(t)$, respectiv tensiunea și curentul pe latura k, $1 \leqslant k \leqslant b$, la momentul t, sînt definite două funcții vectoriale de timp

$$\mathbf{u} = [u_1 u_2 \dots u_b]', \quad \mathbf{i} = [i_1 i_2 \dots i_b]',$$

care pot fi determinate în principiu de îndată ce sînt cunoscute $2b$ condiții independente. Relațiile funcționale la care sînt supuse semnalele din laturi se numesc *relații constitutive*; după tipul de relații funcționale se disting diversele elemente de circuit. *Elementele nor-*

male de circuit sînt caracterizate prin relaţii funcţionale de forma

$$u = \left(L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + R + \frac{1}{C}\int \mathrm{d}t\right) i,$$

în care cel puţin unul din scalarii R (rezistenţa), L (inducţia), C (capacitatea) este nenul. *Legăturile* (sau *constrîngerile*) unei reţele sînt relaţii funcţionale la care sînt supuse semnalele din reţea, adică tensiunile şi curenţii respectivi; notînd cu $n_v + 1$ numărul de noduri ale reţelei, trebuie remarcat că pentru reţele nebanale, numărul b de laturi satisface condiţia $b \geqslant n_v$.

Legăturile care se referă la curenţi se numesc *ecuaţiile lui Kirchhoff de curent* şi sînt de forma

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{0}, \tag{4.1}$$

unde $\mathbf{Q}$ este o matrice de tip $n_v \times b$ şi de rang n_v, determinată din geometria reţelei. Legăturile privitoare la tensiuni sînt numite *ecuaţiile lui Kirchhoff de tensiune* şi sînt de forma

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}, \tag{4.2}$$

unde $\mathbf{B}$ este o matrice de tip $(b-n_v) \times b$ şi de rang $b - n_v$, determinată de asemenea din geometria reţelei.

Din structura legăturilor rezultă că spaţiul semnalelor-curent are dimensiunea $b - n_v$, iar spaţiul semnalelor-tensiune are dimensiunea n_v. Aşadar, baze ale acestor spaţii vectoriale vor avea respectiv $b - n_v$ şi n_v elemente şi, printr-o numerotare adecvată şi sensuri convenabil alese pentru tensiuni şi curenţi, se poate presupune că într-o reţea electrică ca mai sus, baza de tensiuni este constituită din tensiunile de pe primele n_v elemente, iar baza de curenţi, din curenţii de pe următoarele $b - n_v$ elemente. Indexînd cu A (respectiv B) vectorul de tensiune sau de curent constituit din primele n_v (respectiv următoarele $b - n_v$) elemente, exprimările tensiunilor şi curenţilor prin bazele corespunzătoare vor fi de forma

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_A\\ \mathbf{u}_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{1}\\ \mathbf{F}'\end{bmatrix} \cdot \mathbf{u}_A, \qquad \begin{bmatrix}\mathbf{i}_A\\ \mathbf{i}_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\mathbf{F}\\ \mathbf{1}\end{bmatrix} \cdot \mathbf{i}_B,$$

sau echivalent,

$$[\mathbf{1} \quad \mathbf{F}] \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{i}_A\\ \mathbf{i}_B\end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad [-\mathbf{F}' \quad \mathbf{1}] \cdot \begin{bmatrix}\mathbf{u}_A\\ \mathbf{u}_B\end{bmatrix} = \mathbf{0}, \tag{4.3}$$

unde $\mathbf{F}$ este o matrice constantă de tip $n_v \times (b - n_v)$, dedusă din geometria reţelei [3], iar $\mathbf{1}$ este matricea unitate corespunzătoare.

Sursa ideală de tensiune este caracterizată prin faptul că tensiunea pe fiecare latură este un semnal fixat, prescris şi vom nota cu $\mathbf{u}_E$ vectorul corespunzător; *sursa ideală de curent* este caracterizată prin aceea că prin fiecare latură curentul este un semnal fixat, prescris şi vom nota cu $\mathbf{i}_J$ vectorul acestor semnale. Pentru ca reprezentarea (4.1) să fie consistentă, este necesar ca vectorul $\mathbf{u}_E$ să fie cuprins în vectorul $\mathbf{u}_A$, iar vectorul $\mathbf{i}_J$ în vectorul $\mathbf{i}_B$.

În cele ce urmează, vom da o descriere a evoluţiei reţelei, în ipoteza că nu există surse de curent. Considerăm partiţiile

$$\mathbf{u} = [\underbrace{\mathbf{u}'_E \; \mathbf{u}'_t}_{\mathbf{u}'_A} \; \underbrace{\mathbf{u}'_l}_{\mathbf{u}'_B}]', \quad \mathbf{i} = [\underbrace{\mathbf{i}'_E \; \mathbf{i}'_t}_{\mathbf{i}'_A} \; \underbrace{\mathbf{i}'_l}_{\mathbf{i}'_B}]', \tag{4.4}$$

unde vectorul indexat cu t (respectiv cu l) cuprinde tensiunile sau curenţii asociaţi elementelor normale de circuit cuprinse în mulţimea A (respectiv B); similar, matricea $\mathbf{F}$ are o partiţie în blocuri de forma $\mathbf{F} = \begin{bmatrix}\mathbf{F}_{el}\\ \mathbf{F}_{tl}\end{bmatrix}$. Din relaţiile $\mathbf{i}_A = -\mathbf{F}\mathbf{i}_l$, $\mathbf{u}_l = \mathbf{F}'\mathbf{u}_A$ din (4.3), rezultă pentru curenţii şi tensiunile din A relaţiile

$$\mathbf{i}_E = -\mathbf{F}_{El}\,\mathbf{i}_l, \; \mathbf{i}_t = -\mathbf{F}_{tl}\,\mathbf{i}_l, \; -\mathbf{F}'_{tl}\,\mathbf{u}_t + \mathbf{u}_l = \mathbf{F}'_{El}\,\mathbf{u}_E. \tag{4.5}$$

Ţinînd seama de faptul că relaţiile constitutive pentru elementele normale de circuit sînt de forma $\mathbf{u}_t = \mathbf{z}_t\mathbf{i}_t$, $\mathbf{u}_l = \mathbf{z}_l\mathbf{i}_l$ unde $\mathbf{z}_t$, $\mathbf{z}_l$ sînt matrice de operatori integro-diferenţiali şi folosind (4.5), rezultă $\mathbf{F}'_{El}\mathbf{u}_E = \mathbf{z}_l\,\mathbf{i}_l + \mathbf{F}'_{tl}\,\mathbf{z}_t\,\mathbf{F}_{tl}\,\mathbf{i}_l$, adică

$$\mathbf{z}_m\mathbf{i}_l = \mathbf{F}'_{El}\mathbf{u}_E, \tag{4.6}$$

unde am notat

$$\mathbf{z}_m = \mathbf{z}_l + \mathbf{F}'_{tl}\,\mathbf{z}_l\mathbf{F}_{tl}. \tag{4.7}$$

Relaţiile (4.6) reprezintă ecuaţiile de evoluţie ale unui circuit electric alimentat în tensiune. Mărimile date sînt cuprinse în vectorul $\mathbf{u}_E$, iar mărimile necunoscute sînt cuprinse în vectorul $\mathbf{i}_l$. Cu notaţiile din cap. II, presupunem că $\mathbf{u}_E$ aparţine clasei Ω sau că este o distribuţie din $\mathscr{D}'$ cu suport pozitiv şi similar pentru $\mathbf{i}_l$. Aplicînd transformarea Laplace în ambii membri ai relaţiei (4.6) şi considerînd condiţii iniţiale nule, se obţine ecuaţia matriceală algebrică

$$\mathbf{Z}_m(s)\cdot\mathbf{I}_l(s) = \mathbf{F}'_{El}\cdot\mathbf{U}_E(s), \tag{4.8}$$

în care $\mathbf{Z}_m(s)$ este operatorul algebric în s asociat prin $\mathscr{L}$ operatorului $\mathbf{z}_m$, $\mathbf{I}_l(s)$ este imaginea Laplace a lui $\mathbf{i}_l$ şi $\mathbf{U}_E(s)$ este imaginea Laplace a lui $\mathbf{u}_E$. Matricea $\mathbf{Z}_m(s)$ are ca elemente polinoame în variabila complexă $s = \alpha + j\omega$, iar ecuaţia caracteristică asociată lui (4.6) este

$$d(s) \overset{\Delta}{=} \det \mathbf{Z}_m(s) = 0. \tag{4.9}$$

Fie α_M cea mai mare dintre părţile reale ale rădăcinilor ecuaţiei (4.9). Atunci matricea $\mathbf{Z}_m(s)$ admite o inversă olomorfă (adică toate elementele matricei inverse sînt funcţii olomorfe în variabila s) în semiplanul deschis $\operatorname{Re} s > \alpha_M$. În acest semiplan ecuaţia (4.8) se poate explicita în $\mathbf{I}_l(s)$ şi se obţine $\mathbf{I}_l(s) = \mathbf{Z}_m^{-1}(s)\cdot\mathbf{F}'_{El}\cdot\mathbf{U}_E(s)$, adică

$$\mathbf{I}_l(s) = \mathbf{H}(s)\cdot\mathbf{U}_E(s), \quad \text{unde} \quad \mathbf{H}(s) = \mathbf{Z}_m^{-1}(s)\cdot\mathbf{F}'_{El}. \tag{4.10}$$

Matricea $\mathbf{H}(s)$ de funcţii se numeşte *funcţia matriceală de circuit* a sistemului considerat; elementele ei sînt fracţii raţionale în variabila s şi, din acest motiv, $\mathbf{H}(s)$ se mai numeşte *matricea raţională* asociată reţelei studiate. Dacă elementele de circuit au parametri reali (adică L, C, R, ... sînt scalari reali), atunci matricea $\mathbf{H}(s)$ are în semiplanul $\operatorname{Re} s > \alpha_M$ proprietatea:

$\mathbf{H}(\alpha)$, $\alpha > \alpha_M$, este o matrice reală (cu toate elementele în $\mathbb{R}$); sau

$$\mathbf{H}(\bar{s}) = \overline{\mathbf{H}(s)}. \tag{4.11}$$

Evident, această proprietate se extinde la întreg planul complex (s), cu excepţia polilor lui $\mathbf{H}(s)$.

Orice matrice avînd ca elemente fracţii raţionale în s cu coeficienţi reali se numeşte *matrice real-raţională*. Mulţimea matricelor real-raţionale de tip $m \times n$ se notează cu $M_{m,n}(\mathbb{R}(s))$; o astfel de matrice satisface evident proprietatea (4.11) şi, în particular, aceasta se întîmplă pentru orice matrice imagine Laplace a unei matrice de funcţii (din Ω) din domeniul timp, de tip exponenţial, polinomial, sinusoidal etc.

Vom vedea mai tîrziu că pentru sisteme cauzale avem $\alpha_M = 0$ şi $\mathbf{H}(s)$ este olomorfă în semiplanul $\alpha > 0$; aceeaşi proprietatea o au semnalele din $\mathscr{S}' \cap \mathscr{D}'_+$.

1.2. **Observaţii.** a) Relaţia (4.10) arată, sub o formă generală, că în domeniul (s), ecuaţiile de evoluţie ale unei reţele electrice revin la multiplicarea la stînga a vectorului surselor cu o matrice fixată $\mathbf{H}(s)$ a cărei structură depinde numai de sistemul considerat. Faptul că s-au presupus condiţii iniţiale nule este motivat prin punerea în evidenţă a unei entităţi care să depindă exclusiv de sistem şi nu de modul în care este injectată energia în sistem.

b) Proprietatea (4.11) care are loc în semiplanul de olomorfie $\operatorname{Re} s > \alpha_M$ nu se extinde în general (în cazul neraţional) în afara acestuia; de exemplu, transformarea Laplace a semnalului

$$f(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t}, & \text{dacă } t > 0, \\ 0, & \text{dacă } t \leqslant 0, \end{cases}$$

este

$$F(s) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{2\cdot e^{-u^2}}{\sqrt{s}}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$$

şi funcţia $F(s)$ are punct critic algebric în $s = 0$, iar $\alpha_M = 0$; evident, $F(\alpha)$ este real dacă şi numai dacă $\alpha > 0$, deci proprietatea (4.11) nu se extinde pentru $\alpha < 0$.

c) În condiţiile în care este posibilă trecerea de la multiplicare în domeniul (s) la convoluţie în domeniul timp t, relaţiei (4.10) îi corespunde o relaţie de forma

$$\mathbf{i}_l(t) = \mathbf{h}(t) * \mathbf{u}_E(t), \tag{4.12}$$

unde

$$\mathbf{H}(s) = L_{\mathbf{h}(t)}, \quad \text{adică} \quad \mathbf{h}(t) \xrightarrow{\mathscr{L}} \mathbf{H}(s). \tag{4.13}$$

Funcţia $\mathbf{h}(t)$ se numeşte *funcţia Green* (sau *funcţia de pondere*) a reţelei considerate. Scriind $\mathbf{h}(t) = [h_{ij}(t)]_{\substack{1\leqslant i\leqslant n_l \\ 1\leqslant j\leqslant n_E}}$, egalitatea (4.12) se scrie explicit $i_{lk}(t) = \sum_{j=1}^{n_E} [h_{kj}(t) * u_{Ej}(t)]$, $1 \leqslant k \leqslant n_l$ (n_l şi n_E reprezintă numărul componentelor vectorilor i_l, u_E).

Semnificaţia fizică a elementelor matricei $\mathbf{h}$ este următoarea: elementul $h_{pq}(t)$ reprezintă curentul $i_{lp}(t)$ creat de excitaţia particulară $\mathbf{u}_E = [0, 0, \ldots, \delta_q(t), 0, \ldots, 0]'$; de aceea $\mathbf{h}(t)$ se mai numeşte *răspuns-impuls al sistemului* $\mathbf{u}_E \mapsto \mathbf{i}_l$.

§ 2. Funcţii energetice ale circuitelor electrice

În acest paragraf vom prezenta cadrul natural în care apar formele pătratice pe un spaţiu $\mathbb{C}^p$, care definesc funcţiile energetice ale circuitelor electrice.

2.1. **Forme pătratice asociate circuitelor electrice.** Se consideră o reţea electrică alimentată în tensiune astfel încît vectorul $\mathbf{i}_l$ să aibă p componente, iar alimentarea se face prin n surse de tensiune astfel încît fiecare generator să fie parcurs de cîte un singur curent (fig. 4.1). În aceste condiţii membrul al doilea al relaţiei (4.8) se scrie

$$\mathbf{F}'_{El}\,\mathbf{U}_E(s) = [U_{E1}(s) \ldots U_{E,n-1}(s)\,U_{En}(s)\;0 \ldots 0]' \overset{\Delta}{=} \mathbf{U}_m(s),$$

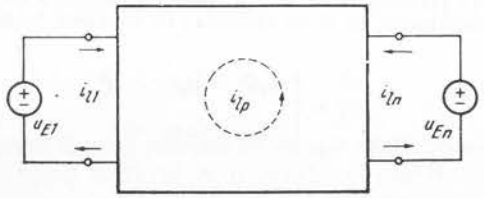


Fig. 4.1. Reţea electrică alimentată prin generatoare de tensiune.

iar relaţia (4.8) devine

$$\mathbf{Z}_m(s)\,\mathbf{I}_l(s) = \mathbf{U}_m(s). \tag{4.14}$$

Înmulţind la stînga cu $\mathbf{I}_l^*(s)$, rezultă

$$\mathbf{I}_l^*(s)\,\mathbf{Z}_m(s)\,\mathbf{I}_l(s) = P_c(s), \tag{4.15}$$

unde P_c este funcţia scalară complexă $P_c(s) = \sum_{k=1}^{n} U_{Ek}(s)\,\overline{I_{lk}(s)}$ (reamintim că pentru orice matrice $\mathbf{A}$, se notează cu $\mathbf{A}^*$ transpusa conjugatei lui $\mathbf{A}$).

Ţinînd seama de relaţiile constitutive asociate elementelor normale de circuit, matricea $\mathbf{Z}_m(s)$ se scrie $\mathbf{Z}_m(s) = \mathbf{R}_m + s\mathbf{L}_m + \frac{1}{s}\mathbf{D}_m$, în care $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{L}_m$, $\mathbf{D}_m$ sînt matrice constante de tip $p \times p$ cu toate

elementele reale. Relaţia (4.15) se exprimă atunci astfel

$$F_0(s) + sT_0(s) + \frac{1}{s}V_0(s) = P_c(s), \tag{4.16}$$

unde F_0, T_0, V_0 sînt forme pătratice $\mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$, în p variabile, definite prin

$$F_0(s) = \mathbf{I}_l^*(s)\,\mathbf{R}_m\mathbf{I}_l(s), \quad T_0(s) = \mathbf{I}_l^*(s)\,\mathbf{L}_m\mathbf{I}_l(s), \quad V_0(s) = \mathbf{I}_l^*(s)\,\mathbf{D}_m\mathbf{I}_l(s). \tag{4.17}$$

Acestea se numesc *funcţiile energetice* ale reţelei electrice considerate şi au fost introduse în teoria reţelelor electrice de către Otto Brune [17].

2.2. **Observaţii.** a) Scalarul $P_c(s)$ există pe axa $s = \mathrm{j}\omega$, cu excepţia polilor şi conform cu (4.16),

$$P_c(\mathrm{j}\omega) = F_0(\mathrm{j}\omega) + \mathrm{j}\left[\omega T_0(\mathrm{j}\omega) - \frac{1}{\omega}V_0(\mathrm{j}\omega)\right];$$

primul termen $F_0(\mathrm{j}\omega)$ reprezintă puterea medie absorbită de reţea, iar termenul imaginar reprezintă puterea reactivă absorbită de circuit.

Dacă circuitul considerat nu conţine decît rezistenţe, adică $\mathbf{L}_m = \mathbf{D}_m = 0$ şi dacă matricea $\mathbf{R}_m$ este simetrică, atunci P_c este o mărime reală şi $F_0(s) = P_c(s)$.

Dacă circuitul se reduce la o singură buclă, atunci egalitatea (4.16) se reduce la

$$\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right)|I(s)|^2 = U_E(s)\,\overline{I(s)}.$$

b) Trebuie remarcat faptul că în cazul general, pentru matricele $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{L}_m$, $\mathbf{D}_m$ cu toate elementele reale, formele pătratice $F_0(s)$, $T_0(s)$, $V_0(s)$ nu au neapărat valori reale; dacă în plus cele trei matrice sînt simetrice, atunci valorile acestor forme pătratice sînt reale [într-adevăr, dacă $\mathbf{A}$ este o matrice pătrată $n \times n$ hermitică şi dacă $\mathbf{z}$ este un vector coloană n-dimensional din $\mathbb{C}^n$, atunci numărul $\mathbf{z}^*\mathbf{Az}$ este real, deoarece el coincide cu conjugatul său: $\overline{\mathbf{z}^*\mathbf{Az}} = (\mathbf{z}^*\mathbf{Az})^* = \mathbf{z}^*\mathbf{A}^*\mathbf{z} = \mathbf{z}^*\mathbf{Az}$].

Pentru dezvoltările care vor urma, este util să fie făcute unele precizări privitoare la matricele $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{L}_m$, $\mathbf{D}_m$, care decurg din structura reţelei şi din tipul elementelor conţinute. Din relaţia (4.7) se obţin formulele

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{R}_l + \mathbf{F}'_{tl}\mathbf{R}_t\mathbf{F}_{tl}, \quad \mathbf{L}_m = \mathbf{L}_l + \mathbf{F}'_{tl}\mathbf{L}_t\mathbf{F}_{tl}, \quad \mathbf{D}_m = \mathbf{D}_l + \mathbf{F}'_{tl}\mathbf{D}_t\mathbf{F}_{tl}, \tag{4.18}$$

fiecare din ele fiind de forma $\mathbf{P} = \mathbf{M} + \mathbf{F}'\mathbf{N}\mathbf{F}$, în care toate matricele au elemente reale, iar $\mathbf{M}$ și $\mathbf{N}$ sînt pătrate. Indexînd cu p partea simetrică și cu i partea antisimetrică a oricărei matrice, avem descompuneri $\mathbf{M} = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_i$, $\mathbf{N} = \mathbf{N}_p + \mathbf{N}_i$, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_p + \mathbf{P}_i$ [reamintim că pentru orice matrice pătrată $\mathbf{A}$ se notează $\mathbf{A}_p = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}')$, $\mathbf{A}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}')$]. Atunci

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{M}_p + \mathbf{F}'\mathbf{N}_p\mathbf{F}, \quad \mathbf{P}_i = \mathbf{M}_i + \mathbf{F}'\mathbf{N}_i\mathbf{F}. \tag{4.19}$$

Deoarece matricea $\mathbf{P}_p$ este reală simetrică, forma pătratică generată de aceasta are valori reale; similar, deoarece $\mathbf{P}_i$ este antisimetrică, forma pătratică generată de $\mathbf{P}_i$ are valori pur imaginare. [Reamintim că o matrice hermitică $\mathbf{H} = [h_{ij}]_{1 \leq i,\, j \leq n}$ din $M_n(\mathbb{C})$ se numește *pozitiv semidefinită* pe $\mathbb{C}^n$ dacă $(\forall)\ \mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)'$ numărul real $\mathbf{z}^*\mathbf{H}\mathbf{z} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} h_{ij} z_i \bar{z}_j$ este $\geqslant 0$; se scrie $\mathbf{H} \geqslant 0$. Dacă în plus acest număr este nul dacă și numai dacă $\mathbf{z} = \mathbf{0}$, matricea $\mathbf{H}$ se numește *pozitiv definită* și se scrie $\mathbf{H} > 0$].

Din relațiile (4.19), rezultă direct că dacă matricele hermitice $\mathbf{M}_p$, $\mathbf{N}_p$ sînt pozitiv semidefinite, atunci $\mathbf{P}_p$ are aceeași proprietate.

Dacă rețeaua conține numai condensatoare cu capacitate pozitivă, atunci matricele $\mathbf{D}_l$ și $\mathbf{D}_t$ sînt diagonale și pozitiv semidefinite, deci conform cu (4.18) matricea $\mathbf{D}_m$ este simetrică și pozitiv semidefinită. Dacă rețeaua conține numai bobine cuplate astfel încît $\mathbf{L}_t$ și $\mathbf{L}_l$ să fie simetrice și pozitiv semidefinite, atunci aceeași proprietate o are și matricea $\mathbf{L}_m$.

În ceea ce privește structura matricei $\mathbf{R}_m$, vom considera că în rețea se găsesc rezistențe propriu-zise, caracterizate prin aceea că matricele asociate sînt diagonale, cu elemente pozitive sau nule și giratoare, avînd relațiile constitutive de forma $u_1 = -R_0 i_2$, $u_2 = R_0 i_1$ și caracterizate prin aceea că matricele asociate sînt antisimetrice. Așadar $\mathbf{R}_m = \mathbf{R}_{mp} + \mathbf{R}_{mi}$, unde $\mathbf{R}_{mp}$ corespunde rezistențelor propriu-zise iar $\mathbf{R}_{mi}$ corespunde giratoarelor.

§ 3. Formalisme de descriere a circuitelor electrice

Descrierea evoluției unei rețele electrice se poate face pe de o parte pornind de la structura locală a rețelei dată prin relații constitutive (așa cum s-a procedat în paragrafele precedente) și pe de

alta, prin cunoașterea unor relații funcționale între curenți și tensiuni în locuri precizate numite porți.

3.1. **Multiport electric.** Fie o rețea electrică accesibilă exteriorului prin $2n$ borne organizate în $n\,(n \geqslant 1)$ perechi cu polarități prescrise pentru tensiuni și curenți (vezi fig. 4.2). În acest mod de organizare a tensiunilor și curenților, notînd $\mathbf{u} = [u_1\, u_2 \ldots u_n]'$, $\mathbf{i} = [i_1\, i_2 \ldots i_n]'$, scalarul (depinzînd de timp)

$$p = \sum_{k=1}^{n} u_k i_k = \mathbf{u}'\mathbf{i} \tag{4.20}$$

reprezintă *puterea absorbită de rețea*. Orice pereche de borne m, m', avînd precizate polaritățile în conformitate cu fig. 4.2, se numește *poartă*, iar rețeaua accesibilă prin n porți se numește *multiport* (sau mai precis *n-port*).

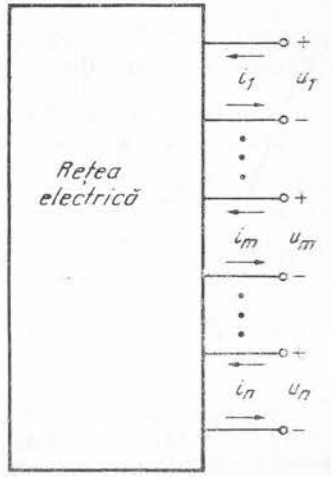


Fig. 4.2. Organizarea unei rețele electrice ca multiport.

Din punct de vedere matematic, problema descrierii unui multiport se pune după cum urmează. Un n-port este determinat dacă se cunosc cele $2n$ mărimi componente ale vectorilor $\mathbf{u}$ și $\mathbf{i}$ și pentru aceasta, se pot prescrie mai întîi n relații funcționale caracterizînd cele n terminații (de exemplu, u_j fixat prin alimentare în tensiune, i_k fixat prin alimentare în curent, $(u_r, i_r) = 0$ etc.), rămînînd libere n relații care depind de structura internă a multiportului. Primele n relații funcționale constituie ceea ce se numește *formalismul de descriere* a multiportului. În cele ce urmează, ne vom ocupa de multiporți determinați, pentru care dispunem de $2n$ relații independente.

Vom nota cu $\mathscr{I}$ (respectiv cu $\mathscr{U}$) mulțimea tuturor funcțiilor vectoriale curenți $\mathbf{i}(t) = [i_1(t) \ldots i_n(t)]'$ (respectiv tensiuni $\mathbf{u}(t) = [u_1(t) \ldots u_n(t)]'$), în care componentele sînt funcții $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Fizic, un n-port este o cutie cu n perechi de terminale, împreună cu o familie de constrîngeri relativ la tensiunile și curenții de la cele n porți. Matematic, un n-port P este o relație binară de la mulțimea $\mathscr{I}$ la mulțimea $\mathscr{U}$, $P \subset \mathscr{I} \times \mathscr{U}$, adică o colecție de perechi $(\mathbf{i}, \mathbf{u})$ cu $\mathbf{i} \in \mathscr{I}$, $\mathbf{u} \in \mathscr{U}$; printre constrîngeri, apar ipoteze de regularitate de tipul i_k, $u_j \in \mathrm{L}_2$ sau i_k, $u_j \in \mathscr{D}_+$.

Pentru un n-port fixat P, pentru $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in P$ cu $\mathbf{i}, \mathbf{u} \in \mathscr{D}_+$ (adică toate cele $2n$ componente sînt funcții test cu suport mărginit la stînga) și pentru orice moment t se poate defini energia absorbită de P pînă la momentul t ca fiind scalarul $E(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{u}(\tau)' \mathbf{i}(\tau)\, d\tau$, presupunînd $E(-\infty) = 0$. Multiportul P se numește *liniar* dacă $(\forall)\,(\mathbf{i}_1, \mathbf{u}_1), (\mathbf{i}_2, \mathbf{u}_2)$ din P și $(\forall)\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avem $(\alpha \mathbf{i}_1 + \beta \mathbf{i}_2, \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2) \in P$.

Dăm cîteva exemple ilustrative.

a) Fie $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție fixată din $\mathscr{D}_+$. Se poate defini 2-portul

$$P_\rho = \{(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in \mathscr{I} \times \mathscr{U} \mid i_1, i_2, u_1, u_2 \in \mathscr{D}_+ \text{ și } u_1 = \rho u_2,\ i_2 = -\rho i_1\}.$$

Acesta este un 2-port liniar și în plus, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și pentru orice $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in P_\rho$,

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} (u_1 i_1 + u_2 i_2)\, dt = 0.$$

O proprietate remarcabilă a acestui multiport este faptul că $(\forall)\mathbf{e} \in \mathscr{D}_+ \cap L_2$, $\mathbf{e} = [e_1\ e_2]'$ există și este unică o pereche $(\mathbf{i}, \mathbf{u}) \in P_\rho$ astfel încît $\mathbf{e} = \mathbf{i} + \mathbf{u}$; într-adevăr, aceasta revine la $i_1 + \rho u_2 = e_1$, $-\rho i_1 + u_2 = e_2$, de unde se determină univoc $\mathbf{i}, \mathbf{u}$ în funcție de ρ, e_1, e_2.

b) Printre uniporți un rol aparte îl au *rezistorul*, definit prin $u = Ri$, unde scalarul $R = R(t)$ este rezistența, *inductorul*, definit prin $u = \frac{d}{dt}(Li)$, $L = L(t)$ fiind inductanța, *capacitorul*, dat prin $i = \frac{d}{dt}(Cu)$, C fiind capacitatea; un 2-port important este *giratorul*, definit prin $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -\gamma & 0 \end{bmatrix} \mathbf{i}$, unde $\gamma = \gamma(t)$ este rezistența de girație.

În tratarea bazată pe structură locală, din considerente geometrice, se pot deduce curenții și tensiunile care pot alcătui o bază. În tratarea externă, de multiport, alegerea unei baze formate exclusiv din curenți sau din tensiuni nu este întotdeauna posibilă (de exemplu, structura numită *transformator perfect*, definită prin

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & \sqrt{L_1 L_2} \\ \sqrt{L_1 L_2} & L_2 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix},$$

nu poate fi descrisă printr-o bază de tensiuni).

În continuare vom indica principalele formalisme utilizate în aplicații.

3.2. **Formalisme hibride.** Considerăm un n-port P și partiționăm tensiunile și curenții astfel:

$$\mathbf{u} = [\underbrace{u_1 u_2 \dots u_m}_{\mathbf{v}_1'}\ \underbrace{u_{m+1} \dots u_n}_{\mathbf{v}_2'}]' = [\mathbf{v}_1'\ \ \mathbf{v}_2']',$$

$$\mathbf{i} = [\underbrace{i_1 i_2 \dots i_m}_{\mathbf{j}_1'}\ \underbrace{i_{m+1} \dots i_n}_{\mathbf{j}_2'}]' = [\mathbf{j}_1'\ \ \mathbf{j}_2']',$$

unde $m \leqslant n$, iar $\mathbf{v}_1 \in \mathscr{U}_1$, $\mathbf{v}_2 \in \mathscr{U}_2$, $\mathbf{j}_1 \in \mathscr{I}_1$, $\mathbf{j}_2 \in \mathscr{I}_2$ cu $\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \mathscr{I}_1, \mathscr{I}_2$ spații funcționale convenabile. Introducînd doi vectori hibrizi $\mathbf{v}$ și $\mathbf{w}$ prin $\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1'\ \mathbf{j}_2']'$, $\mathbf{w} = [\mathbf{j}_1'\ \mathbf{v}_2']'$, rezultă că puterea absorbită de P este

$$p = \mathbf{u}'\mathbf{i} = \sum_{k=1}^{m} u_k i_k + \sum_{k=m+1}^{n} u_k i_k = \mathbf{v}_1' \mathbf{j}_1 + \mathbf{j}_2' \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}'\mathbf{w},$$

adică este produsul scalar al celor doi vectori hibrizi.

Se numește *formalism hibrid* o aplicație de forma

$$\mathscr{I}_1 \times \mathscr{U}_2 \to \mathscr{U}_1 \times \mathscr{I}_2, \quad (\mathbf{j}_1, \mathbf{v}_2) \mapsto (\mathbf{v}_1, \mathbf{j}_2) \tag{4.21}$$

sau de forma

$$\mathscr{U}_1 \times \mathscr{I}_2 \to \mathscr{I}_1 \times \mathscr{U}_2, \ (\mathbf{v}_1, \mathbf{j}_2) \mapsto (\mathbf{j}_1, \mathbf{v}_2), \tag{4.21'}$$

în ipoteza că astfel de aplicații sînt bine definite. Pentru rețele electrice cu elemente de circuit convenționale, aplicațiilor de tip (4.21) sau (4.21′) le corespund aplicații liniare între imaginile Laplace corespunzătoare vectorilor hibrizi, definite prin relații de forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{J}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11}(s) & \mathbf{H}_{12}(s) \\ \mathbf{H}_{21}(s) & \mathbf{H}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix}, \tag{4.22}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{J}_1(s) \\ \mathbf{V}_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{11}(s) & \mathbf{G}_{12}(s) \\ \mathbf{G}_{21}(s) & \mathbf{G}_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_1(s) \\ \mathbf{J}_2(s) \end{bmatrix}, \tag{4.22'}$$

în care $\mathbf{H}_{ij}(s)$, $\mathbf{G}_{ij}(s)$ sînt matrice real-raționale de dimensiuni corespunzătoare.

Un caz particular al formalismelor hibride îl constituie *formalismele omogene* (*sau de imitanță*), în număr de două, luînd mai întîi $m = n$, iar apoi $m = 0$. Obținem

$$\mathscr{I} \to \mathscr{U}, \quad \mathbf{i} \mapsto \mathbf{u}, \quad \mathbf{U}(s) = \mathbf{Z}(s)\,\mathbf{I}(s); \tag{4.23}$$

$$\mathscr{U} \to \mathscr{I}, \quad \mathbf{u} \mapsto \mathbf{i}, \quad \mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{U}(s). \tag{4.24}$$

Formalismul (4.23) se numește *formalism de impedanță*, iar formalismul (4.24) *formalism de admitanță*. Un fapt care relevă importanța formalismelor hibride este acela că orice rețea pasivă și invariantă în timp admite cel puțin un formalism hibrid [1, 34].

3.3. **Formalismul de repartiție**. În problemele privitoare la sinteza circuitelor pasive s-a impus un alt formalism, cel de repartiție. Introducerea acestui mod de reprezentare este argumentată prin considerente de tip energetic și se aplică pentru sisteme reale, invariante în timp (un sistem se numește *real* dacă la semnale de intrare cu valori reale corespund semnale de ieșire cu valori reale), cu proprietatea că funcția matriceală de pondere este reală, iar funcția matriceală de circuit este real-rațională.

În cazul semnalelor cu valori complexe, puterea absorbită este exprimată prin formula

$$p = \frac{1}{2}\,(\mathbf{u}^*\mathbf{i} + \mathbf{i}^*\mathbf{u}) \tag{4.25}$$

și pentru formalismul de impedanță z, definit prin (4.23), rezultă $2p = \langle \mathbf{z}(\mathbf{i}), \mathbf{i} \rangle + \langle \mathbf{i}, \mathbf{z}(\mathbf{u}) \rangle$. Notînd

$$\mathbf{a}(t) = \frac{1}{2}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{i}(t)], \quad \mathbf{b}(t) = \frac{1}{2}\,[\mathbf{u}(t) - \mathbf{i}(t)], \tag{4.26}$$

formalismul de repartiție este definit printr-o aplicație de forma

$$\mathbf{a}(t) \mapsto \mathbf{b}(t) \text{ și în domeniul complex, } \mathbf{A}(s) \mapsto \mathbf{B}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{A}(s), \tag{4.27}$$

unde $\mathbf{S}(s)$ este o matrice real-rațională numită *matrice de repartiție*. Din punct de vedere fizic, $a(t)$ și $b(t)$ reprezintă jumătate din suma (respectiv diferența) dintre tensiunea la poartă u și curentul i care

parcurge o rezistență unitate cu care este mărit multiportul. Situația este indicată schematic în fig. 4.3.

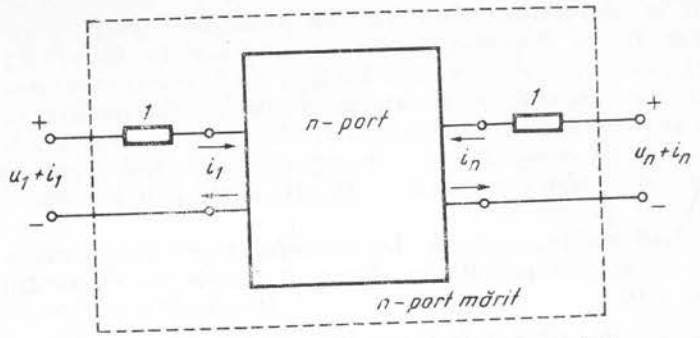


Fig. 4.3. Multiport mărit asociat formalismului S.

Calculînd diferența $4(\mathbf{a}^*\mathbf{a} - \mathbf{b}^*\mathbf{b}) = (\mathbf{u}^* + \mathbf{i}^*)(\mathbf{u} + \mathbf{i}) - (\mathbf{u}^* - \mathbf{i}^*)(\mathbf{u} - \mathbf{i}) = 2(\mathbf{u}^*\mathbf{i} + \mathbf{i}^*\mathbf{u})$, rezultă că puterea p se exprimă în acest caz prin formula

$$p = \mathbf{a}^*\mathbf{a} - \mathbf{b}^*\mathbf{b}. \tag{4.28}$$

Avantajul formalismului de repartiție este că pasivitatea sistemului studiat impune ca operatorul asociat să fie un operator de contracție, ceea ce îi conferă o gamă bogată de proprietăți [1, 12].

§ 4. O teoremă fundamentală a circuitelor electrice pasive

Cele spuse anterior permit formularea următorului rezultat fundamental:

Teorema IV.1. *Fie un multiport constituit din rezistențe pozitive, capacități pozitive și bobine (eventual cuplate, cu matricea de cuplaj pozitiv semidefinită). Atunci:*

(a) *formele pătratice $T_0(s)$, $V_0(s)$ au valori reale și sînt pozitiv semidefinite;*

(b) *forma pătratică $F_0(s)$ are valori reale dacă multiportul conține numai rezistențe și pur imaginare dacă multiportul conține numai giratoare;*

(c) *dacă multiportul admite descrierea prin formalismul* $\mathbf{H}(s)$, *atunci partea hermitică* $\frac{1}{2}(\mathbf{H}+\mathbf{H}^*)$ *a matricei* $\mathbf{H}$ *este pozitiv semidefinită în semiplanul* $\operatorname{Re} s>0$; *în particular, părțile hermitice ale blocurilor* $\mathbf{H}_{11}$ *și* $\mathbf{H}_{22}$ *sînt pozitiv semidefinite în* $\operatorname{Re} s>0$;

(d) *pentru un uniport avem* $\operatorname{Re} Z(s)\geqslant 0$ *în semiplanul* $\alpha=\operatorname{Re} s>0$;

(e) *dacă un uniport nu are rezistențe, atunci* $\operatorname{Re} Z(s)>0$ *pentru* $\alpha>0$, $\operatorname{Re} Z(s)=0$ *pentru* $\alpha=0$ *și* $\operatorname{Re} Z(s)<0$ *pentru* $\alpha<0$;

(f) *dacă un uniport nu are capacități și nici giratoare, atunci* $\operatorname{Im} Z(s)>0$ *pentru* $\omega=\operatorname{Im} s>0$, $\operatorname{Im} Z(s)=0$ *pentru* $\omega=0$ *și* $\operatorname{Im} Z(s)<0$ *pentru* $\omega<0$;

(g) *dacă un uniport nu are inductanțe și nici giratoare, atunci* $\operatorname{Im} Z()s<0$ *pentru* $\omega>0$, $\operatorname{Im} Z(s)=0$ *pentru* $\omega=0$ *și* $\operatorname{Im} Z(s)>0$ *pentru* $\omega<0$.

Demonstrație. Punctele (a) și (b) rezultă din calculele prezentate în 2.2. Pentru punctul (c), scalarul P_c poate fi scris sub forma

$$P_c(s)=\sum_{k=1}^{m}U_k(s)\,\overline{I_k(s)}+\sum_{k=m+1}^{n}U_k(s)\,\overline{I_k(s)}=\mathbf{J}_1^*(s)\mathbf{V}_1(s)+\mathbf{J}_2^*(s)\mathbf{V}_2(s);$$

considerînd formalismul H dat sub forma (4.22), avem

$$\mathbf{V}_1(s)=\mathbf{H}_{11}(s)\,\mathbf{J}_1(s)+\mathbf{H}_{12}(s)\,\mathbf{V}_2(s)\quad\text{și}\quad\mathbf{J}_2(s)=\mathbf{H}_{21}(s)\,\mathbf{J}_1(s)+\mathbf{H}_{22}(s)\,\mathbf{V}_2(s),$$

de unde se obține

$$P_c(s)=\mathbf{J}_1^*\mathbf{H}_{11}\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_1^*\mathbf{H}_{12}\mathbf{V}_2+\mathbf{J}_1^*\mathbf{H}_{21}^*\mathbf{V}_2+\mathbf{V}_2^*\mathbf{H}_{22}^*\mathbf{V}_2,$$

deci

$$\overline{P_c(s)}=P_c(s)^*=\mathbf{J}_1^*\mathbf{H}_{11}^*\mathbf{J}_1+\mathbf{V}_2^*\mathbf{H}_{12}^*\mathbf{J}_1+\mathbf{V}_2^*\mathbf{H}_{21}\mathbf{J}_1+\mathbf{V}_2^*\mathbf{H}_{22}\mathbf{V}_2,$$

de unde, prin adunare,

$$2\operatorname{Re}P_c(s)=\mathbf{J}_1^*(\mathbf{H}_{11}+\mathbf{H}_{11}^*)\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_1^*(\mathbf{H}_{12}+\mathbf{H}_{21}^*)\mathbf{V}_2+$$

$$+\mathbf{V}_2^*(\mathbf{H}_{21}+\mathbf{H}_{12}^*)\mathbf{J}_1+\mathbf{V}_2^*(\mathbf{H}_{22}+\mathbf{H}_{22}^*)\mathbf{V}_2,$$

care reprezintă tocmai forma pătratică generată de matricea-bloc

$$\begin{bmatrix}\mathbf{H}_{11}(s)+\mathbf{H}_{11}^*(s) & \mathbf{H}_{12}(s)+\mathbf{H}_{21}^*(s)\\ \mathbf{H}_{21}(s)+\mathbf{H}_{12}^*(s) & \mathbf{H}_{22}(s)+\mathbf{H}_{22}^*(s)\end{bmatrix},$$

adică dublul părții hermitice a matricei hibride $\mathbf{H}$.

Pe de altă parte, conform cu (4.16) avem

$$\operatorname{Re}P_c(s)=F_{0p}(s)+\alpha T_0(s)+\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}V_0(s),$$

unde $F_{0p}(s)$ este partea reală (generată de rezistențe) a scalarului complex $F_0(s)$ și $s=\alpha+j\omega$. De aici rezultă punctul (c) al teoremei. În particular, rezultă, luînd $\mathbf{J}_1(s)=0$ sau $\mathbf{V}_2(s)=0$, că părțile hermitice ale blocurilor $\mathbf{H}_{11}(s)$ și $\mathbf{H}_{22}(s)$ sînt pozitiv semidefinite în semiplanul $\alpha>0$.

(d) Pentru un uniport (rețea cu o singură poartă de acces), formalismul posibil este în mod necesar de tip omogen și luînd $U(s)=Z(s)I(s)$, se obțin inegalitățile

$$Z(s)=\frac{1}{|I(s)|^2}\left[F_0(s)+sT_0(s)+\frac{1}{s}V_0(s)\right],$$

$$\operatorname{Re}Z(s)=\frac{1}{|I(s)|^2}\left[F_{0p}(s)+\alpha T_0(s)+\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}V_0(s)\right],\qquad(4.29)$$

$$\operatorname{Im}Z(s)=\frac{1}{|I(s)|^2}\left[F_{0i}(s)+\omega T_0(s)-\frac{\omega}{\alpha^2+\omega^2}V_0(s)\right],$$

cu $I(s)\neq 0$, $F_0(s)=F_{0p}(s)+jF_{0i}(s)$.

Din relațiile (4.29) rezultă direct (d); punctul (e) rezultă din aceleași relații punînd $F_{0p}(s)=0$, iar punctul (f) rezultă punînd $F_{0i}(s)=0$; $V_0(s)=0$. În sfîrșit, punctul (g) al teoremei se obține din ultima relație (4.29) punînd $F_{0i}(s)=0$, $T_0(s)=0$, $\alpha\neq 0$.

4.1. **Observații.** (a) Teorema IV.1 este mai generală decît teoremele similare date în lucrările de teoria circuitelor, sub următoarele aspecte:

— calculele pentru demonstrarea semipozitivității funcțiilor energetice sînt mai directe și utilizează matricea **F**, care se dovedește de mare importanță în teoria circuitelor electrice;

— am luat în considerare existența giratoarelor ca elemente de circuit prezente în rețea;

— punctul (c) stabilește semipozitivitatea matricei hibride spre deosebire de tratările obișnuite în care proprietatea de semipozitivitate este stabilită pentru matricele **Z**, **Y** asociate formalismelor de imitanță; în tratarea dată mai sus, aceste fapte apar drept cazuri particulare. Utilitatea faptului mai general, pentru matrice de tip hibrid, constă în primul rînd în aceea că rezultatele pot fi transpuse pentru multiporți de tip transductoare electromecanice, electroacustice etc., dispunînd de perechi al căror produs scalar reprezintă puterea absorbită.

(b) Punctul (e) al teoremei pune în evidență uniporți nedisipativi, așa cum se va vedea mai departe. Punctul (f) pune în evidență rețelele RL, iar (g) se referă la rețele *RC*.

(c) Teorema IV.1 evidențiază și un alt aspect important. Semnul mărimii $F_{0i}(s)$ este neprecizat, astfel că prezența giratoarelor în uniport alterează caracteristica de tip

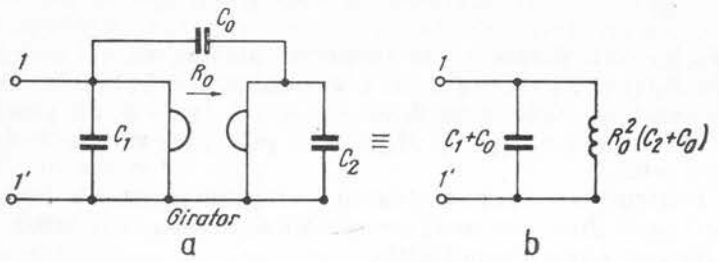


Fig. 4.4. Echivalența dintre o rețea cu un girator și două capacitoare și o rețea *LC*.

C (capacitate) sau de tip *L* (inductanță); pentru ilustrare, este prezentat în fig. 4.4 un exemplu de uniport cu două capacitoare și un girator, care este echivalent cu un uniport *LC*.

(d) Proprietățile relativ la semiplanul Re $s > 0$ sînt valabile peste tot (cu excepția unor puncte izolate în care funcțiile energetice devin infinite. Vom arăta mai tîrziu că în semiplanul drept nu există poli ai matricei hibride $\mathbf{H}(s)$.

B. REALIZABILITATE; PUNCTUL DE VEDERE DISTRIBUȚIONAL

În partea A a acestui capitol am prezentat structura ecuațiilor de evoluție ale rețelelor electrice, care constituie o importantă clasă de sisteme. Pentru rețele alcătuite din elemente R, L, C pozitive am pus în evidență anumite forme pătratice semipozitiv definite în semiplanul drept.

În cele ce urmează, prezentăm cîteva elemente de teoria realizabilității sistemelor liniare, continue și invariante în timp, adoptînd punctul de vedere distribuțional. Esența teoriei realizabilității este redată în formularea lui Zemanian [43], prin sublinierea faptului că aceasta este o parte din teoria matematică a sistemelor, care analizează modul cum sînt reflectate în formalisme funcționale, care leagă semnalele de intrare de cele de ieșire, diverse proprietăți fundamentale ale sistemelor ca liniaritatea, invarianța în timp, cauzalitatea, pasivitatea etc. Parțial, această problemă a realizabilității a fost rezolvată în mod specific în unele domenii ale științelor fizice

(pentru rețele electrice de către Newcomb [20] și Wohlers [39], pentru fenomene elastice de către Meixner etc.). Expunerea care urmează se bazează pe o serie de lucrări clasice, ca și pe lucrări publicate de autori pe această linie [4, 20, 42, 40, 33, 35].

Printre proprietățile care generează importante constrîngeri asupra formalismelor funcționale asociate sistemelor, trebuie menționate: *liniaritatea* (caracterizată prin faptul că operatorul asociat este liniar și permite aplicarea unor procedee specifice algebrei și analizei liniare), *invarianța în timp* (caracterizată prin comutarea operatorului asociat cu translațiile în timp, asigurînd, împreună cu liniaritatea, reprezentarea răspunsului prin convoluție, conform teoremei II.5), *cauzalitatea* (care reprezintă o proprietate esențială a fenomenelor care se desfășoară în lumea fizică observabilă, caracterizată în domeniul timp prin anumite restricții la care este supus suportul funcției de pondere a sistemului, iar în domeniul frecvență, prin olomorfia funcției matriceale de transfer, în semiplanul drept) și *pasivitatea* (care reprezintă o proprietate de bază a fenomenelor care au loc în sistemele închise termodinamic și caracterizată prin semipozitivitatea unor forme pătratice sau a unor produse scalare definite pe spațiul semnalelor de intrare). Remarcăm de asemenea că în toate teoriile liniare de realizabilitate, operatorii asociați sistemelor sînt presupuși continui (prin șiruri), ipoteză care permite o construcție consistentă și este justificată fizic; pentru fenomene neliniare, angajînd semnale relativ mari, ipoteza de continuitate poate să fie inadecvată, mărturie stînd rezultatele obținute în ultimul timp în teoria bifurcației și în teoria catastrofelor.

§ 5. Cauzalitatea și pasivitatea, constrîngeri esențiale ale sistemelor fizice

5.1. **Definiția cauzalității.** Fie un sistem caracterizat printr-un operator $T: \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$, $x \mapsto y = T(x)$; sistemul se numește *cauzal* dacă pentru orice $t \in \mathbb{R}$, de îndată ce $x_1, x_2 \in \mathscr{E}'$, $\varphi \in \mathscr{D}$, supp $\varphi \in (-\infty, t)$ și $\langle x_1, \varphi \rangle = \langle x_2, \varphi \rangle$, să rezulte $\langle y_1, \varphi \rangle = \langle y_2, \varphi \rangle$, unde $y_1 = T(x_1)$, $y_2 = T(x_2)$.

Cu alte cuvinte, pentru orice $t \in \mathbb{R}$, de îndată ce două semnale de intrare sînt egale (în sens distribuțional) pe deschisul $(-\infty, t)$, ieșirile corespunzătoare să rezulte egale pe același deschis $(-\infty, t)$. Definiția anterioară este aplicabilă atît pentru sisteme liniare cît și pentru sisteme neliniare.

Evident, dacă sistemul este liniar (adică operatorul T este liniar,) atunci el este cauzal dacă și numai dacă $(\forall)t \in \mathbb{R}$, din egalitatea $x = 0$ pe $(-\infty, t)$, rezultă $Tx = 0$ pe $(-\infty, t)$.

Lema 1. *Fie $T : \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$ un sistem liniar, continuu și invariant în timp. Dacă există un punct $t_0 \in \mathbb{R}$ astfel încît de îndată ce $\langle x, \varphi \rangle = 0$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$, cu* supp $\varphi \subset (-\infty, t_0)$ *să rezulte că $\langle Tx, \varphi \rangle = 0$, atunci T este cauzal.*

Demonstrație. Fie $(\forall)\tau \in \mathbb{R}$ astfel încît $(\forall)\psi \in \mathscr{D}$ cu supp $\psi \subset (-\infty, \tau)$ să avem $\langle x, \psi \rangle = 0$. Fie $\varphi(t) = \psi(t + \tau - t_0)$, deci supp $\varphi \subset (-\infty, t_0)$ și cum $\langle x(t), \psi(t) \rangle = 0$, rezultă $\langle x(t + \tau - t_0), \psi(t - t_0 + \tau) \rangle = 0$, adică $\langle x(t + \tau - t_0), \varphi(t) \rangle = 0$ și, conform ipotezei, $\langle (Tx)(t + \tau - t_0), \varphi(t) \rangle = 0$, adică T fiind invariant în timp, $\langle Tx(t), \varphi(t - \tau + t_0) \rangle = 0$, deci $\langle Tx, \psi \rangle = 0$.

Pentru un sistem liniar, continuu și invariant în timp $T : \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$, am arătat în teorema II.5 că semnalul de ieșire se obține prin convoluție, adică $T(x) = h * x$, $(\forall)x \in \mathscr{E}'$, unde h este o distribuție unică din $\mathscr{D}'$ (numită *funcție de pondere* sau *răspunsul-impuls al sistemului* T); evident, $h = T(\delta)$.

Teorema care urmează dă o caracterizare a sistemelor cauzale (printre sistemele liniare și invariante în timp).

Teorema IV. 2. *Fie $T : \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$ un sistem liniar, continuu și invariant în timp. Sînt echivalente următoarele afirmații:*

(I) *sistemul T este cauzal;*

(II) *funcția h de pondere a sistemului aparține lui $\mathscr{D}'_1$, adică* supp $h \subset [0, \infty)$.

Demonstrație. (I)$\Rightarrow$(II). Ori de cîte ori $\varphi \in \mathscr{D}$ și supp $\varphi \subset (-\infty, 0)$, rezultă $\varphi(0) = 0$, adică $\langle \delta, \varphi \rangle = 0$; cum T este cauzal, rezultă atunci $\langle T(\delta), \varphi \rangle = 0$, deci $\langle h, \varphi \rangle = 0$, Așadar, $h = 0$ pe deschisul $(-\infty, 0)$, deci supp $h \subset [0, \infty)$.

(II)$\Rightarrow$(I). Conform lemei anterioare este suficient să luăm $t_0 = 0$ și să observăm că dacă $\varphi \in \mathscr{D}$, supp $\varphi \subset (-\infty, 0)$ și $\langle x, \varphi \rangle = 0$, atunci suportul funcției $\langle x(t), \varphi(t + \tau) \rangle$ este conținut în deschisul $\{\tau < 0\}$, deci

$$\langle Tx, \varphi \rangle = \langle h * x, \varphi \rangle = \langle h(\tau), \langle x(t), \varphi(t + \tau) \rangle \rangle = 0.$$

Teorema IV.2 se referă la un uniport (sistem cu o intrare și o ieșire). Pentru un sistem liniar, continuu și invariant în timp $T : \mathscr{E}'^m \to \mathscr{D}'^n$ cu m intrări și n ieșiri în general, (M^n este puterea cartezianăa

n-a pentru o mulțime M) există $h_{ij} \in \mathscr{D}'$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m$, astfel încît notînd $T(x_1, \ldots, x_m) = (y_1, \ldots, y_n)$ cu $x_i \in \mathscr{E}'$, $y_j \in \mathscr{D}'$ să avem $y_i = \sum_{j=1}^{m} h_{ij} * x_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$; un astfel de sistem este cauzal dacă și numai dacă toate h_{ij} aparțin lui $\mathscr{D}'_1$, adică sistemul este cauzal în raport cu toate perechile de semnale intrare-ieșire.

5.2. **Nuclee distribuționale.** Se numește *nucleu distribuțional* $\mathbf{K}(t, \tau)$ de ordin n, $n \geqslant 1$, orice matrice pătrată $n \times n$ avînd ca elemente distribuții reale de două variabile reale din $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\mathbf{K}(t, \tau) = [K_{ij}(t, \tau)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$. În acest caz, se poate defini pentru orice $\mathbf{x} \in \mathscr{D}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$, o distribuție $\mathbf{y} = \mathbf{K} \circ \mathbf{x}$ din $\mathscr{D}'^n$ în modul următor: pentru orice $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{D}^n$, $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1 \varphi_2, \ldots, \varphi_n)'$ se pune

$$\langle \mathbf{y}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \langle \langle K_{ij}(t, \tau), x_j(\tau) \rangle, \varphi_i(t) \rangle . \tag{4.30}$$

De exemplu, fie $\mathbf{K}(t, \tau) = \delta(t - \tau) \cdot \mathbf{1}_n$, unde $\mathbf{1}_n$ este matricea unitate de tip $n \times n$; în acest caz, $(\forall)\mathbf{x} \in \mathscr{D}^n$ avem

$$\langle \mathbf{K} \circ \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x_i, \varphi_i \rangle = \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\varphi} \rangle, \tag{4.31}$$

$(\forall)\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{D}^n$, deci $\mathbf{K} \circ \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Acest nucleu se notează cu $\delta \mathbf{1}_n$.

Așadar, fiecărui nucleu distribuțional $\mathbf{K}$ i se poate asocia o aplicație liniară și continuă $\mathscr{D}^n \to \mathscr{D}'^n$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{K} \circ \mathbf{x}$. O teoremă celebră, datorită lui L. Schwartz [32] afirmă că și reciproc, orice aplicație liniară continuă $\mathscr{D}^n \to \mathscr{D}'^n$ este asociată unui nucleu distribuțional; pentru $n = 1$ și pentru orice sistem liniar și continuu $T : \mathscr{D} \to \mathscr{D}'$, $x \mapsto y$ există o distribuție $K(t, \tau)$ astfel încît

$$y(t) = \langle K(t, \tau), x(\tau) \rangle. \tag{4.32}$$

În cazul cînd T este invariant în timp, există $h \in \mathscr{D}'$ astfel încît $K(t, \tau) = h(t - \tau)$ și se regăsește teorema II.5. Formula (4.32) justifică reprezentarea sistemelor liniare variante în timp $x \mapsto y$, dată sub forma

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau, \tag{4.33}$$

unde $K(t, \tau)$ se numește *nucleul* sistemului ; dacă $x(t) = \delta(t - \tau)$, atunci

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, z)\, \delta(\tau - z)\, dz = K(t, \tau), \tag{4.34}$$

deci $K(t, \tau)$ este semnalul de ieșire corespunzător semnalului de intrare δ decalat cu τ. Această interpretare nu este întotdeauna valabilă ; de exemplu, pentru $n = 1$ și nucleul $K(t, \tau) = \delta(t)\delta(\tau)$, răspunsul la un semnal de intrare $x \in \mathscr{D}$ este $x(0)\delta(t)$, dar nu are sens un astfel de răspuns pentru $x = \delta$, deoarece nu este definit δ^2.

5.3. **Exemple și completări.** (a) Pentru sisteme linare, continue, dar variante în timp caracterizarea cauzalității a fost dată de Zemanian [42], prin aceea că nucleul $K(t, \tau)$ al unui astfel de sistem are suportul conținut în semiplanul $\{t \geqslant \tau\}$, ca în fig. 4.5. Reprezentarea formală (4.33) devine în cazul unui sistem cauzal

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau, \tag{4.35}$$

iar dacă $x(t) = 0$ pentru $t < 0$, atunci

$$y(t) = \int_{0}^{t} K(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau, \quad t > 0. \tag{4.35'}$$

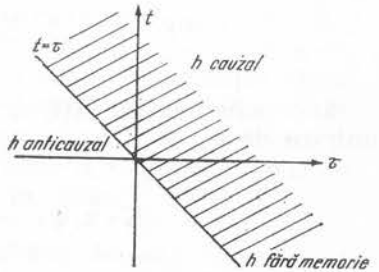


Fig. 4.5. Suportul nucleelor distribuționale în planul (τ, t) în cazul sistemelor : cauzale, anticauzale, fără memorie.

(b) Un sistem $T : \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$ se numește *anticauzal* dacă $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, de îndată ce $x_1, x_2 \in \mathscr{E}'$, $\varphi \in \mathscr{D}$ cu $\operatorname{supp} \varphi \subset (t, \infty)$ și $\langle x_1, \varphi \rangle = \langle x_2, \varphi \rangle$, rezultă $\langle T(x_1), \varphi \rangle = \langle T(x_2), \varphi \rangle$.

Teorema IV. 2 se extinde imediat și se arată că un sistem liniar, continuu și invariant în timp $T : \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$ este anticauzal dacă și numai dacă funcția sa de pondere are suportul conținut în $(-\infty, 0)$. Pentru cazul variant în timp, condiția de anticauzalitate este ca nucleul $K(t, \tau)$ să aibă suportul conținut în semiplanul $\{t \leqslant \tau\}$ (vezi fig. 4.5). Un sistem care este cauzal și anticauzal se numește *fără memorie* ; suportul nucleului unui astfel de sistem este dreapta $t = \tau$. În cazul unui sistem anticauzal, reprezentarea prin nucleu este de forma

$$y(t) = \int_{t}^{\infty} K(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau, \tag{4.36}$$

iar pentru un sistem fără memorie se poate arăta că nucleul este de forma

$$K(t, \tau) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \psi_k(t)\, \delta^{(k)}(t - \tau), \text{ unde } \psi_k \in L_1^{loc}. \tag{4.37}$$

Un exemplu tipic de operator care apare în teoria circuitelor RC este

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)}\, x(\tau)\, d\tau.$$

Operatorul $x \mapsto y$ astfel definit este liniar, continuu, invariant în timp și cauzal ; corespondentul său anticauzal este

$$y(t) = \int_{t}^{\infty} e^{-(t-\tau)}\, x(\tau)\, d\tau.$$

5.4. **Pasivitate ; formalismul de imitanță.** La punctul 3.3 am arătat că există două descrieri de bază ale unui multiport $x \mapsto y$, care să permită determinări de tip energetic, conducînd la evaluarea energiei absorbite de multiport pe orice interval de timp $(-\infty, t)$:

— *formalismul de imitanță*, în care energia absorbită pînă la momentul t pentru semnalul de intrare $\mathbf{x}$ este exprimată prin

$$E(t) = \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{t} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle\, dt, \tag{4.38}$$

unde $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{y}^* \cdot \mathbf{x}$;

— *formalismul de repartiție*, în care energia absorbită este dată prin formula

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} (\|\mathbf{a}(t)\|^2 - \|\mathbf{b}(t)\|^2)\, dt, \tag{4.39}$$

unde

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} + \mathbf{x}), \quad \mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x}). \tag{4.40}$$

Relația (4.39) rezultă formal din (4.38) deoarece

$$\|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2 = \mathbf{a}^*\mathbf{a} - \mathbf{b}^*\mathbf{b} = \frac{1}{2}(\mathbf{y}^*\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{y}) = \operatorname{Re}(\mathbf{y}^*\mathbf{x}).$$

Se remarcă faptul că aceste formalisme necesită organizări distincte de spații de semnale [pentru care (4.38), (4.39) au sens]. În acest

punct vom prezenta definiția pasivității în formalismul de imitanță. Trebuie de asemenea remarcat că puterea absorbită poate să nu aibă sens pentru sisteme relativ simple, dacă semnalele de intrare sînt distribuții; de exemplu, pentru uniportul rezistiv (rezistor) dat prin $u = Ri$, nu este definită mărimea $p(t)$ dacă $i = \delta(t)$. Pentru a da caracterizări energetice pentru o clasă cît mai largă de sisteme, este natural ca semnalele de intrare să fie cuprinse în clasa $\mathscr{D}$ a funcțiilor test, ceea ce vom presupune în ambele tipuri de formalisme.

Un sistem uniport avînd operatorul de imitanță asociat $T : \mathscr{D} \to L_1^{loc}$, $x \mapsto y$ se numește *semipasiv* dacă pentru orice $x \in \mathscr{D}$ avem

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x\bar{y}\, dt \geqslant 0; \tag{4.41}$$

dacă în plus pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{t} x\bar{y}\, dt \geqslant 0, \tag{4.42}$$

se spune că sistemul este *pasiv* (evident, produsul xy aparține lui L_1). Așadar, pentru un sistem pasiv real, rezultă că energia absorbită pînă la orice moment de timp este pozitivă, adică sistemul stochează energia și nu o generează; evident, orice sistem pasiv este semipasiv, reciproca fiind în general falsă. Un rezultat fundamental datorat lui Youla [40] este cuprins în

Teorema IV.3. *Fie un sistem definit printr-un operator de imitanță $T : \mathscr{D} \to L_1^{loc}$. Dacă sistemul este liniar și pasiv, atunci el este cauzal.*

Demonstrație. Fie $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat și x, $x_1 \in \mathscr{D}$, $y = T(x)$, $y_1 = T(x_1)$. Presupunem că $x(t) = 0$ pentru $t < t_0$ și avem de arătat că $y(t) = 0$ a.p., $t < t_0$. Fie α un număr real oarecare fixat și $x_2 = x_1 + \alpha x$. Deoarece T este liniar, rezultă că $T(x_2) = T(x_1) + \alpha T(x)$, deci $y_2 = y_1 + \alpha y$ și cum T este pasiv, $\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{t_0} x_2\bar{y}_2\, dt \geqslant 0$, adică $\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{t_0} x_2(\bar{y}_1 + \alpha\bar{y})\, dt \geqslant 0$ și cum $x_2(t) = x_1(t)$ pentru $t < t_0$, se obține

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{t_0} x_1\bar{y}_1\, dt + \alpha \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{t_0} x_1\bar{y}\, dt \geqslant 0.$$

Deoarece α este un număr real arbitrar, rezultă că

$$\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{t_0} x_1\bar{y}\, dt = 0.$$

Înlocuind aici x_1 cu jx_1, rezultă că și partea imaginară a ultimei integrale este nulă, deci

$$\int_{-\infty}^{t_0} x_1\bar{y}\, dt = 0. \tag{4.43}$$

Din inegalitatea lui Schwartz rezultă că pentru orice interval compact $K \subset (-\infty, t_0)$, avem

$$\left(\int_K |y|^2\, dt\right)^2 = \left(\int_K y\bar{y}\, dt\right)^2 \overset{(4.43)}{=} \left(\int_K (y - x_1)\,\bar{y}\, dt\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_K |y - x_1|^2\, dt \int_K |y|^2\, dt,$$

deci

$$\int_K |y|^2 dt \leqslant \int_K |y - x_1|^2\, dt.$$

Deoarece $\mathscr{D}$ este dens în L_2, se poate alege $x_1 \in \mathscr{D}_K$ astfel încît integrala din membrul al doilea să fie oricît de mică, deci în mod necesar

$$\int_K |y|^2 dt = 0$$

și cum K este arbitrar, rezultă că $y(t) = 0$ a.p., $t < t_0$.

Teorema se extinde ușor la multiporți, adică la operatori $\mathscr{D}^n \to (L_1^{loc})^n$ și trebuie remarcat că în ipoteză nu se cere ca sistemul să fie invariant în timp; reciproca teoremei este în general falsă.

5.5. **Pasivitate; formalismul de repartiție.** Am văzut că în formalismul de imitanță, formula (4.38) are deplin sens dacă $x \in \mathscr{D}$ și $y \in L_1^{loc}$, deoarece atunci y^*x aparține clasei L_1^{loc} și integrarea se face

pe un interval mărginit; în formalismul de repartiție, relația de definiție (4.39) are sens dacă $a \in \mathscr{D}$, iar $b \in L_2$ (nu L_2^{loc}, deoarece în general b nu are suport mărginit). Fie atunci un sistem avînd operatorul de repartiție asociat $T : \mathscr{D} \to L_2$, $a \mapsto b = T(a)$. Acest sistem se numește *semipasiv* dacă pentru orice $a \in \mathscr{D}$ avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|a(t)|^2 - |b(t)|^2)\, dt \geqslant 0 \tag{4.44}$$

și este *pasiv* dacă pentru orice $t \in \mathbb{R}$ avem

$$\int_{-\infty}^{t} (|a(t)|^2 - |b(t)|^2)\, dt \geqslant 0. \tag{4.45}$$

Evident, orice sistem pasiv $\mathscr{D} \to L_2$ este semipasiv, nu și reciproc. Definițiile anterioare se extind la operatorii $\mathscr{D}^n \to L_2^n$, înlocuind $|a(t)|$ cu $\|a(t)\|$, etc.

Pentru sisteme definite prin operatori de repartiție se poate stabili următorul rezultat [4], de legătură între liniaritate, pasivitate și cauzalitate.

Teorema IV.4. *Fie un sistem liniar definit printr-un operator de repartiție* $T : \mathscr{D} \to L_2$. *Sînt echivalente următoarele afirmații:*

(I) *sistemul este pasiv;*

(II) *sistemul este cauzal și semipasiv.*

Demonstrație. (I)⇒(II). Presupunem sistemul pasiv și trebuie arătat că el este cauzal; în caz contrar, ar exista un moment $t_0 \in \mathbb{R}$ și o funcție $a \in \mathscr{D}$ nulă pe $(-\infty, t_0)$ astfel încît $b = T(a)$ este nenul pe o mulțime de măsură pozitivă a intervalului $(-\infty, t_0)$. Ar rezulta atunci

$$\int_{-\infty}^{t_0} (|a(t)|^2 - |b(t)|^2)\, dt = -\int_{-\infty}^{t_0} |b(t)|^2\, dt < 0,$$

ceea ce contravine pasivității.

(II)⇒(I). Presupunem sistemul cauzal și semipasiv și fixăm $t_0 \in \mathbb{R}$ arbitrar; fie $t_1 > t_0$ un alt punct fixat și $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^∞, egală cu 1 pe intervalul $(-\infty, t_0)$, egală cu 0 pe (t_1, ∞) și descrescătoare pe $[t_0, t_1]$. Fie $(\forall) a \in \mathscr{D}$ fixat și $\tilde{a} = \lambda a$. Evident, semnalele a și $\tilde{a}$ coincid pe $(-\infty, t_0)$ și atunci, conform ipotezei de cauzalitate, răspunsurile corespunzătoare $b = T(a)$ și $\tilde{b} = T(\tilde{a})$ vor coin-

cide de asemenea pe $(-\infty, t_0)$. De aici și din semipasivitate, se obține

$$\int_{-\infty}^{t_0} |b(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{t_0} |\tilde{b}(t)|^2 dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{b}(t)|^2\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{a}(t)|^2\, dt.$$

Cum $a = \tilde{a}$ pe $(-\infty, t_0)$, rezultă

$$\int_{-\infty}^{t_0} |b(t)|^2\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{t_0} |a(t)|^2 dt + \int_{t_0}^{t_1} |\lambda(t)|^2\, |a(t)|^2\, dt.$$

Alegînd t_1 suficient de aproape de t_0, integrala secundă din membrul al doilea poate fi făcută oricît de mică și rezultă

$$\int_{-\infty}^{t_0} |b(t)|^2\, dt \leqslant \int_{-\infty}^{t_0} |a(t)|^2\, dt, \quad (\forall)\, t_0 \in \mathbb{R},$$

ceea ce dovedește pasivitatea operatorului T.

Teorema IV.4 poate fi extinsă fără dificultate la multiporți.

3.6. **Exemple.** (a) Printre exemplele cele mai simple de operatori de imitanță pasivi menționăm următorii uniporți:

— rezistorul $u = Ri$, $R > 0$, unde $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, energia absorbită pînă la momentul t este

$$E(t) = R \int_{-\infty}^{t} i^2(t)\, dt \geqslant 0;$$

— inductorul $u = L \dfrac{di}{dt}$, $L > 0$, unde

$$E(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) \geqslant 0, \text{ socotind } i(-\infty) = 0;$$

— capacitorul $u = \dfrac{1}{C} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} i(t)\, dt$, $C > 0$; în acest caz, $u'(t) = \dfrac{1}{C}\, i(t)$ și

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} u(t)\, i(t)\, dt = C \int_{-\infty}^{t} u(t)\, u'(t)\, dt = \frac{C}{2}\, u^2(t) \geqslant 0,$$

socotind că $u(-\infty) = 0$.

Toate aceste trei sisteme sînt cauzale, conform teoremei IV.3.

(b) Fie operatorul $T : \mathscr{D} \to \mathscr{D}$, $\varphi(t) \mapsto \varphi(t-\tau)$, $\tau > 0$ fixat. Operatorul poate fi în mod evident considerat fie ca operator de repartiție fie ca operator de imitanță. În ambele situații operatorul este cauzal, dar nu este pasiv oricum ar fi considerat.

Dacă T este operator de repartiție din

$$E(t) = \int_{-\infty}^{t} \{|\varphi(t)|^2 - |\varphi(t-\tau)|^2\}\, dt \geqslant 0,$$

decurge pasivitatea sistemului asociat.

Dacă T este operator de imitanță, atunci el nu este pasiv. Pentru a dovedi această afirmație considerăm semnalul real din $\mathscr{D}$,

$$\varphi_0 \geqslant 0, \quad \operatorname{supp}(\varphi_0) = [\tau, 2\tau],$$

și construim semnalul de intrare

$$\varphi_i(t) = \varphi_0(t) - \varphi_0(t-\tau),$$

care generează prin T semnalul de ieșire

$$\varphi_e(t) = \varphi_0(t-\tau) - \varphi_0(t-2\tau).$$

Rezultă că

$$E(t) = -\int_{-\infty}^{t} \varphi_0^2(t-\tau)\, dt,$$

mărime care este negativă pentru $t > 3\tau$.

(c) Fie $f \in L_1^{loc}$ o funcție nenulă a. p. și $K(t, \tau) = f(t) f(\tau)$. Se consideră sistemul liniar definit prin operatorul de imitanță

$$\mathscr{D} \to L_1^{loc}, \quad x \mapsto y, \quad \text{unde} \quad y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, \tau)\, x(\tau)\, d\tau.$$

Acest sistem este semipasiv, deoarece

$$E(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)\, x(t)\, dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, x(t)\, dt \right)^2 \geqslant 0, \ (\forall)\, x \in \mathscr{D}.$$

Totuși sistemul nu este pasiv căci $(\forall)\, t \in \mathbb{R}$, expresia

$$E(t) = c \int_{-\infty}^{t} f(t)\, x(t)\, dt,$$

unde $c = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, x(t)\, dt$ este o constantă, nu are semn constant, pentru orice $x \in \mathscr{D}$; dealtfel sistemul nu este nici cauzal.

(d) Un exemplu de operator de imitanță liniar, cauzal și semipasiv care nu este pasiv este dat de operatorul $T : \mathscr{D} \to L_1^{loc}$, $x(t) \mapsto -x'(t)$; liniaritatea și cauzalitatea lui T sînt evidente; apoi pentru orice semnal de intrare $x \in \mathscr{D}$ și pentru orice t cu $x(t) \neq 0$, energia absorbită de sistem pînă la momentul t este

$$E(t) = -\int_{-\infty}^{t} x'(t)\, x(t)\, dt = -\frac{1}{2} x^2(t) < 0,$$

deci sistemul nu este pasiv. Deoarece $E(\infty) = 0$ (căci $x \in \mathscr{D}$), este verificată totuși condiția de semipasivitate.

Aceste exemple arată că în formalismul de imitanță, analogul teoremei IV.4 (din cazul formalismului de repartiție) nu are loc. În general, formalismul de repartiție este mai fin decît formalismul de imitanță; un motiv este acela că orice operator de repartiție semipasiv $\mathscr{D} \to L_2$ se poate prelungi în mod unic la o contracție a lui L_2.

(e) În cadrul formalismului de repartiție, fie *predictorul ideal* cu operatorul $T : \mathscr{D} \to L_2$, $a(t) \mapsto b(t) = a(t+\tau)$, unde $\tau > 0$ este fixat. Dacă $[t_1, t_2]$ este suportul unui semnal $a(t)$ din $\mathscr{D}$, atunci pentru orice t_0 cu $t_1 - \tau < t_0 < t_1$, avem

$$E(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} (|a(t)|^2 - |a(t+\tau)|^2)\, dt = -\int_{-\infty}^{t_0} |a(t+\tau)|^2\, dt < 0,$$

ceea ce arată că predictorul ideal (care evident nu este cauzal) nu este nici pasiv dar este semipasiv, deoarece

$$E(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} (|a(t)|^2 - |a(t+\tau)|^2)\, dt = 0.$$

§ 6. Sisteme pasive liniare și invariante în timp

Pentru sisteme liniare, continue și invariante în timp, se pot stabili rezultate mai bogate; în cele ce urmează, vom considera sisteme organizabile ca multiporți, pentru care semnalele de intrare și cele de ieșire sînt apte să caracterizeze energetic multiportul, analiza făcîndu-se în funcție de formalismul de descriere adoptat.

6.1. Formalismul de imitanță; matrice PR. O matrice pătrată $\mathbf{H}(s) = [h_{ij}(s)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de funcții de variabilă complexă $h_{ij} : \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$, definite pe un deschis Δ din $\mathbb{C}$ care conține semiplanul $\operatorname{Re} s > 0$,

se numește *pozitiv reală* (pe scurt PR) dacă în semiplanul $\alpha = \operatorname{Re} s > 0$ sînt îndeplinite următoarele condiții:

1) $\mathbf{H}(\alpha)$ este reală [adică $\mathbf{H}(\bar{s}) = \overline{\mathbf{H}(s)}$, conform principiului simetriei];

2) $\mathbf{H}(s)$ este olomorfă [adică toate elementele lui $H(s)$ sînt funcții olomorfe în Δ];

3) partea hermitică a lui $\mathbf{H}(s)$ este pozitiv semidefinită (adică $\mathbf{z}^*[\mathbf{H}(s) + \mathbf{H}(s)]\,\mathbf{z} \geqslant 0$ pentru orice vector coloană $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$).

Teorema IV.5. *Fie un sistem descris în formalismul de imitanță prin operatorul* $T : \mathscr{D}^n \to (\mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}})^n$, $n \geqslant 1$. *Dacă sistemul este liniar, continuu, invariant în timp, real și pasiv, atunci transformata Laplace a funcției matriceale de pondere,* $\mathbf{H}(s) = \mathrm{L}_{\mathbf{h}}(s)$, *este o matrice* PR.

Demonstrație. Deoarece sistemul este real, adică la semnale de intrare cu valori reale corespund semnale de ieșire cu valori reale, condiția de pasivitate (4.38) revine la

$$\int_{-\infty}^{t} (\mathbf{x}^*\mathbf{y} + \mathbf{y}^*\mathbf{x})\,dt \geqslant 0, \quad (\forall) t \in \mathbb{R}, \quad (\forall)\mathbf{x} \in \mathscr{D}^n. \tag{4.38'}$$

Deoarece $\mathscr{D}$ este dens în $\mathscr{S}$, operatorul T se poate prelungi la un operator $\tilde{T} : \mathscr{S}^n \to (\mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}})^n$, cu păstrarea inegalității (4.38'). Conform teoremei IV.3, sistemul este cauzal și fiind invariant în timp, rezultă că toate elementele matricei de pondere $\mathbf{h}$ sînt din $\mathscr{D}_1'$ (teorema IV.1).

Aplicăm sistemului un semnal de intrare de forma $\mathbf{x} = \mathbf{z}e^{st}\lambda(t)$, $\alpha > 0$, unde $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ este un vector constant (vector coloană de tip $n \times 1$, iar $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție de clasă C^∞ astfel încît $\lambda(t) = 1$ pentru $t \leqslant t_0$, $\lambda(t) = 0$ pentru $t \geqslant t_0 + \varepsilon$ (t_0 și $\varepsilon > 0$ fiind fixate). Atunci $\mathbf{x} \in \mathscr{S}$, deci este un semnal admisibil pentru testarea pasivității și $\mathbf{x} = \mathbf{z}e^{st}$ pentru $t \leqslant t_0$; răspunsul corespunzător este $\mathbf{y} = \mathbf{h} * \mathbf{z}e^{st}$, adică $\mathbf{y} = \mathbf{H}(s)\mathbf{z}e^{st}$ [căci $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$, $\langle \mathbf{y}(t), \varphi(t)\rangle = \langle \mathbf{h}\mathbf{z}, \langle e^{st}, \varphi(t+\tau)\rangle\rangle = \langle \mathbf{h}\mathbf{z}e^{-st}, \langle e^{s(t+\tau)}, \varphi(t+\tau)\rangle\rangle = \langle \mathbf{H}(s)\,\mathbf{z}, e^{st}\varphi(t)\rangle = \langle \mathbf{H}(s)\,\mathbf{z}e^{st}, \varphi(t)\rangle$]. Matricea $\mathbf{H}(s)$ este olomorfă și evident, $\mathbf{H}(\alpha)$ este reală (deoarece sistemul este real).

În sfîrșit, probăm ultima proprietate din definiția matricelor PR: aplicînd semnalul inițial $\mathbf{z}e^{st}\lambda(t)$, rezultă că pentru $t \leqslant t_0$, ieșirea este identică cu ieșirea corespunzătoare semnalului $\mathbf{z}e^{st}$ (fiindcă sistemul este cauzal, iar $\lambda(t) = 1$ pentru $t \leqslant t_0$). Scriind inegalitatea

(4.38') pentru $\mathbf{x} = \mathbf{z}e^{st}$ și $\mathbf{y} = \mathbf{H}(s)\mathbf{z}e^{st}$, se obține

$$\int_{-\infty}^{t_0} [\mathbf{z}^*e^{\bar{s}t}\mathbf{H}(s)\mathbf{z}e^{st} + \mathbf{z}^*e^{\bar{s}t}\mathbf{H}^*(s)\mathbf{z}e^{st}]\,dt = \mathbf{z}^*[\mathbf{H}(s) + \mathbf{H}^*(s)]\,\mathbf{z}\int_{-\infty}^{t_0} e^{2\sigma t}\,dt \geqslant 0$$

pentru $\alpha > 0$, de unde $\mathbf{z}^*[\mathbf{H}(s) + \mathbf{H}^*(s)]\,\mathbf{z} \geqslant 0$, $(\forall)\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ în semiplanul $\alpha > 0$.

6.2. **Formalismul de repartiție; matrice** MR. O matrice pătrată $\mathbf{S}(s) = [S_{ij}(s)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de funcții de variabilă complexă $S_{ij} : \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$, definite pe un deschis care conține semiplanul $\alpha > 0$, se numește *mărginit reală* (pe scurt MR) dacă în semiplanul $\alpha = \operatorname{Re} s > 0$ sînt indeplinite următoarele condiții:

1) $\mathbf{S}(\alpha)$ este reală;
2) $\mathbf{S}(s)$ este olomorfă;
3) matricea hermitică $\mathbf{D}(s) = \mathbf{1} - \mathbf{S}^*(s)\,\mathbf{S}(s)$ este pozitiv semidefinită [matricea $\mathbf{D}(s)$ se numește *matrice de disipație*].

Teorema IV.6. *Fie un sistem descris în formalismul de repartiție prin operatorul* $T : \mathscr{D}^n \to (\mathrm{L}_2)^n$, $n \geqslant 1$. *Dacă sistemul este liniar, continuu, invariant în timp, real și pasiv, atunci transformata Laplace a funcției matriceale de pondere,* $\mathbf{S}(s) = \mathrm{L}_{\mathbf{h}}(s)$, *este o matrice* MR.

Demonstrație. Printr-un procedeu similar cu cel utilizat în teorema IV.5, operatorul $T : \mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$ se poate prelungi la un operator liniar continuu $\mathscr{S}^n \to \mathrm{L}_2^n$ cu păstrarea inegalității din condiția de pasivitate

$$\int_{-\infty}^{t} (\|\mathbf{a}(t)\|^2 - \|\mathbf{b}(t)\|^2)\,dt \geqslant 0, \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}, \quad (\forall)\,\mathbf{a} \in \mathscr{S}^n.$$

Din teorema IV.4 rezultă că sistemul este cauzal, deci pentru elementele matricei $\mathbf{S}(s)$, avem $s_{ij} \in \mathscr{D}_+'$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$. Raționînd ca în demonstrația teoremei IV.5 și aplicînd un semnal de forma $\mathbf{z}e^{st}\lambda(t)$, rezultă că pentru $\mathbf{a} = \mathbf{z}e^{st}\lambda(t)$ avem $\mathbf{b} = \mathbf{S}(s)\mathbf{z}e^{st}$, $t \leqslant t_0$, t_0 fixat și condiția de pasivitate devine

$$\int_{-\infty}^{t_0} [\mathbf{z}^*e^{\bar{s}t}\mathbf{z}e^{st} - \mathbf{z}^*\mathbf{S}^*(s)\,e^{\bar{s}t}\mathbf{S}(s)\mathbf{z}e^{st}]\,dt = \mathbf{z}^*[\mathbf{1} - \mathbf{S}^*(s)\mathbf{S}(s)]\,\mathbf{z}\int_{-\infty}^{t_0} e^{2\alpha t}\,dt \geqslant 0$$

pentru $\alpha = \operatorname{Re} s > 0$, deci $\mathbf{z}^*[\mathbf{1} - \mathbf{S}^*(s)\mathbf{S}(s)]\mathbf{z} \geqslant 0$, $(\forall)\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ pentru $\alpha > 0$ și teorema este demonstrată.

6.3. **Legătura între matricele** PR **și** MR. În vederea aplicațiilor este util să se stabilească o legătură între matricele PR și matricele MR. Demonstrăm în prealabil

Lema 2. *Fie o matrice* $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(s)$ *de tip* $n \times n$ *de funcții de o variabilă complexă* $\Delta \to \overline{\mathbb{C}}$ (Δ *fiind un deschis în* $\mathbb{C}$); *presupunem că* $\mathbf{Z} + \mathbf{1}$ *este nesingulară în* Δ *și notăm* $\mathbf{S} = (\mathbf{Z} - \mathbf{1})(\mathbf{Z} + \mathbf{1})^{-1}$, $\mathbf{D} = \mathbf{1} - \mathbf{S}^*\mathbf{S}$. *Pentru orice* $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, *fie* $\mathbf{w} = (\mathbf{Z} + \mathbf{1})^{-1}\mathbf{z}$, *deci* $(\mathbf{Z} - \mathbf{1})\mathbf{w} = \mathbf{S}\mathbf{z}$ *și* $(\mathbf{Z} + \mathbf{1})\mathbf{w} = \mathbf{z}$. *În aceste condiții, au loc relațiile*

$$\text{(a)}\ (\mathbf{Z} + \mathbf{1})^*\mathbf{D}(\mathbf{Z} + \mathbf{1}) = 4\mathbf{Z}_H;$$

$$\text{(b)}\ 4[(\mathbf{Z} + \mathbf{1})^{-1}]^*\mathbf{Z}_H(\mathbf{Z} + \mathbf{1})^{-1} = \mathbf{D}; \qquad (4.46)$$

$$\text{(c)}\ 4\mathbf{w}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{w} = \|\mathbf{z}\|^2 - \|\mathbf{S}\mathbf{z}\|^2 = \mathbf{z}^*\mathbf{D}\mathbf{z}.$$

[*Reamintim că* $\mathbf{Z}_H = \frac{1}{2}(\mathbf{Z} + \mathbf{Z}^*)$.] *În particular,* $\mathbf{Z}_H$ *este pozitiv semidefinită dacă și numai dacă* $\mathbf{S}$ *este contracție* $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ *pe* Δ (*adică* $\|\mathbf{S}\| \leqslant 1$).

Demonstrație. Din definiția matricei $\mathbf{S}$ rezultă că $\mathbf{S}(\mathbf{Z} + \mathbf{1}) = \mathbf{Z} - \mathbf{1}$, deci $(\mathbf{Z} + \mathbf{1})^*\mathbf{S}^* = \mathbf{Z}^* - \mathbf{1}$, de unde $(\mathbf{Z} + \mathbf{1})^*\mathbf{S}^*\mathbf{S}(\mathbf{Z}+\mathbf{1}) = (\mathbf{Z}^* - \mathbf{1})(\mathbf{Z} - \mathbf{1})$. Folosind egalitatea $(\mathbf{Z}^* - \mathbf{1})(\mathbf{Z} - \mathbf{1}) = (\mathbf{Z}^* + \mathbf{1})(\mathbf{Z} + \mathbf{1}) - 2(\mathbf{Z}^* + \mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}^* + \mathbf{1})(\mathbf{Z} + \mathbf{1}) - 4\mathbf{Z}_H$, rezultă relația (a) din (4.46). Egalitate (b) rezultă din (a) folosind faptul că luarea inversei și adjunctei unei matrice sînt operații care comută. Pentru egalitatea (c) se folosesc relațiile

$$\|\mathbf{S}\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{Z}\mathbf{w} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{Z}\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 - 2\mathbf{w}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{w}$$

și

$$\|\mathbf{z}\|^2 = \|\mathbf{Z}\mathbf{w} + \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{Z}\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2 + 2\mathbf{w}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{w}$$

și prin scădere se obține (c).

Cu această pregătire, se poate formula

Teorema IV.7. *Fie o matrice* $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(s)$ *de funcții* $\Delta \to \overline{\mathbb{C}}$ *de variabilă complexă* s, *unde* Δ *este un deschis din planul complex conținînd semiplanul* $\alpha = \operatorname{Re} s > 0$. *Sînt echivalente afirmațiile:*

(I) $\mathbf{Z}$ *este o matrice* PR;

(II) { a) *matricea* $\mathbf{Z} + \mathbf{1}$ *este nesingulară în semiplanul* $\alpha > 0$;
b) *matricea* $\mathbf{S} = (\mathbf{Z} - \mathbf{1})(\mathbf{Z} + \mathbf{1})^{-1}$ *este de tip* MR.

Demonstrație. (I)⇒(II). Dacă $\mathbf{Z} + \mathbf{1}$ ar fi singulară în $\alpha > 0$, atunci ar exista $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$, astfel încît $(\mathbf{Z} + \mathbf{1})\mathbf{z} = 0$; înmulțim la stînga cu $\mathbf{z}^*$ și se obține $\mathbf{z}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{z} = -\mathbf{z}^*\mathbf{z} = -\|\mathbf{z}\|^2 < 0$, ceea ce contrazice (I); așadar, am probat II, a) și totodată rezultă că matricea $\mathbf{S}$ există și este olomorfă în $\alpha > 0$. Fie apoi $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ fixat arbitrar și $\mathbf{w} = (\mathbf{Z} + \mathbf{1})^{-1}\mathbf{z}$; înmulțind relația (a) din (4.46) la stînga cu $\mathbf{z}^*$ și la dreapta cu $\mathbf{z}$, se obține $\mathbf{z}^*\mathbf{D}\mathbf{z} = 4\mathbf{w}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{w}$, deci conform cu (I), rezultă $\mathbf{z}^*\mathbf{D}\mathbf{z} \geqslant 0$ în $\alpha > 0$, adică matricea $\mathbf{S}$ este MR.

(II)⇒(I). Fie $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$ arbitrar fixat și $\mathbf{z} = (\mathbf{Z} + \mathbf{1})\mathbf{w}$. Înmulțind relația (b) din (4.46) la stînga cu $\mathbf{z}^*$ și la dreapta cu $\mathbf{z}$, rezultă $4\mathbf{w}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{w} = \mathbf{z}^*\mathbf{D}\mathbf{z}$ și conform cu II, b), rezultă că $\mathbf{Z}_H$ este pozitiv semidefinită în $\alpha > 0$. Prin trecerea de la $\mathbf{S}$ la $\mathbf{Z}$, olomorfia se păstrează și teorema este astfel demonstrată.

6.4. **Matrice** PR **și** MR **real-raționale.** Proprietățile definitorii ale matricelor PR și MR sînt, în general, mai dificil de verificat; de aceea este important să existe criterii de testare a condițiilor PR și MR și în acest sens, vom da două teoreme de reprezentare.

Vom nota cu $M_n(\mathbb{R}(s))$ inelul matricelor de tip $n \times n$, avînd ca elemente fracții raționale în variabila complexă $s = \alpha + j\omega$, cu coeficienți reali; aceste matrice sînt numite real-raționale. În § 1 am arătat că funcțiile matriceale de circuit ale rețelelor constituite din elemente RLC fac parte din clasa $M_n(\mathbb{R}(s))$. Evident, singularitățile matricelor din $M_n(\mathbb{R}(s))$ pot fi numai poli, pentru că elementele lor sînt funcții meromorfe $\mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$. Coeficienții fracțiilor raționale considerate fiind reali, polii și zerourile sînt reali sau în perechi de numere complexe conjugate. Vom nota totodată prin $M_n(H_+)$ subinelul lui $M_n(\mathbb{R}(s))$ format din matricele real-raționale care sînt olomorfe în semiplanul $\alpha > 0$.

Fie $\mathbf{A}(s) \in M_n(H_+)$ o matrice cu polii pe axa frecvențelor reale $s = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, cel mult simpli și anume $\infty, 0, \pm j\omega_k$ $(1 \leqslant k \leqslant m)$; făcînd convenția $\omega_{-k} = -\omega_k$ și $\omega_0 = 0$, polii vor fi ∞, $j\omega_k$ $(-m \leqslant k \leqslant m)$. Se pot defini atunci *matricele-reziduu asociate matricei* $A(s)$ ca fiind

$$\mathbf{E}_\infty = \lim_{s\to\infty} \frac{1}{s}\mathbf{A}(s),\ \mathbf{E}_k = \lim_{s\to j\omega_k} (s - j\omega_k)\mathbf{A}(s),\ -m \leqslant k \leqslant m,$$

[în particular, $\mathbf{E}_0 = \lim_{s\to 0} s\mathbf{A}(s)$]; evident, $\mathbf{E}_{-k} = \overline{\mathbf{E}}_k$. De exemplu,

pentru matricea

$$\Lambda(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+4} & \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{s}{s+1} & \dfrac{2}{s} \end{bmatrix} \text{ din } M_2(H_+),$$

avem polii $0, \infty, \pm 2j$, deci $m = 1$ și matricele-reziduu asociate sînt

$$\mathbf{E}_\infty = 0,\ \mathbf{E}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ \mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Cu aceste pregătiri, vom demonstra

Teorema IV.8. *Fie* $\mathbf{Z}(s) \in M_n(\mathbb{R}(s))$ *o matrice oarecare. Sînt echivalente următoarele afirmații:*

(I) $\mathbf{Z}_H(s) \geqslant 0$ (*i.e. pozitiv semidefinită*) *în semiplanul* $\alpha = \operatorname{Re} s > 0$.

(II)
a) $\mathbf{Z}(s) \in M_n(H_+)$;
b) $\mathbf{Z}(s)$ *are poli cel mult simpli* $0, \infty, j\omega_k$ *pe axa imaginară* $s = j\omega$, *iar matricele-reziduu asociate* $\mathbf{E}_\infty, \mathbf{E}_0, \mathbf{E}_k$ *sînt hermitice și* $\geqslant 0$;
c) $\mathbf{Z}_H(s) \geqslant 0$ *pentru* $s = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, *cu excepția polilor* $\infty, j\omega_k\ (-m \leqslant k \leqslant m)$.

Demonstrație. (II)⇒(I). Fixăm $y \in \mathbb{C}^n$ și notăm $f_y(s) = \mathbf{y}^*\mathbf{Z}(s)\mathbf{y}$, deci $\operatorname{Re} f_y(s) = \mathbf{y}^*\mathbf{Z}_H(s)\mathbf{y}$. Avem deci de probat faptul că $\operatorname{Re} f_y(s) \geqslant 0$ în domeniul $\alpha = \operatorname{Re} s > 0$. Introducînd matricea

$$\mathbf{Z}^r(s) = s\mathbf{E}_\infty + \frac{1}{s}\mathbf{E}_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\mathbf{E}_k}{s - j\omega_k} + \frac{\mathbf{E}_{-k}}{s + j\omega_k}\right),$$

rezultă că există $\delta < 0$ astfel încît matricea

$$\tilde{\mathbf{Z}}(s) = \mathbf{Z}(s) - \mathbf{Z}^r(s) \tag{4.48}$$

să fie olomorfă în deschisul $\mathbb{C}\setminus\{\alpha \leqslant \delta\}$ și, în plus, are loc descompunerea

$$f_y(s) = \mathbf{y}^*\mathbf{Z}^r(s)\,\mathbf{y} + \mathbf{y}^*\tilde{\mathbf{Z}}(s)\,\mathbf{y}. \tag{4.49}$$

Deoarece matricele $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_\infty$ sînt reale și hermitice pozitiv semidefinite, rezultă, scriind $s = \alpha + j\omega$, că

$$\mathbf{y}^*\left(\frac{1}{s}\mathbf{E}_0\right)\mathbf{y} = \frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}(\mathbf{y}^*\mathbf{E}_0\mathbf{y}) \geqslant 0 \text{ și } \mathbf{y}^*(s\mathbf{E}_\infty)\mathbf{y} = \alpha(\mathbf{y}^*\mathbf{E}_\infty\mathbf{y}) \geqslant 0$$

pentru $\alpha > 0$. Apoi avem $\mathbf{E}_k = \mathbf{P}_k + j\mathbf{Q}_k$ (cu $\mathbf{P}_k$, $\mathbf{Q}_k$ matrice reale) și cum $\mathbf{E}_k$ este hermitică iar $\bar{\mathbf{E}}_k = \mathbf{E}_{-k}$, avem $\mathbf{E}_k^* = \mathbf{P}_k' - j\mathbf{Q}_k' = \mathbf{E}_k = \mathbf{P}_k + j\mathbf{Q}_k$, deci $\mathbf{P}_k' = \mathbf{P}_k$, $\mathbf{Q}_k' = -\mathbf{Q}_k$. Grupînd termenii asociați unei perechi curente $(-k, k)$, se obține

$$\mathbf{y}^*\left(\frac{\mathbf{E}_k}{s - j\omega_k} + \frac{\mathbf{E}_{-k}}{s + j\omega_k}\right)\mathbf{y} = \mathbf{y}^*\left(\frac{\mathbf{P}_k + j\mathbf{Q}_k}{s - j\omega_k} + \frac{\mathbf{P}_k - j\mathbf{Q}_k}{s + j\omega_k}\right)\mathbf{y} =$$

$$= 2\mathbf{y}^*\left(\frac{s\mathbf{P}_k - \omega_k\mathbf{Q}_k}{s^2 + \omega_k^2}\right)\mathbf{y}.$$

Apoi din faptul că $\mathbf{P}_H = \mathbf{P} \geqslant 0$, $\mathbf{Q}_H = \mathbf{0}$ și cum

$$\operatorname{Re}\frac{s}{s^2+\omega_k^2} = \frac{\alpha^2+\omega^2+\omega_k^2}{|s^2+\omega_k^2|^2} > 0 \text{ pentru } \operatorname{Re} s > 0,$$

rezultă că

$$\mathbf{y}^*\left(\frac{\mathbf{E}_k}{s - j\omega_k} + \frac{\mathbf{E}_{-k}}{s + j\omega_k}\right)_H\mathbf{y} = 2(\mathbf{y}^*\mathbf{P}_k\mathbf{y})\ \operatorname{Re}\frac{s}{s^2+\omega_k^2} \geqslant 0$$

pentru $\alpha = \operatorname{Re} s > 0$. Prin însumare după k rezultă $\operatorname{Re}[\mathbf{y}^*\mathbf{Z}^r(s)\,\mathbf{y}] \geqslant 0$, $\alpha > 0$ și totodată

$$\mathbf{y}^*\mathbf{Z}_H^r(j\omega)\mathbf{y} = 0 \text{ pentru } \omega \neq 0, \infty, \omega_k. \tag{4.50}$$

Așadar am demonstrat că primul termen din descompunerea (4.49), adică $\mathbf{y}^*\mathbf{Z}_H^r(s)\mathbf{y}$ este pozitiv în semiplanul drept și este nul pe axa imaginară (cu excepția unor puncte izolate). Pe de altă parte, ma-

tricea $\hat{\mathbf{Z}}(s)$ definită prin (4.48) variază continuu pe axa imaginară și din ipoteza II, (c), împreună cu relația (4.50), rezultă că $\mathbf{y}^*\hat{\mathbf{Z}}_H(\mathrm{j}\omega)\mathbf{y} \geqslant 0$. Așadar, funcția complexă f_y (pentru orice y fixat) este olomorfă în semiplanul drept și are partea reală nenegativă pe axa imaginară, deci conform principiului minimului părții reale, rezultă că $\mathrm{Re}\, f_y(s) = \mathrm{Re}\, \mathbf{y}^*\mathbf{Z}(s)\mathbf{y} = \mathbf{y}^*\mathbf{Z}_H(s)\mathbf{y} \geqslant 0$ pentru $\alpha = \mathrm{Re}\, s > 0$, deci am probat (I).

(I)⇒(II). Prin continuitate, rezultă că (I)⇒(II), (c). Probăm că (I)⇒(II), (a) și pentru aceasta, presupunem că (II), (a) nu ar avea loc, deci matricea $\mathbf{Z}(s)$ ar avea un pol s_0 cu $\mathrm{Re}\, s_0 > 0$, de multiplicitate p ($p \geqslant 1$). În acest caz, partea principală a dezvoltării Laurent a funcției $f_y(s)$ în vecinătatea lui s_0, pentru $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ fixat, ar fi de forma

$$\frac{1}{(s-s_0)^p} \cdot (\mathbf{y}^*\mathbf{K}\mathbf{y}), \text{ unde } \mathbf{K} = \frac{1}{(p-1)!}\left[(s-s_0)^p\mathbf{Z}(s)\right]_{s=s_0}^{(p-1)}.$$

Notînd $\mathbf{y}^*\mathbf{K}\mathbf{y} = p_y + \mathrm{j}q_y$ și $s - s_0 = \rho e^{\mathrm{j}\theta}$, rezultă

$$\mathrm{Re}\, \frac{1}{(s-s_0)^p}(\mathbf{y}^*\mathbf{K}\mathbf{y}) = \rho^{-p}(p_y \cos p\theta + q_y \sin p\theta),$$

deci această expresie are semn variabil în vecinătatea lui s_0, ceea ce contrazice ipoteza (I). În mod similar, matricea $\mathbf{Z}(s)$ nu are poli de multiplicitate $p \geqslant 2$ pe axa imaginară $s = \mathrm{j}\omega$ și rămîne de analizat cazul cînd pe această axă ar exista poli simpli, caz în care $\mathrm{Re}\, f_y(s)$ ar fi aproximat în vecinătatea lui s_0 prin $\rho^{-1}(p_y \cos\theta + q_y \sin\theta)$ și cum pentru $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ avem $\mathrm{Re}\, f_y(s) \geqslant 0$, rezultă în mod necesar că $q_y = 0$, deci matricea $\mathbf{E}_k$ este hermitică și deoarece $p \geqslant 0$, ea este și pozitiv semidefinită; similar se raționează pentru $\mathbf{E}_0$, $\mathbf{E}_\infty$, deci (I)⇒(II), (b). Teorema este complet demonstrată. ▪

6.5. **Observații.** a) Orice matrice $\mathbf{Z}(s) \in M_n(\mathbb{R}(s))$ are în mod evident proprietatea că $\mathbf{Z}(\alpha)$ are toate elementele reale pentru orice α real (cu excepția polilor reali). Din teorema precedentă rezultă că orice matrice care verifică (I) verifică și condiția (II), (a), deci este de tip PR. Trebuie de asemenea remarcat faptul că în cazul cînd (II), (a), (II), (b) sînt veraficate, este suficientă testarea condiției (I) numai pe axa $s = \mathrm{j}\omega$. În concluzie, teorema IV.8 dă condiții, mai lesnicioase decît aplicarea definiției, pentru testarea apartenenței unei matrice la clasa PR.

b) În teorema IV.1, (c) s-a probat că partea hermitică a matricei hibride **H** este pozitiv semidefinită în semiplanul $\alpha > 0$. Din teorema IV.8, (I) se deduce că aceasta este o matrice PR. Așadar, matricea hibridă a unui multiport, constituit din elementele

R, L, C pozitive, este PR; cu alte cuvinte, din pasivitatea locală a elementelor constituente, decurge pasivitatea globală a structurii de tip multiport. Trebuie remarcat că olomorfia decurge din semipozitivitatea părții hermitice, deoarece matricea face parte din clasa $M_n(\mathbb{R}(s))$.

Pentru matricele de tip MR din clasa $M_n(\mathbb{R}(s))$ are loc următoarea teoremă de reprezentare.

Teorema IV.9. *Fie* $\mathbf{S} = \mathbf{S}(s) \in M_n(\mathbb{R}(s))$ *o matrice oarecare și* $\mathbf{D} = \mathbf{1} - \mathbf{S}^*\mathbf{S}$. *Sînt echivalente următoarele afirmații:*

(I) $\mathbf{D}(s) \geqslant 0$ *în semiplanul* $\alpha = \mathrm{Re}\, s > 0$;

(II) (a) *există* $\delta < 0$ *astfel încît matricea* $\mathbf{S}(s)$ *să fie olomorfă în deschisul* $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{Re}\, s \leqslant \delta\}$.

(b) $\mathbf{D}(s) \geqslant 0$ *pe axa imaginară* $s = \mathrm{j}\omega$.

Demonstrație. (II)⇒(I). Pentru orice $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ fixat punem $\varphi_y(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{y}$. Din ipoteza (II), (b) rezultă implicația

$$\mathbf{y}^*[\mathbf{1} - \mathbf{S}^*(\mathrm{j}\omega)\mathbf{S}(\mathrm{j}\omega)]\mathbf{y} \geqslant 0 \Rightarrow |\varphi_y(\mathrm{j}\omega)| \leqslant \|\mathbf{y}\|.$$

Pentru $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$, punînd $z = \mathbf{y}/\|\mathbf{y}\|$, rezultă $\varphi_z(\mathrm{j}\omega)\| \leqslant 1$, deci $\varphi_y(\mathrm{j}\omega)\| \leqslant \|\mathbf{y}\|^2$ pentru orice $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, inclusiv pentru $\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Așadar, funcția olomorfă φ_y are modulul mărginit pe axa $\alpha = 0$ și conform maximului modulului, rezultă că $\|\varphi_y(s)\|^2 \leqslant \|\mathbf{y}\|^2$ în $\alpha > 0$, $(\forall)\, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$, adică tocmai (I).

(I)⇒(II). Pentru orice vector complex unitar $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ avem $\|\varphi_z(s)\| \leqslant 1$ în domeniul $\alpha > 0$. Atunci elementele matricei $\mathbf{S}(s)$ sînt majorate în modul de 1 pentru $\alpha > 0$ și, prin continuitate, acest fapt se menține și pe axa $\alpha = 0$. Folosind principiul prelungirii analitice, rezultă că există $\delta < 0$, astfel încît $\varphi_z(s)$ și deci $\mathbf{S}(s)$ este olomorfă în deschisul $\alpha > \delta$ și astfel am probat (II), (a), folosind ipoteza (I). Afirmația (II), (b) rezultă din (I) prin continuitate. Teorema este demonstrată.

Prezentăm acum o teoremă care oferă cîteva majorări corespondente în formalismul de imitanță și în formalismul de repartiție.

Teorema IV.10. *Fie* $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}(s)$ *o matrice* $n \times n$ *de funcții de variabilă complexă* $\Delta \to \overline{\mathbb{C}}$, *definite pe un deschis* Δ *din planul complex și astfel încît matricea* $\mathbf{Z} + \mathbf{1}$ *să fie nesingulară în* Δ; *notăm* $\mathbf{S} = (\mathbf{Z} - \mathbf{1})(\mathbf{Z} + \mathbf{1})^{-1}$. *Atunci pentru orice* $s \in \Delta$, *afirmațiile următoare*

sînt echivalente:

(I) *există constante reale* k_1, $k_2 > 0$ *astfel încît* $(\forall)\mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\|\mathbf{Z}(s)\mathbf{y}\| \leqslant k_1\|\mathbf{y}\| \text{ și } \|\mathbf{y}\|^2 \leqslant k_2 \mathbf{y}^* \mathbf{Z}_H(s)\mathbf{y};$$

(II) *există* k, $0 \leqslant k < 1$, *astfel încît* $(\forall)\mathbf{w} \in \mathbb{C}^n$, $\|\mathbf{S}(s)\mathbf{w}\| \leqslant k\|\mathbf{w}\|$.

Demonstrație. (I)⇒(II). Din ipoteză rezultă evident că $\mathbf{y}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{y} \geqslant k_2^{-1}\|\mathbf{y}\|^2$ și punînd $\mathbf{w} = (\mathbf{Z} + \mathbf{1})\mathbf{y}$, se obține $\|\mathbf{w}\| \leqslant (k_1 + 1)\|\mathbf{y}\|$. Așadar, $\mathbf{y}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{y} \geqslant \dfrac{1}{(k_1+1)^2 k_2}\|\mathbf{w}\|^2$. Folosind relația (4.46), (c) din lema 2, rezultă că $\|\mathbf{S}\mathbf{w}\|^2 \leqslant \|\mathbf{w}\|^2 - \dfrac{4}{(k_1+1)^2 k_2}\|\mathbf{w}\|^2$; în particular, numărul $1 - \dfrac{4}{(k_1+1)^2 k_2}$ este pozitiv și notîndu-l cu k^2, rezultă (II).

(II)⇒(I). Se poate presupune $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$; punînd $\mathbf{w} = (\mathbf{Z} + \mathbf{1})\mathbf{y}$, se obține $\mathbf{S}\mathbf{w} = (\mathbf{Z} - \mathbf{1})\mathbf{y}$, iar inegalitatea din ipoteză $\|\mathbf{S}\mathbf{w}\|^2 \leqslant k^2\|\mathbf{y}\|^2$ se scrie atunci

$$\|\mathbf{Z}\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 - 2\mathbf{y}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{y} \leqslant k^2(\|\mathbf{Z}\mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathbf{y}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{y}).$$

Notăm $a = \dfrac{\|\mathbf{Z}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$ și $b = \dfrac{\mathbf{x}^*\mathbf{Z}_H\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$, deci $|b| < a$, conform inegalității lui Schwartz. Inegalitatea anterioară se mai scrie $a^2 + 1 - 2b \leqslant k^2(a^2 + 1 + 2b)$, adică $(1 - k^2)(a^2 + 1) \leqslant (2 + 2k^2)\,b$. Pe de o parte, rezultă $1 - k^2 \leqslant (2 + 2k^2)b$, deci $b \geqslant \dfrac{1 - k^2}{2 + 2k^2}$ și pe de alta, $a^2(1 - k^2) \leqslant (2 + 2k^2)b < (2 + 2k^2)a$, deci $a \leqslant \dfrac{2 + 2k^2}{1 - k^2}$.

Se poate lua $k_1 = k_2 = \dfrac{2 + 2k^2}{1 - k^2}$ și va rezulta (I).

Teorema este complet demonstrată.

În formularea unor teoreme anterioare au apărut operații matriceale de tipul $\mathbf{Z} + \mathbf{1}$, $\mathbf{Z} - \mathbf{1}$ etc. Acestea sînt dimensional posibile presupunînd că impedanțele sînt raportate la o rezistență de referință R_0; matricea $\mathbf{S}$ corespunzătoare are ca impedanță de referință aceeași rezistență R_0.

6.6. **Disipativitate.** Din clasa sistemelor pasive se detașează o importantă subclasă, precizată prin următoarea definiție: un sistem dat printr-un operator de repartiție $a \mapsto b$ se numește *nedisipativ* (sau *fără pierderi*) dacă este pasiv și, în plus,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\|\mathbf{a}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2)\,dt = 0. \tag{4.51}$$

De exemplu, predictorul ideal [exemplul 5.6, e)] este semipasiv, dar nefiind pasiv, nu este fără pierderi.

Pentru sisteme liniare reale și invariante în timp, caracterizate prin matricea de repartiție $\mathbf{S}(s)$ presupusă din $M_n(\mathbb{R}(s))$, se pot obține condiții mai concrete care asigură nedisipativitatea. Așadar, un astfel de sistem este nedisipativ dacă și numai dacă sînt verificate condițiile:

(a) $\mathbf{S}(s)$ este olomorfă într-un deschis $\mathbb{C} \setminus \{\alpha \leqslant \delta\}$ cu $\delta < 0$;

(b) $\mathbf{S}^*(j\omega)\mathbf{S}(j\omega) = \mathbf{1}$. (4.52)

Deoarece $\overline{\mathbf{S}}(s) = \mathbf{S}(\bar{s})$, condiția (b) se scrie $\mathbf{S}'(-j\omega)\mathbf{S}(j\omega) = \mathbf{1}$ și prin prelungire analitică în întreg planul, $\mathbf{S}'(-s)\mathbf{S}(s) = \mathbf{1}$.

Această ultimă relație este echivalentă deci cu (4.52), (b) și este mai comod de verificat.

6.7. **Multiport reciproc.** În § 3 am arătat că există două formalisme energetice fundamentale: formalismele hibride și formalismul de repartiție. O deosebire esențială între aceste moduri de descriere constă în spațiul de funcții parcurs de entitățile care apar în condițiile (4.38), (4.39) de pasivitate. În teoremele date am folosit termenul de formalism de imitanță, dar rezultate sînt adevărate și pentru formalisme hibride (deoarece atunci are sens $\mathbf{y}^*\mathbf{x}$). Pentru sistemele electrice am pus în evidență două formalisme omogene, $\mathbf{Z}$ și $\mathbf{Y}$, definite pe spații de dimensiune n care într-un anumit sens sînt ortogonale, spațiul de curenți și spațiul de tensiuni. Matematic, aceste două spații au baze liniare distincte (așa cum s-a arătat în § 1). În formalismul hibrid propriu-zis, operatorul este definit pe un produs cartezian $\mathscr{I}_1 \times \mathscr{U}_2$ astfel încît $\dim \mathscr{I}_1 + \dim \mathscr{U}_2 = n$, unde $\mathscr{I}_1$ este un subspațiu de curenți, iar $\mathscr{U}_2$ un subspațiu de tensiuni.

Reamintind aceste lucruri, putem introduce un alt concept important. Fie un multiport (electric sau de altă natură) liniar și invariant în timp. Multiportul se numește *reciproc* dacă fiind date

două perechi de semnale admisibile (indexate cu a și b), de tip tensiuni și curenți, are loc egalitatea

$$\mathbf{U}'_a(s)\mathbf{I}_b(s) = \mathbf{U}'_b(s)\mathbf{I}_a(s). \tag{4.53}$$

Se arată fără dificultate că dacă multiportul admite formalismul $\mathbf{Z}(\mathbf{Y})$, atunci reciprocitatea este echivalentă cu simetria matricei $\mathbf{Z}(\mathbf{Y})$, adică $\mathbf{Z}'(s) = \mathbf{Z}(s)$ [sau $\mathbf{Y}'(s) = \mathbf{Y}(s)$], iar dacă multiportul admite formalismul hibrid, adică

$$\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1(s)\\ \mathbf{I}_2(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{H}_{11}(s) & \mathbf{H}_{12}(s)\\ \mathbf{H}_{21}(s) & \mathbf{H}_{22}(s)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_1(s)\\ \mathbf{U}_2(s)\end{bmatrix},$$

atunci reciprocitatea este echivalentă cu următoarea structură a matricei hibride :

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix}\mathbf{H}_{11}(s) & \mathbf{H}_{12}(s)\\ -\mathbf{H}'_{12}(s) & \mathbf{H}_{22}(s)\end{bmatrix}, \tag{4.54}$$

în care $\mathbf{H}'_{11}(s) = \mathbf{H}_{11}(s)$, $\mathbf{H}'_{22}(s) = \mathbf{H}_{22}(s)$. Condițiile pentru formalismele omogene apar drept cazuri particulare ale condiției (4.54).

Pentru teoria rețelelor electrice este util rezultatul următor, care este o consecință directă a teoremei IV.8.

Teorema IV.11. *Fie un multiport electric liniar, invariant în timp și pasiv. Fie*

$$\mathbf{A}(s) = \frac{1}{2}[\mathbf{U}(s) + \mathbf{I}(s)], \quad \mathbf{B}(s) = \frac{1}{2}[\mathbf{U}(s) - \mathbf{I}(s)].$$

Atunci sînt adevărate afirmațiile :

(a) *Dacă multiportul admite formalismul* $\mathbf{Z}(\mathbf{Y})$, *adică există reprezentarea* $\mathbf{U}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s)$ [*sau* $\mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{U}(s)$], *atunci există o matrice unică* $\mathbf{S}(s)$ *de tip* MR *astfel ca* $\mathbf{A}(s) \mapsto \mathbf{B}(s)$, $\mathbf{B}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{A}(s)$, *anume*

$$\mathbf{S}(s) = [\mathbf{Z}(s) - \mathbf{1}][\mathbf{Z}(s) + \mathbf{1}]^{-1} \text{ sau } \mathbf{S}(s) = [\mathbf{1} - \mathbf{Y}(s)][\mathbf{Y}(s) + \mathbf{1}]^{-1};$$

(b) *Dacă multiportul admite formalismul* $\mathbf{S}$, *atunci există reprezentarea* $\mathbf{B}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{A}(s)$, *atunci există o matrice unică* $\mathbf{Z}(s)$ *de tip* PR *astfel ca* $\mathbf{I}(s) \mapsto \mathbf{U}(s)$, $\mathbf{U}(s) = \mathbf{Z}(s)\mathbf{I}(s)$, *dacă și numai dacă* $\det(\mathbf{1} - \mathbf{S}(s)) \not\equiv 0$, $\alpha > 0$;

c) *Dacă multiportul admite formalismul* $\mathbf{S}$, *adică există reprezentarea* $\mathbf{B}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{A}(s)$, *atunci există o matrice unică* $\mathbf{Y}(s)$ *de tip* PR *astfel ca* $\mathbf{U}(s) \mapsto \mathbf{I}(s)$, $\mathbf{I}(s) = \mathbf{Y}(s)\mathbf{U}(s)$, *dacă și numai dacă* $\det(\mathbf{1} + \mathbf{S}(s)) \not\equiv 0$, $\alpha > 0$;

d) *La punctele* b) și c), *matricele de imitanță sînt date de* $\mathbf{Z}(s) = [\mathbf{1} + \mathbf{S}(s)][\mathbf{1} - \mathbf{S}(s)]^{-1}$ *și respectiv* $\mathbf{Y}(s) = [\mathbf{1} - \mathbf{S}(s)][\mathbf{1} + \mathbf{S}(s)]^{-1}$.

6.8. **Observații.** (a) Teorema IV.11 arată că dacă există formalismul de imitanță ($\mathbf{Z}$ sau $\mathbf{Y}$), atunci există întotdeauna și formalismul de repartiție $\mathbf{S}$. Reciproca nu este în general adevărată ; de exemplu, se consideră matricea

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}. \tag{4.55}$$

Sistemul corespunzător este fără memorie, pasiv ($\mathbf{S}^*\mathbf{S} = \mathbf{1}$, deci $E(t) = 0$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$) și cum $p(t) = 0$, $(\forall)t \in \mathbb{R}$, se spune că sistemul conservă puterea instantanee. Orice sistem care conservă puterea instantenee este nedisipativ, dar există sisteme nedisipative, care nu conservă puterea instantanee $\left(\text{de exemplu } u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)$. Deoarece pentru matricea $\mathbf{S}$ dată de (4.55) avem $\det(\mathbf{1} + \mathbf{S}) = 0$ și $\det(\mathbf{1} - \mathbf{S}) = 0$, rezultă că sistemul considerat nu admite nici formalismul $\mathbf{Z}$, nici formalismul $\mathbf{Y}$. Matricea $\mathbf{S}$ dată de (4.55) corespunde unei transformator ideal cu raport de transformare 1:1.

(b) Ținînd seama de proprietățile cuprinse în teorema IV. 11, rezultă că un multiport reciproc are matricea $\mathbf{S}$ simetrică, $\mathbf{S}'(s) = \mathbf{S}(s)$.

(c) Pentru un multiport nedisipativ dat prin formalismul de imitanță, condiția (4.52), (b) se traduce, folosind (4.46), (b), prin $\mathbf{Z}_H(\mathrm{j}\omega) = \mathbf{0}$ sau $\mathbf{Y}_H(\mathrm{j}\omega) = \mathbf{0}$, pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$, cu excepția polilor. Se mai poate scrie $\mathbf{Z}(\mathrm{j}\omega) + \mathbf{Z}'(-\mathrm{j}\omega) = \mathbf{0}$, respectiv $\mathbf{Y}(\mathrm{j}\omega) + \mathbf{Y}'(-\mathrm{j}\omega) = \mathbf{0}$; aceste condiții se prelungesc la întreg planul complex, cu excepția polilor, anume

$$\mathbf{Z}(s) + \mathbf{Z}'(-s) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{Y}(s) + \mathbf{Y}'(-s) = \mathbf{0}. \tag{4.56}$$

Aceste relații sînt valabile, ca și relația $\mathbf{S}'(-s)\,\mathbf{S}(s) = \mathbf{1}$ a.p. $s \in \mathbb{C}$; aici sînt probate pentru matricele din clasa $M_n(\mathbb{R}(s))$; pentru cazul general se poate consulta [43]. Condițiile (4.56) sînt valabile și pentru un formalism hibrid propriu-zis, adică $\mathbf{H}(s) + \mathbf{H}'(-s) = \mathbf{0}$

(d) În demonstrația teoremei IV.8 am introdus matricea $\mathbf{Z}^r$ dată prin

$$\mathbf{Z}^r(s) = s\mathbf{E}_\infty + \frac{1}{s}\mathbf{E}_0 + \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\mathbf{E}_k}{s - \mathrm{j}\omega_k} + \frac{\mathbf{E}_{-k}}{s + \mathrm{j}\omega_k}\right).$$

Vom introduce o matrice modificată prin

$$\mathbf{Z}_{nd}(s) = \mathbf{Q} + \mathbf{Z}^r(s), \tag{4.57}$$

unde $\mathbf{Q}$ este o matrice constantă și antisimetrică. Calculînd matricea $-\mathbf{Z}'_{nd}(-s)$, se obține că $\mathbf{Z}_{nd}(s) + \mathbf{Z}'_{nd}(-s) = \mathbf{0}$, care arată ca (4.57) este reprezentarea generală a unei matrice din clasa $\mathbf{M}_n(\mathbb{R}(s))$ a unui sistem fără pierderi.

(e) Din cele arătate s-a văzut că formalismul S este mai cuprinzător decît formalismele de imitanță. Se poate arăta că pentru un multiport liniar, invariant în timp și pasiv, existența unui formalism hibrid este echivalentă cu existența formalismului S. Acest rezultat este un caz particular al faptului că orice funcție olomorfă în semiplanul $\alpha > 0$ cu valori operatori de contracție $H \to H$ (H fiind un spațiu Hilbert) este funcția caracteristică a unui operator liniar continuu și invariant în timp al unui alt spațiu Hilbert. Acest rezultat este fundamental pentru teoria sistemelor liniare, continue, invariante în timp și pasive [19, 12]. Ca un caz particular, se poate arăta că orice multiport constituit din elemente R, L, C pozitive, giratoare și transformatoare ideale (un astfel de element este descris prin $u_1 = nu_2$, $i_2 = -ni_1$ cu n real) admite un formalism S, cu matricea $\mathbf{S}(s)$ de tip MR [39].

(f) Un rezultat major al teoriei realizabilității matricelor de tip PR din clasa $M_n(\mathbb{R}(s))$ se poate formula astfel: *Fiind dată o matrice* $\mathbf{Z}(s) \in M_n(\mathbb{R}(s))$ *de tip* PR, *există întotdeauna un multiport (neunic în general), constituit din elemente* R, L, C *pozitive, giratoare și transformatoare ideale, care admite un formalism de imitanță, pentru care matricea asociată este* $\mathbf{Z}(s)$.

Demonstrarea acestui rezultat important constă în elaborarea unor procedee concrete de sinteză și în găsirea unor structuri de circuit care realizează anumite imitanțe. Expunerea amplă a acestor metode și procedee este cuprinsă în [20].

6.9. **Funcții pr și funcții mr.** În cazul $n = 1$ multiportul devine uniport, iar funcțiile matriceale devin funcții uzuale. Formalismul hibrid nu are sens și există doar formalisme de imitanță și de repartiție. Definițiile de bază corespunzătoare acestei variante scalare sînt date în cele ce urmează.

Fie o funcție $F(s)$ de variabilă complexă, $F : \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$, definită pe un deschis Δ din $\mathbb{C}$ conținînd semiplanul $\alpha > 0$. Această funcție este *pozitiv reală* (pe scurt pr) dacă în domeniul $\alpha > 0$ au loc proprietățile:

1) $F(\alpha)$ este reală;

2) F este olomorfă;

3) $\operatorname{Re} F(s) \geqslant 0$.

Fie o funcție $S(s)$ de variabilă complexă, $S : \Delta \to \overline{\mathbb{C}}$. Se spune că această funcție este *mărginit reală* (pe scurt mr) dacă în domeniul $\alpha > 0$ sînt verificate proprietățile:

1) $S(\alpha)$ este reală;

2) S este olomorfă;

3) $D(s) = 1 - \tilde{S}(s)S(s) \geqslant 0$.

Reenunțăm teoremele date anterior pentru matricele din clasa $M_n(\mathbb{R}(s))$, pentru clasa $\mathbb{R}(s) = M_1(\mathbb{R}(s))$ a fracțiilor raționale în s cu coeficienți reali.

Teorema IV.8′. *Pentru orice fracție rațională* $F(s)$ *din* $\mathbb{R}(s)$ *sînt echivalente afirmațiile:*

(I) $\operatorname{Re} F(s) \geqslant 0$ *pentru* $\alpha > 0$;

(II)
(a) $F(s) \in M_1(H_+)$, *adică este olomorfă în semiplanul* $\alpha > 0$;
(b) $F(s)$ *are poli cel mult simpli pe axa* $s = j\omega$, *iar reziduurile corespunzătoare sînt reale și pozitive*;
(c) $\operatorname{Re} F(s) \geqslant 0$ *pentru* $s = j\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, *cu excepția polilor.*

Deoarece o funcție de tip pr realizează o aplicație olomorfă care duce semiplanul drept în el însuși, cu păstrarea semiaxei reale pozitive, rezultă că prin compunerea a două funcții pr se obține tot o funcție pr; de asemenea, dacă o funcție f este de tip pr, atunci $\frac{1}{f}$ are aceeași proprietate $\left(\text{căci dacă } \operatorname{Re} f > 0, \text{ atunci } \operatorname{Re} \frac{1}{f} > 0\right)$.
De aici rezultă două consecințe importante:

1) dacă un uniport liniar, invariant în timp și pasiv admite descrierea Z cu matricea $Z(s)$ de tip pr, atunci el admite și descrierea Y cu matricea $Y(s)$ de tip pr, egală cu $1/Z(s)$;

2) o matrice de tip pr din $M_1(\mathbb{R}(s))$ nu are nici poli și nici zerouri în semiplanul $\alpha > 0$.

Fie un polinom $P(s)$ în variabila complexă s cu coeficienți reali și s_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, rădăcinile lui P (cu ordinul de multiplicitate r_k). Atunci $\sum_{k=1}^{m} r_k = \operatorname{gr} P$. Reamintim că polinomul P se numește *polinom Hurwitz în sens strict* (sau *polinom stabil*) dacă $\operatorname{Re} s_k < 0$ pentru toți k, $1 \leqslant k \leqslant m$; dacă $\operatorname{Re} s_k \leqslant 0$, $1 \leqslant k \leqslant m$, și în cazul $\operatorname{Re} s_k = 0$ avem $r_k = 1$, P se numește *polinom Hurwitz în sens larg.*

O matrice din clasa $M_1(\mathbb{R}(s))$ de tip pr se identifică desigur cu o funcție rațională $\frac{P(s)}{Q(s)}$, cu P și Q polinoame în s cu coeficienți reali; cum $s = 0$ și $s = \infty$ sînt poli cel mult simpli, rezultă că $|\operatorname{gr} P - \operatorname{gr} Q| \leqslant 1$; în plus, P și Q sînt în mod necesar polinoame Hurwitz în sens larg.

Teorema IV.9′. *Pentru orice fracție rațională* $S(s)$ *din* $\mathbb{R}(s)$ *sînt echivalente afirmațiile:*

(I) $|S(s)| \leqslant 1$ *în semiplanul* $\alpha = \operatorname{Re} s > 0$;

$$(II)\begin{cases}(a)\ \textit{există}\ \delta<0\ \textit{astfel încît funcția}\ S(s)\ \textit{să fie olomorfă în deshisul}\ \mathbb{C}\setminus\{\alpha\leqslant\delta\};\\ (b)\ |S(s)|\leqslant 1\ \textit{pe axa}\ s=j\omega.\end{cases}$$

Rezultă că pentru o funcție rațională $S(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ de tip mr, polinomul Q de la numitor este polinom Hurwitz în sens strict, iar gr $P\leqslant$ gr Q (deoarece punctul $s=\infty$ nu poate fi pol).

Relațiile de trecere de la formalismul de imitanță la cel de repartiție sînt

$$S=\frac{Z-1}{Z+1},\quad S=\frac{1-Y}{1+Y},\quad Z=\frac{1+S}{1-S},\quad Y=\frac{1-S}{1+S}.$$

O legătură între funcțiile pr și mr este cuprinsă în

Teorema IV.7′. *Fie o funcție $F(s)$ de variabilă complexă $F:\Delta\to\overline{\mathbb{C}}$, definită într-un deschis Δ din $\mathbb{C}$, care conține semiplanul $\alpha>0$. Sînt echivalente afirmațiile:*

(I) *F este funcție de tip* pr;

$$(II)\begin{cases}a)\ \textit{funcția}\ F(s)+1\ \textit{nu se anulează în}\ \alpha>0;\\ b)\ \textit{funcția}\ S(s)=\dfrac{F(s)-1}{F(s)+1}\ \textit{este de tip}\ \text{mr}.\end{cases}$$

Pentru aplicații, teorema IV.7′ se dovedește mai puțin utilă decît

Teorema IV.12. *Fie o funcție rațională $F(s)=\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ din $\mathbb{R}(s)$. Sînt echivalente următoarele afirmații:*

(I) *$F(s)$ este de tip* pr;

$$(II)\begin{cases}a)\ P(s)+Q(s)\ \textit{este polinom Hurwitz în sens strict};\\ b)\ \operatorname{Re}P(j\omega)\,\overline{Q(j\omega)}\geqslant 0,\ (\forall)\omega\in\mathbb{R}.\end{cases}$$

Demonstrație. (I)⇒(II). Din ipoteză rezultă că $\operatorname{Re}F(j\omega)=\operatorname{Re}\dfrac{P(j\omega)\,\overline{Q(j\omega)}}{|Q(j\omega)|^2}>0$, $(\forall)\,\omega\in\mathbb{R}$ (cu excepția polilor); prin

continuitate rezultă că $\operatorname{Re}P(j\omega)\,\overline{Q(j\omega)}\geqslant 0$ pe axa $s=j\omega$. Din teorema IV.7′ rezultă că funcția $S(s)=\dfrac{P(s)-Q(s)}{P(s)+Q(s)}$ este de tip mr și în particular este olomorfă în deschisul $\mathbb{C}\setminus\{\alpha\leqslant\delta\}$, $\delta<0$, deci $P(s)+Q(s)$ este polinom Hurwitz în sens strict.

(II)⇒(I). Funcția $S(s)$ definită mai sus este olomorfă în deschisul $\mathbb{C}\setminus\{\alpha\leqslant\delta\}$, $\delta<0$. Apoi $D(s)=1-\overline{S(s)}\,S(s)=\dfrac{4\operatorname{Re}[P(s)\overline{Q(s)}]}{|P(s)+Q(s)|^2}$ după calcule imediate, deci $D(j\omega)\geqslant 0$, conform ipotezei (II), b). Așadar $S(s)$ este de tip mr și împreună cu ipoteza (II). a), rezultă că $F(s)$ este de tip pr, în virtutea teoremei IV.7′.

Utilitatea teoremei IV.12 constă în faptul că pentru testarea proprietății pr nu se mai recurge la un calcul de reziduuri, ci se testează apartenența la clasa polinoamelor Hurwitz în sens strict a polinomului $P(s)+Q(s)$ (pentru care se poate aplica de exemplu criteriul lui Routh) și de asemenea se testează condițiile în care polinomul $\operatorname{Re}P(j\omega)\,\overline{Q(j\omega)}$ are numai rădăcini de multiplicitate pară.

Imitanța de intrare a unui uniport nedisipativ se obține din formula (4.57), ținînd seama de faptul că pentru $n=1$ avem $Q=0$. Rezultă atunci

$$F^r(s)=k_\infty s+\frac{k_0}{s}+\sum_{i=1}^{m}\frac{2k_i s}{s^2+\omega_i^2},\tag{4.58}$$

unde k_∞, k_0, k_i sînt reale și nenegative. Această funcție $F^r(s)$ se numește *funcție de reactanță*. Orice imitanță de intrare a unei rețele cu elemente $L,C>0$ are forma canonică (4.58), iar această formă corespunde unui uniport disipativ general (adică cu elemente $L,C>0$ și cu giratoare).

6.10. **Exemple și aplicații.** a) Fie $Z(s)$ o funcție rațională din $\mathbb{R}(s)$ de tip pr. Dacă $Z(s)$ are poli pe axa $s=j\omega$, atunci are loc descompunerea $Z(s)=Z^r(s)+Z_1(s)$, unde $Z^r(s)$ grupează părțile principale relativ la polii de pe axa $s=j\omega$, iar $Z_1(s)$ nu are poli pe această axă (și se numește *funcție de reactanță minimă*). Funcția $Z_1(s)$ poate să aibă zerouri pe axa $s=j\omega$ iar inversa $Y_1(s)=1/Z_1(s)$ este de asemenea de tip pr și poate avea poli pe axa $s=j\omega$. Separînd partea nedisipativă, se obține $Y_1(s)=Y_1^r(s)+Y_2(s)$, unde $Y_1^r(s)$ grupează părțile principale relativ la polii de pe axa $s=j\omega$, iar $Y_2(s)$ nu are nici poli, nici zerouri pe această axă. Am obținut astfel descompunerea $Z(s)=Z^r(s)+\dfrac{1}{Y_1^r(s)+Y_2(s)}$. Funcția $Z_2(s)=1/Y_2(s)$ nu are poli și nici zerouri pe $s=j\omega$, deci polinoamele $P_2(s)$, $Q_2(s)$ de la numărător și numitor au același grad și totodată $P_2(0)\neq 0$, $Q_2(0)\neq 0$. Pe de altă parte, $\operatorname{Re}Z_2(s)$ își atinge valoarea minimă pentru $s=j\omega$ și

fie R_{2m} această valoare. Funcția $Z_3(s) = Z_2(s) - R_{2m}$ este de asemenea de tip pr, iar partea reală a sa se anulează în cel puțin două puncte conjugate de pe axa $s = j\omega$. Funcția $Z_3(s)$ se numește *funcție minimală*. Reprezentarea descompunerii realizate este indicată în fig. 4.6. O descompunere similară are loc pornind de la o funcție rațională de tip $Y(s)$.

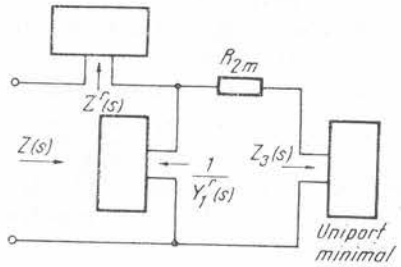


Fig. 4.6. Extragerea funcției minimale corespunzînd unei funcții pozitiv reale.

De exemplu, fie funcția

$$Z(s) = \frac{6s^2 + 5s + 9}{s^2 + s + 2.}$$

În acest caz, polinomul

$$(6s^2 + 5s + 9) + (s^2 + s + 2) = 7s^2 + 6s + 11$$

este Hurwitz în sens strict; numărătorul și numitorul nu au poli pe axa $s = j\omega$. Se verifică de asemenea condiția II, b) din teorema IV.12, deci $Z(s)$ este o funcție pr. Cu notațiile de mai sus, avem

$$Z^r(s) = 0,\ Z_2(s) = Z_1(s) = Z(s),\quad Y_1^r(s) = 0,\quad Y_2(s) = Y_1(s) = \frac{1}{Z(s)}.$$

Pentru $z = j\omega$ avem

$$\operatorname{Re} Z(j\omega) = \frac{6\omega^4 - 16\omega^2 + 18}{\omega^4 - 3\omega^2 + 4}$$

și minimul acesteia este atins pentru $\omega = 1$, cu valoarea $R_{2m} = \operatorname{Re} Z(j) = 4$ (după calcule imediate). Avem

$$Z_3(s) = Z(s) - 4 = \frac{2s^2 + s + 1}{s^2 + s + 2}$$

și pentru partea reală a lui $Z_3(s)$ se anulează în punctele $\pm j$. Așadar aceasta este funcția minimală.

Fără a prezenta detaliile de sinteză de tip Brune [17], se obține rețeaua electrică dată în fig. 4.7. Deși tripolul figurat între punctele a, b, c conține un element negativ,

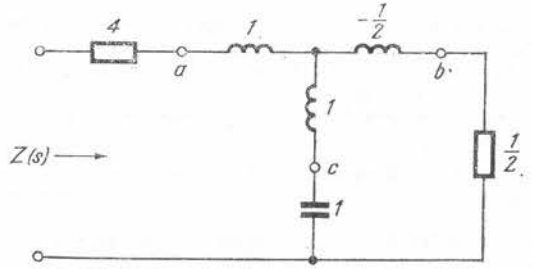
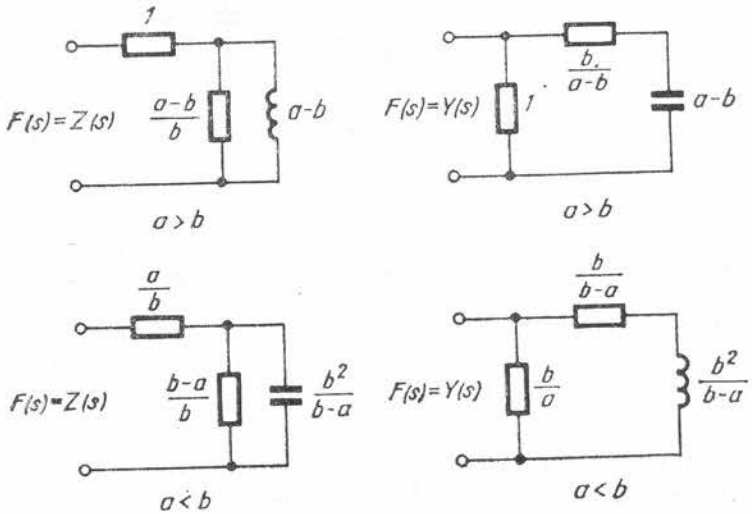


Fig. 4.7. Exemplul de sinteză a unei funcții pozitiv reale.

inductanța $-\frac{1}{2}$, acesta este echivalent cu transformator perfect avînd $L_1 = 2$, $L_2 = 1$, $k = 1$ (coeficientul de cuplaj).

b) Fie $P(s) = as + 1$, $Q(s) = bs + 1$ cu a, b, constante reale și $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$. Aplicăm testul de pr cuprins în teorema IV.12. Avem $P(s) + Q(s) = (a + b)s + 2$ și acesta este polinom Hurwitz în sens strict dacă $a + b > 0$; apoi $\operatorname{Re} P(j\omega)\,\overline{Q(j\omega)} = 1 + ab\omega^2$ și neapărat $ab > 0$. Așadar, $F(s) = \frac{as + 1}{bs + 1}$ este o funcție pr dacă și numai dacă $a > 0$, $b > 0$. Dacă $a > b$, atunci $\inf_\omega \operatorname{Re} F(j\omega) = 1$ (atins pentru $\omega = 0$), iar dacă $a < b$, atunci $\inf_\omega \operatorname{Re} F(j\omega) = \frac{a}{b}$ (atins pentru $\omega = \infty$). Descompunerile corespunzătoare sînt

$$F(s) = 1 + \frac{(a - b)s}{bs + 1} \text{ dacă } a > b \text{ și } F(s) = \frac{a}{b} + \frac{b - a}{b(bs + 1)} \text{ dacă } a < b.$$



Figî 4.8. Realizările unei funcții pozitive reale omografice.

Circuitele electrice corespunzătoare sînt date în fig. 4.8.

c) Funcția rațională $F(s) = \frac{s^2 + 1}{s^2 + 2}$ nu este pr, deoarece polinomul $s^2 + 1 + s^2 + 2 = 2s^2 + 3$ nu este Hurwitz în sens strict.

d) Imitanța de intrare a unui uniport nedisipativ dată de

$$Z^r(s) = k_\infty s + \frac{k_0}{s} + \sum_{i=1}^{m} \frac{2k_i s}{s^2 + \omega_i^2}, \quad Y^r(s) = \frac{1}{Z^r(s)} = r_\infty s + \frac{r_0}{s} + \sum_{j=1}^{p} \frac{2r_j s}{s^2 + \omega_j^2}$$

se poate sintetiza printr-o rețea LC ca în fig. 4.9.

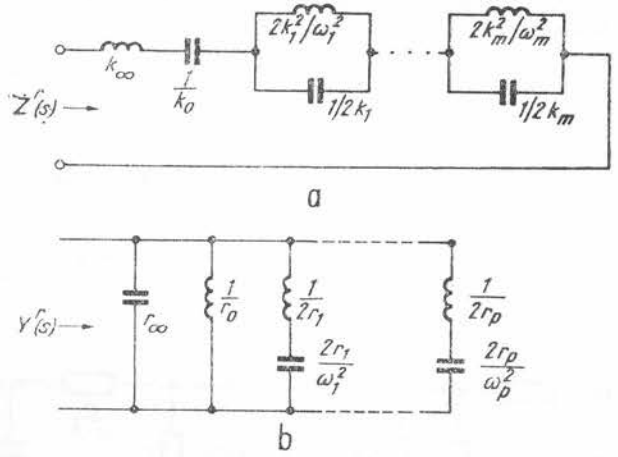


Fig. 4.9. Sinteza imitanțelor de intrare nedisipative.

6.11. **Diporți pasivi; formalisme hibride.** Proprietățile generale asociate multiporților pasivi, prezentate anterior, vor fi detaliate acum pentru $n = 2$, adică pentru diporți. În acest punct ne vom referi la formalismele hibride cu matrice din $M_2(\mathbb{R}(s))$ și vom analiza mai întîi restricțiile impuse asupra matricelor-reziduu. Fie E matricea-reziduu referitoare la un pol fixat pe axa $s = j\omega$,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

Din teorema IV.8 rezultă că $\mathbf{E}$ este hermitică ($\mathbf{E}^* = \mathbf{E}$) și pozitiv semidefinită, fapt ce arată că $\mathbf{E}$ are forma

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_a + jk_b \\ k_a - jk_b & k_{22} \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

cu restricțiile care decurg din faptul că $\mathbf{E} \geqslant 0$:

$$k_{11}, k_{22} \text{ reale și } \geqslant 0\,; \; k_a, k_b \text{ reale și } k_{11}k_{22} - k_a^2 - k_b^2 \geqslant 0. \tag{4.60}$$

Dacă polul este $s = 0$ sau $s = \infty$, atunci $k_b = 0$ așa cum rezultă din teorema IV.8. Restricțiile (4.60) se numesc *condiții de reziduuri*. O consecință a acestora este următoarea: dacă H_{12} are un pol, $k_a + jk_b \neq 0$, acest pol apare atît în elementul H_{11} cît și în elementul H_{22}; în caz contrar am avea $-k_a^2 - k_b^2 \geqslant 0$, deci $k_a = k_b = 0$, ceea ce este absurd. Considerînd partea hermitică a matricei $\mathbf{H}(j\omega)$, adică

$$\begin{bmatrix} H_{11}^a(\omega) & \dfrac{H_{12}^a(\omega) + H_{21}^a(\omega)}{2} + j\,\dfrac{H_{12}^b(\omega) - H_{21}^b(\omega)}{2} \\ \dfrac{H_{12}^a(\omega) + H_{21}^a(\omega)}{2} - j\,\dfrac{H_{12}^b(\omega) - H_{21}^b(\omega)}{2} & H_{22}^a(\omega) \end{bmatrix}$$

unde am notat $H_{pq}(j\omega) = H_{pq}^a(\omega) + jH_{pq}^b(\omega)$, cu H_{pq}^a, H_{pq}^b reale, definite peste tot cu excepția polilor, vor rezulta condițiile

$$H_{11}^a(\omega),\, H_{22}^a(\omega) \geqslant 0\,;$$

$$H_{11}^a(\omega)H_{22}^a(\omega) - \left[\frac{H_{12}^a(\omega) + H_{21}^a(\omega)}{2}\right]^2 - \left[\frac{H_{12}^b(\omega) - H_{21}^b(\omega)}{2}\right]^2 \geqslant 0. \tag{4.61}$$

Condițiile (4.61) sînt de obicei deduse în literatură într-o formă particulară, pentru formalismul de imitanță și se numesc *condiții de rezistență*. Sub forma anterioară, condițiile prezente au valabilitate mai generală. Din (4.61) rezultă următorul fapt: dacă într-un punct $\omega \in \mathbb{R}$ avem

$$[H_{12}^a(\omega) + H_{21}^a(\omega)]^2 + [H_{12}^b(\omega) - H_{21}^b(\omega)]^2 > 0,$$

atunci acest punct nu poate fi un zero atît pentru $H_{11}^a((\omega)$cît și pentru $H_{22}^a(\omega)$.

Remarcăm în trecere că elementele diagonale $H_{11}(s)$ și $H_{22}(s)$ reprezintă imitanțe de intrare de tip pr. Restricțiile asupra localizării zerourilor au loc numai pentru elementele diagonale care sînt de tip pr. În ceea ce privește localizarea zerourilor elementelor nediagonale nu are loc nici o restricție impusă de pasivitate.

Dacă se impune în plus condiția de reciprocitate, condițiile deduse capătă forme particulare, după cum descrierea este de tip imitanță sau de tip hibrid propriu-zis. Pentru formalismul de imitanță, con-

diția de reciprocitate $\mathbf{Z}(s) = \mathbf{Z}'(s)$ se traduce prin $k_b = 0$, $Z_{12}(s) = Z_{21}(s)$. Condițiile (4.60) și (4.61) devin în acest caz:

$$\left.\begin{array}{l} k_{11},\ k_{22},\ k_a \text{ reale};\ k_{11},\ k_{22} \geqslant 0,\ k_{11}k_{22} - k_a^2 \geqslant 0 \\ R_{11}(\omega),\ R_{22}(\omega) \geqslant 0,\ R_{11}(\omega)R_{22}(\omega) - R_{12}^2(\omega) \geqslant 0 \end{array}\right\} \tag{4.62}$$

cu $Z_{pq}(j\omega) = R_{pq}(\omega) + jX_{pq}(\omega)$, unde R_{pq}, X_{pq} sînt reale.

Remarcăm de asemenea că matricele-reziduu pentru diporții pasivi și reciproci sînt reale.

Pentru formalisme de tip hibrid propriu-zis, condiția de reciprocitate $H_{21}(s) = -H_{12}(s)$ se traduce prin $k_a = 0$. Condițiile (4.60) și (4.61) devin în acest caz

$$\left.\begin{array}{l} k_{11},\ k_{22},\ k_b \text{ reale};\quad k_{11},\ \ k_{22} \geqslant 0,\ k_{11}k_{22} - k_b^2 \geqslant 0 \\ H_{11}^a(\omega),\ H_{11}^b(\omega) \geqslant 0,\ H_{11}^a(\omega)H_{22}^a(\omega) - H_{12}^b(\omega)^2 \geqslant 0 \end{array}\right\}. \tag{4.63}$$

Structura canonică a matricei hibride corespunzătoare unui diport fără pierderi este dată, cu notațiile folosite în demonstrația teoremei IV.8, prin formula

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} 0 & n \\ -n & 0 \end{bmatrix} + E_\infty s + \frac{1}{s} E_0 + \sum_{k=1}^{m} \frac{2s\mathbf{P}_k - 2\omega_k \mathbf{Q}_k}{s^2 + \omega_k^2}, \tag{4.64}$$

unde matricele $\mathbf{P}_k$ sînt simetrice și $\geqslant 0$, iar $\mathbf{Q}_k$ antisimetrice.

În formalismul de imitanță matricea constantă (adică primul termen) indică prezența giratoarelor, iar în formalismul hibrid propriu-zis, prezența transformatoarelor ideale.

6.12. **Exemple și completări.** (a) Considerăm un n-port dat în formalismul de repartiție prin matricea $\mathbf{S}(s) = [S_{ki}(s)]_{1 \leqslant k, i \leqslant n}$, adică $\mathbf{B}(s) = \mathbf{S}(s)\mathbf{A}(s)$. Punînd $A_2(s) = A_2(s) = \ldots = A_{i-1}(s) = A_{i+1}(s) = \ldots = A_n(s) = 0$, sistemul de ecuații asociate formalismului se reprezintă prin $B_k(s) = S_{ki}(s) A_i(s)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, de unde $S_{ki}(s) = \dfrac{B_k(s)}{A_i(s)}$. Ținînd seama de faptul că

$$A(s) = \frac{U(s) + R_0 I(s)}{2},\quad B(s) = \frac{U(s) - R_0 I(s)}{2},$$

condiția $A_k(s) = 0$ revine în limbaj electric la $U_k(s) = -R_0 I_k(s)$, adică la poarta k este conectată rezistența (de referință) R_0. Dacă la poarta i este conectat un generator cu rezistența internă R_0, atunci $E_i(s) = U_i(s) + R_0 I_i(s)$, deci $A_i(s) = \dfrac{E_i(s)}{2}$, $B_k(s) = U_k(s)$, deci

$$\frac{U_k(s)}{E_i(s)} = \frac{1}{2} S_{ki}(s). \tag{4.65}$$

Situația este arătată în fig. 4.10.

Așadar $S_{ki}(s)$ reprezintă dublul funcției de transfer de la $E_i(s)$ la $U_k(s)$, sub ipoteza că toate porțile sînt adaptate. Pentru $i = k$ se obține în particular

$$S_{ii}(s) = \frac{U_i(s) - R_0}{U_i(s) + R_0}$$

sau

$$S_{ii}(s) = \frac{Z_i(s) - R_0}{Z_i(s) + R_0},$$

unde $Z_i(s)$ reprezintă impedanța de intrare la poarta i cu toate porțile adaptate (adică au conectate rezistența de referință R_0). Dacă $S_{ii}(s) = 0$, adică $Z_i(s) = R_0$, se spune că multiportul este *adaptat la poarta* i; în particular, un multiport adaptat la toate porțile are toate elementele diagonale nule.

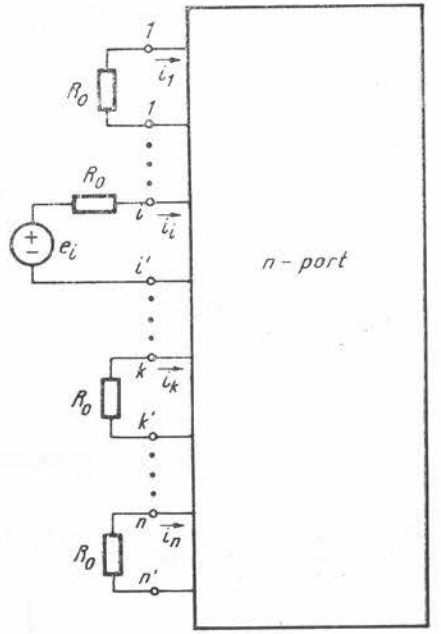


Fig. 4.10. Alimentarea unui multiport în vederea determinării coeficienților S_{ik} ai matricei S.

(b) Considerăm un diport pasiv și nedisipativ. Prin urmare, are loc egalitatea $\mathbf{S}^*(j\omega)\,\mathbf{S}(j\omega) = \mathbf{1}$; pentru matrice finit dimensionale rezultă totodată și $\mathbf{S}(j\omega)\mathbf{S}^*(j\omega) = \mathbf{1}$. Explicitînd aceste două egalități, se obțin relațiile [scriind pentru simplificare S_{pq} în loc de $S_{pq}(j\omega)$]:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1,\ |S_{12}|^2 + |S_{22}|^2 = 1,\ |S_{11}|^2 + |S_{12}|^2 = 1,\ |S_{21}|^2 + |S_{22}|^2 = 1.$$

De aici se deduce că dacă $S_{11}(j\omega) = 0$, adică este realizată adaptarea la poarta 1, atunci $S_{22}(j\omega) = 0$, adică rezultă adaptarea la poarta 2. Acest rezultat este adevărat pentru diporți pasivi nedisipativi, nu neapărat reciproci.

(c) Nu există nici un triport pasiv, nedisipativ, reciproc și adaptat la toate porțile. Într-adevăr, dacă ar exista un astfel de triport, ar rezulta $S_{ii} = 0$ și scriind că $\mathbf{D}(j\omega) = \mathbf{1}$, se obține relația matriceală

$$\begin{bmatrix} 1 - |S_{12}|^2 - |S_{13}|^2 & \bar{S}_{13}S_{23} & S_{12}S_{23} \\ S_{13}\bar{S}_{23} & 1 - |S_{12}|^2 - |S_{23}|^2 & \bar{S}_{12}S_{13} \\ S_{12}\bar{S}_{23} & S_{12}\bar{S}_{13} & 1 - |S_{13}|^2 - |S_{23}|^2 \end{bmatrix} = 0.$$

Rezultă mai întîi că elementele nediagonale trebuie să fie nule, adică $S_{12} = S_{13} = S_{23} = 0$. Pe de altă parte, elementele diagonalei principale egalate cu zero implică egalitățile $|S_{12}|^2 = |S_{13}|^2 = |S_{23}|^2 = \frac{1}{2}$ și se obține o contradicție. Trebuie remarcat că dacă matricele ar fi infinit dimensionale (adică cadrul adoptat este cel al spațiilor Hilbert infinit dimensionale), atunci rezultatele de la punctele b) și c) se modifică.

Remarcăm de asemenea că există triporți nedisipativi, dar nereciproci. Exemplul tipic este *circulatorul* (folosit în tehnica microundelor), descris prin matricea constantă

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \text{ evident } \mathbf{S}'\mathbf{S} = 1.$$

(d) Un sistem fizic pentru care formalismul de repartiție este mai sugestiv este constituit de o linie electrică lungă, de lungime l. Ecuațiile unei asemenea linii, privită ca diport, sînt

$$U_1(s) = U_2(s) \operatorname{ch}(as) + I_2(s) R_0 \operatorname{sh}(as),$$

$$I_1(s) = I_2(s) \operatorname{ch}(as) + \frac{U_2(s)}{R_0} \operatorname{sh}(as),$$

unde a este o constantă reală, $a > 0$, iar R_0 impedanța caracteristică a liniei. Luînd ca rezistență de referință impedanță caracteristică, se obține

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-as} \\ e^{-as} & 0 \end{bmatrix}.$$

În acest caz, după un calcul simplu, se obține

$$\mathbf{D}(s) = \mathbf{1} - \mathbf{S}^*(s)\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} 1 - e^{-2a\alpha} & 0 \\ 0 & 1 - e^{-2a\alpha} \end{bmatrix}, \text{ punînd } s = \alpha + j\omega.$$

Rezultă că matricea $\mathbf{S}(s)$ este de tip PR, deși nu face parte din clasa $M_2(\mathbb{R}(s))$. Matricea $\mathbf{D}(s)$ are ca limită pentru $\alpha \to 0$, $\alpha > 0$ matricea nulă, deci sistemul este fără pierderi.

e) Considerăm o matrice de tip hibrid

$$\mathbf{H}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{s}{s^2+1} & \dfrac{1 - sR_0}{s^2+1} \\ \dfrac{-1 - sR_0}{s^2+1} & 1 + s + \dfrac{R_0^2 + 1}{s^2+1} \end{bmatrix},$$

unde R_0 este o constantă reală și pozitivă. Pentru $s = \infty$ avem

$$\mathbf{E}_\infty = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

iar pentru $s = j$ avem

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{R_0}{2} - \dfrac{1}{2}j \\ -\dfrac{R_0}{2} + \dfrac{1}{2}j & \dfrac{1 + R_0^2}{2} \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Un calcul simplu arată că în acest caz sînt îndeplinite condițiile de rezistență (4.61).

f) Fie diportul electric indicat în fig. 4.11. În acest caz, $Z_0(s)$ este o funcție de tip pr. Matricea de imitanță $\mathbf{Z}(s)$ se scrie direct:

$$\mathbf{Z}(s) = \begin{bmatrix} Z_0(s) & Z_0(s) - R_0 \\ Z_0(s) + R_0 & Z_0(s) \end{bmatrix}.$$

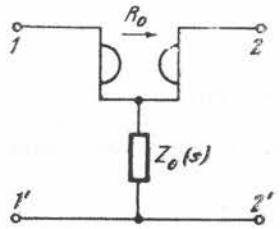


Fig. 4.11. Diport adaptat la ambele porți de tip trece-tot.

Trecînd la matricea $S(s)$ prin relațiile arătate în teorema IV.11, se obține

$$\mathbf{S}(s) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{Z_0(s) - R_0}{Z_0(s) + R_0} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculînd matricea de disipație $\mathbf{D}(s)$, se găsește

$$\mathbf{D}(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{(Z_0(-s) - R_0)(Z_0(s) - R_0)}{(Z_0(-s) + R_0)(Z_0(s) + R_0)} \end{bmatrix}.$$

De aici rezultă că dacă $Z_0(s) = -Z_0(-s)$, adică $Z_0(s)$ corespunde unui uniport fără pierderi, atunci $\mathbf{D}(s) = \mathbf{1}$, deci diportul ar fi fără pierderi; în plus sistemul este adaptat la cele două porți, are funcția de transfer $S_{12}(s) = \dfrac{Z_0(s) - R_0}{Z_0(s) + R_0}$ și constituie ceea ce se numește o *rețea trece-tot*.

6.13. Multiporți rezolubili. Dăm o extindere a rezultatelor anterioare, subliniind mai pregnant cadrul distribuțional natural al teoriei rețelelor. Fie un n-port (electric) $P \subset \mathscr{U} \times \mathscr{I}$, în care tensiunile și

curenții sînt funcții vectoriale cu toate cele $2n$ componente din $\mathscr{D}_+ \cap L_2$ (conform cu 3.1). Multiportul P se numește *rezolubil* dacă $(\forall)\mathbf{e} \in \mathscr{D}_+^n$ există o pereche unică $(\mathbf{u}, \mathbf{i}) \in P$ astfel încît $\mathbf{e} = \mathbf{u} + \mathbf{i}$. La punctul 3.1, a) a fost definit un diport rezolubil. Dacă P este liniar, pasiv și rezolubil, atunci se poate defini o aplicație liniară $\theta : \mathscr{D}_1^n \to \mathscr{D}_1'^n$, $\mathbf{e} \mapsto \mathbf{i}$, care în plus este continuă (într-adevăr, dacă $e_k \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$ și $e_k = u_k + i_k$, atunci $\|e_k\|^2 = \|u_k\|^2 + \|i_k\|^2 + 2\langle u_k, i_k\rangle$ și din ipoteza de pasivitate avem $\langle u_k, i_k\rangle \geqslant 0$, deci $\|i_k\| \leqslant \|e_k\|$, adică $i_k \xrightarrow{L_2} 0$, deci $\theta(e_k) \xrightarrow{\mathscr{D}'} 0$). Conform teoremei nucleelor distribuționale a lui L. Schwartz (reamintită în 5.2), există un nucleu distribuțional $\mathbf{K} = \mathbf{K}(t, \tau)$ astfel ca $\theta(\mathbf{e}) = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}$, adică $\mathbf{i} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{e}$, $(\forall)\mathbf{e} \in \mathscr{D}_1^n$. ($\mathscr{D}_1'$ este spațiul distribuțiilor cu suport pozitiv.) Deoarece $\mathbf{e} = \mathbf{u} + \mathbf{i}$ și $\delta \cdot \mathbf{e} = \mathbf{e}$, rezultă că $\mathbf{u} = (\delta \mathbf{1}_n - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{e}$, de unde

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = (\delta \mathbf{1}_n - \mathbf{K}) \cdot \mathbf{i}. \tag{4.66}$$

Notînd $\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{u} + \mathbf{i}}{2}$, $\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{u} - \mathbf{i}}{2}$ (numite uneori tensiunile *incidentă* și respectiv *reflectată*), rezultă din (4.66) relația

$$\mathbf{b} = (\delta \mathbf{1}_n - 2\mathbf{K}) \cdot \mathbf{a}. \tag{4.67}$$

Matricea $\mathbf{S}(t, \tau) = \delta \mathbf{1}_n - 2\mathbf{K}$ este tocmai matricea de repartiție a multiportului, definită în 3.3 și cum $\mathbf{b} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{a}$, matricea $\mathbf{S}$ apare ca nucleul distribuțional asociat aplicației liniare continue $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$, ca operator al spațiului $(\mathscr{D}_1 \cap L_2)^n$.

În general, dacă $\mathbf{K}_1$ și $\mathbf{K}_2$ sînt două nuclee distribuționale astfel încît $(\forall)x \in \mathscr{D}_1^n$ să rezulte $\mathbf{K}_1 \circ \mathbf{x} \in \mathscr{D}_1^n$, se poate defini un nucleu distribuțional compus $\mathbf{K}_1 \circ \mathbf{K}_2$ prin

$$(\mathbf{K}_1 \circ \mathbf{K}_2)(t, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_1(t, u)\, \mathbf{K}_2(u, \tau)\, du.$$

Această operație este asociativă, are $\delta \mathbf{1}_n$ ca element neutru și, în plus, $(\mathbf{K}_1 \circ \mathbf{K}_2) \circ \mathbf{x} = \mathbf{K}_1 \circ (\mathbf{K}_2 \circ \mathbf{x})$, $(\forall)\mathbf{x} \in \mathscr{D}_+^n$.

Dacă $\delta \mathbf{1}_n - \mathbf{K}$ are invers relativ la operația anterioară, atunci $\mathbf{Y} = (\delta \mathbf{1}_n - \mathbf{K})^{-1} \circ \mathbf{K}$ se numește *matrice de impedanță*, iar dacă $\mathbf{K}$ are invers, atunci $\mathbf{Z} = \mathbf{K}^{-1} \circ (\delta \mathbf{1}_n - \mathbf{K})$ se numește *matrice de admitanță*. În condiții ușor de descris [1], dacă se cunoaște oricare din matricele de distribuții $\mathbf{S}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{K}$, se pot determina celelalte

trei, fapt utilizat sistematic în paragrafele anterioare; de exemplu, dacă $\delta \mathbf{1}_n + \mathbf{S}$, $\delta \mathbf{1}_n - \mathbf{S}$ sînt inversabile, atunci

$$\mathbf{Y} = (\delta \mathbf{1}_n - \mathbf{S}) \circ (\delta \mathbf{1}_n + \mathbf{S})^{-1}, \mathbf{Z} = (\delta \mathbf{1}_n + \mathbf{S}) \circ (\delta \mathbf{1}_n - \mathbf{S})^{-1} \text{ și } \mathbf{K} = \frac{1}{2}\delta(\mathbf{1}_n - \mathbf{S}).$$

De exemplu pentru un inductor uniport, variabil în timp, descris prin $u = (L(t)i)' = L'i + Li'$, se obține $Z(t, \tau) = L(t)\delta'(t - \tau) + L'(t)\delta(t - \tau)$, $Y(t, \tau) = \dfrac{1}{L(t)}\sigma(t - \tau)$ și $S(t, \tau) = \delta(t - \tau) - \dfrac{2}{L(t)}\psi(t)\,\sigma(t - \tau)$, unde $\psi(t) = \exp\left(-\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{dt}{L(t)}\right) \exp\left(\displaystyle\int_{t_0}^{\tau} \frac{dt}{L(t)}\right)$.

Se poate arăta că inductorul este pasiv $\rightleftarrows L(t) \geqslant 0, L'(t) \geqslant 0$ pentru orice t și că este fără pierderi $\rightleftarrows L$ este o constantă pozitivă [1]. Se poate întîmpla ca $\mathbf{S}$ să existe, fără ca $\mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ să existe; de exemplu, pentru transformatorul ideal diport descris prin

$$\begin{bmatrix} 1 & -\varphi(t) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \cdot \begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \varphi(t) & 1 \end{bmatrix} \delta(t - \tau) \cdot \begin{bmatrix} i_1(\tau) \\ i_2(\tau) \end{bmatrix},$$

unde $S(t, \tau) = \dfrac{\delta(t - \tau)}{\varphi(t)^2 + 1} \begin{bmatrix} \varphi(t)^2 - 1 & 2\varphi(t) \\ 2\varphi(t) & 1 - \varphi(t)^2 \end{bmatrix}$.

Pentru multiporți rezolubili se poate reformula criteriul de pasivitate cuprins în teorema IV.4: un n-port liniar rezolubil P este pasiv dacă și numai dacă există o matrice pătrată $S(t, \tau)$ de ordin n pasivă [adică $S(t, \tau) = 0$ pentru $t < \tau$, $\mathbf{S}$ definește un operator al lui L_2^n cu norma $\|\mathbf{S}\| \leqslant 1$ și, în plus, $\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$, adică pentru orice $(\mathbf{u}, \mathbf{i}) \in P$, avem $\mathbf{S} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{i}) = \mathbf{u} - \mathbf{i}$]. Ca o consecință, se arată că dacă $\mathbf{S}_1$, $\mathbf{S}_2$ sînt două matrice pasive, atunci $\mathbf{S}_2 \circ \mathbf{S}_1$ are aceeași proprietate. Se poate de asemenea arăta că dacă P este un n-port liniar pasiv rezolubil și $\mathbf{S}$ este o matrice pasivă asociată, atunci $\mathbf{P}$ este fără pierderi dacă și numai dacă $\mathbf{S}^a \circ \mathbf{S} = \delta \mathbf{1}_n$, unde $\mathbf{S}^a$ este adjuncta lui $\mathbf{S}$, i.e. $\mathbf{S}^a(t, \tau) = \mathbf{S}(\tau, t)'$; în acest caz, avem $\|\mathbf{S}\| = 1$, dar reciproca este falsă [de exemplu, un rezistor cu rezistența

$$R(t) = e^{-\frac{1}{t^2} - \frac{1}{(t-1)^2}}\, \sigma(t)\, \sigma(1 - t)$$

este disipativ, deși matricea $\mathbf{S}$ asociată, adică $\mathbf{S}(t, \tau) = \dfrac{R(t) - 1}{R(t) + 1}\delta(t - \tau)$,

are norma $\|\mathbf{S}\| = 1$]. În cazul invariant în timp, condiția $\mathbf{S}^a \circ \mathbf{S} = \delta \mathbf{1}_n$ revine la $\mathbf{S}^a * \mathbf{S} = \delta \mathbf{1}_n$ și luînd transformata Laplace, $\mathbf{S}(-s)'\mathbf{S}(s) = 1$, așa cum s-a văzut în 6.6. Ca un faptnotabil, subliniem că prin interconectare de elemente de circuit fără pierdere, pot fi obținute totuși rețele disipative [1].

În general, se poate arăta că pentru o rețea electrică liniară, pasivă și rezolubilă, tensiunea incidentă $\mathbf{a}(t)$ și tensiunea reflectată $\mathbf{b}(t)$ satisfac o ecuație diferențială de forma $\mathbf{A}(p, t)\,\mathbf{b}(t) = \mathbf{B}(p, t)\,\mathbf{a}(t)$, unde $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ sînt matrice polinomiale în operatorul $p = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, iar matricea $\mathbf{S}$ asociată este de forma $\mathbf{S}(t, \tau) = \mathbf{C}(t)\,\delta(t - \tau) + \mathbf{D}(t)\,\sigma(t - \tau)$, unde $\mathbf{C}$ și $\mathbf{D}$ sînt matrice cu elementele funcții de clasă C^∞. Deoarece $\mathbf{S} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$, matricea $\mathbf{S}(t, \tau)$ poate fi interpretată ca răspunsul-impuls al sistemului $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{b}$.

§ 7. Valori frontieră ale funcțiilor olomorfe și aplicații

Așa cum am mai menționat, presupunerea că intrările, ieșirile, funcția Green etc. ale unui sistem ar fi funcții uzuale, este restrictivă pentru multe aplicații fizice, iar utilizarea distribuțiilor este indispensabilă. În studiul sistemelor liniare, conceptul de răspuns-impuls are un rol important și, în plus, în cazul sistemelor invariante în timp, tehnicile Laplace și Fourier sînt utilizate în mod esențial. O proprietate fundamentală în acest sens este olomorfia transformatei Laplace, prin care valorile frontieră ale acesteia sînt suficiente pentru determinarea valorilor globale (ca în cazul formulei integrale Cauchy). Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este o funcție continuă dată, în general nu există nici o funcție olomorfă $F(s)$, $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ astfel încît $F(t) = f(t)$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$. Are loc rezultatul cunoscut [5]: dacă f este continuă, atunci există o funcție olomorfă $F : \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} f \to \mathbb{C}$ astfel încît saltul $F(t + \mathrm{j}\varepsilon) - F(t - \mathrm{j}\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, la traversarea axei reale să aibă limită, egală cu $f(t)$, cînd $\varepsilon \to 0$. Anume, funcția F este construită cu ajutorul integralei Cauchy,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{t - z}\,\mathrm{d}t.$$

Aceasta sugerează următoarea definiție.

7.1. **Definiție.** Fie $f \in \mathscr{E}'$ o distribuție cu suport compact, $K = \operatorname{supp} f$. Se numește *reprezentarea Cauchy a lui f* funcția complexă

$$\hat{f} : \mathbb{C} \setminus K \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \left\langle f(t),\ \frac{1}{t - z} \right\rangle. \tag{4.68}$$

Funcția $2\pi\mathrm{j}\hat{f}$ se numește *transformata Hilbert a distribuției f*.

Teorema IV.13. *Pentru orice distribuție $f \in \mathscr{E}'$, funcția $\hat{f}$ este olomorfă în $\mathbb{C} \setminus K$.*

Demonstrație. Evident, $\dfrac{1}{t - z}$ este funcție din $\mathscr{E} = \mathrm{C}^\infty$ (ca funcție de t) pentru orice z cu $\operatorname{Im} z \neq 0$. Deoarece $\dfrac{1}{h}\left(\dfrac{1}{t - z - h} - \dfrac{1}{t - z}\right)$ tinde în $\mathscr{E}$ către $\dfrac{1}{(t - z)^2}$ pentru $h \to 0$, rezultă că limita

$$\lim_{h \to 0} \frac{\hat{f}(z + h) - \hat{f}(z)}{h} = \lim_{h \to 0} \left\langle f(t),\ \frac{1}{h}\left(\frac{1}{t - z - h} - \frac{1}{t - z}\right) \right\rangle$$

există și deci funcția $\hat{f}(z)$ este olomorfă în orice punct z cu $\operatorname{Im} z \neq 0$; în plus

$$\hat{f}(z)' = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \left\langle f(t),\ \frac{1}{(t - z)^2} \right\rangle = f'(z)\hat{}\,.$$

Rămîne de probat că $\hat{f}$ este olomorfă în punctele reale care nu aparțin lui $K = \operatorname{supp} f$. Alegem o funcție-test $\varphi \in \mathscr{D}$ egală cu 1 în vecinătatea lui K. Atunci $\left\langle f(t), \dfrac{1}{t - z} \right\rangle = \left\langle f(t), \dfrac{\varphi(t)}{t - z} \right\rangle$ și dacă $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \operatorname{supp} \varphi$ este fixat, iar z tinde către x_0, atunci $\dfrac{\varphi(t)}{t - z} \xrightarrow{\mathscr{E}} \dfrac{\varphi(t)}{t - x_0}$, deci $\lim\limits_{z \to x_0} \hat{f}(z) = \dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}} \left\langle f(t), \dfrac{\varphi(t)}{t - x_0} \right\rangle$, deci $\hat{f}$ este olomorfă în x_0. Totodată se obține că $\hat{f}(z)^{(k)} = f^{(k)}(z)\hat{}\, = \dfrac{k!}{2\pi\mathrm{j}} \left\langle f(t), \dfrac{1}{(t - z)^{k+1}} \right\rangle$, pentru orice $k \geqslant 1$ și $(\forall) z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} f$.

Corolar. *Fie $f \in \mathscr{E}'$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, avem*

$$\hat{f}(t + \mathrm{j}\varepsilon) - \hat{f}(t - \mathrm{j}\varepsilon) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ pentru } |t| \to \infty. \quad (4.69)$$

Demonstrație. Observăm mai întîi că dacă $z \to \infty$, atunci $\hat{f}(z) \to 0$ [alegînd $\varphi \in \mathscr{D}$ egală cu 1 în vecinătatea lui $K = \operatorname{supp} f$ și $\frac{\varphi(t)}{t - z} \xrightarrow{\mathscr{E}} 0$ pentru $z \to \infty$]. Dezvoltarea Laurent a funcției olomorfe $\hat{f}$ în jurul punctului ∞ va fi atunci de forma $\hat{f}(z) = \frac{c_1}{z} + \frac{c_2}{z^2} + \ldots$ și $\hat{f}(z) - \hat{f}(\bar{z}) = -\frac{2\mathrm{j}c_1 \operatorname{Im} z}{|z|^2} + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$ pentru $z \to \infty$, de unde rezultă corolarul.

Un rezultat clasic din teoria funcțiilor armonice afirmă că dacă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție din $\mathscr{E}$ cu toate derivatele mărginite, atunci funcția complexă

$$\Phi(z) = \frac{|\operatorname{Im} z|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(t)}{|t - z|^2}\, \mathrm{d}t \quad (4.70)$$

este armonică în $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și $\Phi(t + \mathrm{j}\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, converge în sensul lui $\mathscr{E}$ către $\varphi(t)$ pentru $\varepsilon \to 0$ [în particular, funcția Φ rezolvă problema Dirichlet pentru semiplanul superior sau inferior cu φ dată la frontiera $\mathbb{R} = \{\operatorname{Im} z = 0\}$ a acestui domeniu]. Folosind acest rezultat, vom demonstra

Lema 3. *Fixăm $f \in \mathscr{E}'$. Dacă $\varphi \in \mathscr{E}$ este o funcție mărginită împreună cu toate derivatele, atunci*

$$\lim_{\varepsilon \to 0,\ \varepsilon > 0} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}(t + \mathrm{j}\varepsilon) - \hat{f}(t - \mathrm{j}\varepsilon)]\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \langle f, \varphi \rangle. \quad (4.71)$$

Demonstrație. Integrala improprie din membrul întîi există conform cu (4.69). Fie

$$g(z) \overset{\text{not}}{=} (\operatorname{sgn} y)\ (\hat{f}(z) - \hat{f}(\bar{z})) = \frac{|y|}{\pi} \left\langle f(t),\ \frac{1}{|t - z|^2} \right\rangle,\ y = \operatorname{Im} z.$$

Conform relației (4.70), rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t + \mathrm{j}\varepsilon)\, \varphi(t)\, \mathrm{d}t = \langle f(t), \Phi(t + \mathrm{j}\varepsilon) \rangle,\ (\forall)\varepsilon > 0.$$

Făcînd $\varepsilon \to 0$ și ținînd seama că $g(t + \mathrm{j}\varepsilon) = \hat{f}(t + \mathrm{j}\varepsilon) - \hat{f}(t - \mathrm{j}\varepsilon)$ și că $\Phi(t + \mathrm{j}\varepsilon) \xrightarrow{\mathscr{E}} \varphi(t)$, se obține relația din enunț.

Conceptul de reprezentare Cauchy se poate extinde la anumite clase de distribuții temperate cuprinzînd σ, polinoamele etc. [5]; pentru orice funcție $f \in L_2$, reprezentarea Cauchy este

$$\hat{f}(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \frac{1}{t - z}\, \mathrm{d}t.$$

Ca o consecință a lemei 3, se obține

Teorema IV.14. *Pentru orice distribuție $f \in \mathscr{E}'$ există o funcție olomorfă (neunică) $\hat{f} : \mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} f \to \mathbb{C}$, numită valoare frontieră a lui f, astfel încît notînd $\hat{f}_\varepsilon(t) = \hat{f}(t + \mathrm{j}\varepsilon) - \hat{f}(t - \mathrm{j}\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, să rezulte că*

$$\hat{f}_\varepsilon \overset{\mathscr{D}'}{\to} f \text{ pentru } \varepsilon \to 0.$$

Neunicitatea rezultă observînd că pentru orice funcție întreagă H avem $H_\varepsilon(t) \overset{\mathscr{D}'}{\to} 0$ pentru $\varepsilon \to 0$, deci $(\hat{f} + H)_\varepsilon \overset{\mathscr{D}'}{\to} f$ pentru $\varepsilon \to 0$.

7.2. **Exemple.** a) Considerăm distribuția Dirac δ, care aparține lui $\mathscr{E}'$. Folosind (4.68), reprezentarea Cauchy a lui δ este funcția complexă $\hat{\delta} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, definită prin

$$\hat{\delta}(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \left\langle \delta(t),\ \frac{1}{t - z} \right\rangle = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \cdot \frac{1}{t - z}\bigg|_{t=0} = -\frac{1}{2\pi\mathrm{j}z}. \quad (4.72)$$

De asemenea $\hat{\delta}^{(k)}(z) = \delta^{(k)}\hat{(z)} = (-1)^{k+1} \cdot \frac{k!}{2\pi\mathrm{j}z^{k+1}}$. Se remarcă faptul că $\hat{\delta}(t + \mathrm{j}\varepsilon) - \hat{\delta}(t - \mathrm{j}\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{\pi(t^2 + \varepsilon^2)}$, $t \in \mathbb{R}$ nu este funcție cu suport compact și totuși are loc formula (4.71), dar nu pentru orice $\varphi \in \mathscr{E}$.

b) Fie $\delta_+ = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2\pi j}\,\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right)$ și $\delta_- = \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2\pi j}\,\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right)$. Atunci $(\forall)\varphi \in \mathcal{D}$ avem

$$\langle \delta_+, \varphi\rangle = \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2\pi j}\,\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t}\,dt = -\lim_{\varepsilon\to 0,\,\varepsilon>0}\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{t+j\varepsilon}\,dt$$

și observînd că

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{t+j\varepsilon}\cdot\frac{1}{t-z}\,dt = \begin{cases}\dfrac{1}{z+j\varepsilon}, & \text{dacă } \operatorname{Im} z > 0,\\ 0, & \text{dacă } \operatorname{Im} z < 0,\end{cases}$$

ceea ce se deduce din formula integrală a lui Cauchy, se obține

$$\hat{\delta}_+(z) = \begin{cases}-\dfrac{1}{2\pi j z}, & \text{dacă } \operatorname{Im} z \geqslant 0,\\ 0, & \text{dacă } \operatorname{Im} z < 0,\end{cases}$$

și similar,

$$\hat{\delta}_-(z) = \begin{cases}0, & \text{dacă } \operatorname{Im} z > 0,\\ -\dfrac{1}{2\pi j z}, & \text{dacă } \operatorname{Im} z < 0.\end{cases}$$

Deoarece $\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right) = -\pi j(\delta_+ - \delta_-)$, rezultă

$$\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right)^{\wedge}(z) = \begin{cases}\dfrac{1}{2z}, & \text{dacă } \operatorname{Im} z > 0,\\ -\dfrac{1}{2z}, & \text{dacă } \operatorname{Im} z < 0.\end{cases} \tag{4.73}$$

c) Am văzut că pentru orice $f \in L_{-2}$ se poate defini transformata sa Hilbert

$$H_f = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{VP}\left(\frac{1}{t}\right) * f \qquad \text{(conform cu II.9.2).}$$

Așadar, $H_f = -j(\delta_+ - \delta_-)*f$. Dacă $\delta_-*f = 0$ (ceea ce are loc de exemplu dacă f este valoare frontieră a unei funcții olomorfe în semiplanul superior), atunci cum $\delta = \delta_+ + \delta_-$, rezultă $\delta_+*f = f$ și astfel f satisface ecuația $H_f = jf$.

7.3. **Hiperfuncții.** Teorema IV.14 se poate enunța spunînd că orice distribuție cu suport compact ($f \in \mathcal{E}'$) este valoarea la frontieră, în sensul convergenței în $\mathcal{D}'$, a unei funcții olomorfe (anume a reprezentării Cauchy F). Matematicianul japonez M. Sato a avut ideea de a studia în sine o clasă de „funcții generalizate" care apar ca valori frontieră ale funcțiilor olomorfe, pe care le-a numit hiperfuncții. Se numește *hiperfuncție* pe $\mathbb{R}$ orice funcție olomorfă pe $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, cu convenția de a identifica orice două astfel de funcții olomorfe care diferă printr-o funcție întreagă. Notînd, pentru orice deschis U din planul complex, cu $\mathcal{O}(U)$ spațiul vectorial complex al funcțiilor olomorfe $U\to\mathbb{C}$, mulțimea hiperfuncțiilor pe $\mathbb{R}$ este tocmai spațiul cît

$$\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \mathcal{O}(\mathbb{C}\setminus\mathbb{R})/\mathcal{O}(\mathbb{C}),$$

observînd că $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ este tocmai mulțimea funcțiilor întregi. Sato a găsit de asemenea definiția bună a valorilor frontieră ale funcțiilor olomorfe de mai multe variabile, apelînd la noțiunea de grup de coomologie [22, 2].

În cele ce urmează, vom sublinia cîteva proprietăți ale hiperfuncțiilor în cazul unidimensional. Pentru un deschis $U \subset \mathbb{R}$ se definește $\mathcal{H}(U) = \mathcal{O}(Z\setminus U)/\mathcal{O}(Z)$, unde $Z \subset \mathbb{C}$ este un deschis astfel încît U este închis în Z [se arată imediat că $\mathcal{H}(U)$ este independent de alegerea lui Z].

Elementele lui $\mathcal{H}(U)$ se numesc *hiperfuncții pe* U; așadar, orice hiperfuncție $f(x)$, $f \in \mathcal{H}(U)$, se reprezintă astfel: se alege o funcție olomorfă $\varphi(z)$ în $Z\setminus U$ și atunci $f = \hat{\varphi} \bmod \mathcal{O}(Z)$; se mai scrie $f(x) = \widehat{\varphi(z)}|_{z=x}$.

Pentru orice deschiși $V \subset U$ din $\mathbb{R}$ se definește în mod natural o aplicație de restricție $\rho : \mathcal{H}(U)\to\mathcal{H}(V)$; anume, pentru orice $\hat{\varphi} \in \mathcal{H}(U)$ cu φ funcție olomorfă pe $Z\setminus U$, se alege un deschis W din $\mathbb{C}$, unde V este închis, astfel încît $W\setminus V \subset Z\setminus U$ și punem $\rho(\hat{\varphi}) = \varphi|_{V\setminus W} \bmod \mathcal{O}(W)$. Orice aplicație de restricție este surjectivă [deoarece pentru $f \in \mathcal{H}(V)$, $f = \hat{\psi}$, $D = Z\setminus(U\setminus V)$ este o vecinătate complexă a lui V, iar ψ este olomorfă în $D\setminus U$ și definește o hiperfuncție pe U, a cărei restricție la V este tocmai f]. Faptul că orice hiperfuncție se extinde la orice deschis mai mare este un fapt remarcabil, distribuțiile neavînd o astfel de proprietate.

Este clar ce înseamnă hiperfuncții egale și cum se adună hiperfuncțiile. Orice hiperfuncție $f \in \mathcal{H}(U)$, $f = \hat{\varphi}$, se poate înmulți cu o funcție α analitică reală pe U, anume $\alpha f = \widehat{\alpha_1\varphi}$, unde α_1 este o funcție olomorfă pe o vecinătate complexă a lui U care prelungește α. Orice

hiperfuncție $f = \hat{\varphi}$ din $\mathscr{H}(U)$ poate fi derivată, anume $f' = \hat{\varphi}'$, derivînd reprezentantul.

Notăm

$$\sigma_+(z) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \operatorname{Im} z > 0, \\ 0, & \text{dacă } \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \qquad \sigma_-(z) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } \operatorname{Im} z > 0, \\ -1, & \text{dacă } \operatorname{Im} z < 0. \end{cases}$$

Cum $\sigma_+ - \sigma_-$ se prelungește olomorf la $\mathbb{C}$ (anume la funcția constantă 1), se definește hiperfuncția $1 = \hat{\sigma}_+ = \hat{\sigma}_-$ pe întreg $\mathbb{R}$. Atunci pentru orice funcție analitică α pe un deschis $U \subset \mathbb{R}$ se poate asocia o hiperfuncție $\alpha \cdot 1 = \widehat{\alpha_1 \cdot \sigma_+}$; asocierea $\alpha \mapsto \alpha \cdot 1$ este injectivă și permite identificarea funcțiilor analitice pe U cu hiperfuncțiile asociate.

Putem acum da un sens precis conceptului de valoare frontieră. Fixăm $\varphi \in \mathscr{O}(Z \setminus U)$ și notăm

$$\varphi(x + \mathrm{j}\cdot 0) \overset{\Delta}{=} \widehat{\varphi \cdot \sigma_+} \text{ și } \varphi(x - \mathrm{j}\cdot 0) \overset{\Delta}{=} \widehat{\varphi \cdot \sigma_-}, \tag{4.74}$$

numite *valoarea frontieră a lui* φ *superioară* (și respectiv *inferioară*), iar hiperfuncția $\varphi(x + \mathrm{j}\cdot 0) - \varphi(x - \mathrm{j}\cdot 0) = \hat{\varphi} \bmod \mathscr{O}(Z)$ se numește *saltul lui* φ.

Un concept util este cel de integrală a unei hiperfuncții cu suport compact; fie $f = \hat{\varphi} \in \mathscr{H}(U)$, nulă în afara unui compact $K \subset U$. Atunci φ este olomorfă în $Z \setminus K$ [într-adevăr, dacă $x \in U \setminus K$, atunci există o vecinătate $V \subset U$ a lui x astfel încît $f|V = 0$. Dacă $W \subset Z$ este o vecinătate complexă a lui V astfel încît $W \setminus V \subset Z \setminus U$, atunci $f|V$ este definită prin $\varphi|W \setminus V$ și deci φ este olomorfă în W, adică $\varphi \in \mathscr{O}(Z \setminus K)$]. Se definește atunci

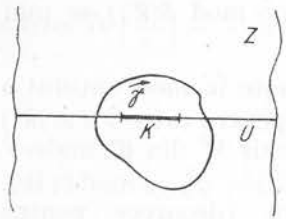


Fig. 4.12. Figurarea conturului γ din formula (4.75).

$$\int_U f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\Delta}{=} \int_\gamma \varphi(z)\,\mathrm{d}z, \tag{4.75}$$

unde γ este un contur închis în $Z \setminus K$, care înconjoară K o singură dată, parcurs negativ (fig. 4.12). Folosind teorema lui Cauchy, definiția este independentă de alegerea lui φ și γ.

7.4. **Exemple de hiperfuncții.** a) Hiperfuncția lui Dirac este definită pe $\mathbb{R}$ prin $\delta = \hat{\varphi}$, unde $\varphi(z) = -\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j} z} \in \mathscr{O}(\mathbb{C} \setminus \{0\})$. Suportul lui δ este compactul $K = \{0\}$. Derivata $\delta^{(n)}$ este asociată lui $\varphi^{(n)}(z)$, $n \geqslant 1$. Integrala lui δ pe $\mathbb{R}$ este conform cu (4.75)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\cdot\cdot} -\frac{1}{2\pi \mathrm{j} z}\,\mathrm{d}z$$

și alegînd γ ca fiind cercul $|z| = 1$, $z = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$, $\theta \in [-\pi, \pi)$, se obține

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1;$$

mai general, dacă $U \subset \mathbb{R}$ este un deschis oarecare care conține originea și dacă $a(x)$ este o funcție analitică în U, atunci

$$\int_U a(x)\,\delta(x)\,\mathrm{d}x = a(0),$$

ceea ce constituie analogul formulei de filtrare (2.5).

Pe de altă parte, conform cu (4.74) pentru $\varphi(z) = -\dfrac{1}{2\pi \mathrm{j} z}$, se obține

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \left(\frac{1}{x + \mathrm{j}\cdot 0} - \frac{1}{x - \mathrm{j}\cdot 0} \right).$$

Se pot defini de asemenea hiperfuncțiile

$$\operatorname{VP} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x + \mathrm{j}\cdot 0} + \frac{1}{x - \mathrm{j}\cdot 0} \right), \quad \delta_+(x) = \frac{1}{2}\,\delta(x) - \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \operatorname{VP} \frac{1}{x},$$

$$\delta_-(x) = \frac{1}{2}\,\delta(x) + \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \operatorname{VP} \frac{1}{x};$$

în particular, se regăsesc formulele lui Sohoțki (II. 4.5)

$$\frac{1}{x \pm \mathrm{j}\cdot 0} = \operatorname{VP} \frac{1}{x} \mp \mathrm{j}\pi\delta(x).$$

b) Am văzut că orice funcție analitică se poate asimila cu o hiperfuncție. Arătăm că orice distribuție cu suport compact are aceeași proprietate. Dacă $f \in \mathscr{E}'$, atunci funcția $\varphi(z) = \dfrac{1}{2\pi \mathrm{j}} \left\langle f(t), \dfrac{1}{t - z} \right\rangle$ este olomorfă în $\mathbb{C} \setminus \operatorname{supp} f$ (conform teoremei IV.13).

Asocierea $f \mapsto \hat{\varphi}$ este injectivă și permite identificarea distribuției f cu hiperfuncția $\hat{\varphi}$ pe $\mathbb{R}$. Așadar, hiperfuncțiile extind distribuțiile, fără a mai fi definite ca funcționale; apare posibilitatea de înmulțire a distribuțiilor și de extindere a conceptului de soluție pentru operatorii diferențiali. De asemenea, limbajul hiperfuncțiilor este utilizat în mecanica cuantică (*S*-matrice, cauzalitatea etc.).

7.5. **Aplicații ale valorilor frontieră.** a) *Sisteme liniare cauzale și olomorfie.* În general, pentru un sistem liniar, continuu și invariant în timp, cu funcția de pondere h, este important de testat proprietățile fizice de tip stabilitate, cauzalitate, pasivitate etc.; proprietatea de stabilitate (la semnale mărginite de intrare corespund semnale

mărginite de ieșire) este strîns legată de apartenența funcției h la clasa L_1, în timp ce proprietatea de cauzalitate a sistemului depinde de apartenența lui h la alte clase de funcții sau distribuții. Reamintim aici două rezultate clasice :

1) Fie H_2^+ clasa Hardy a funcțiilor $H(s) : \mathbb{C} \to \overline{\mathbb{C}}$, $s = \alpha + j\omega$, cu proprietatea că H este olomorfă în semiplanul $\alpha > 0$ și există o constantă reală $M > 0$ astfel încît

$$\int_{-\infty}^{\infty} |H(\alpha + j\omega)|^2 \, d\omega \leqslant M \text{ pentru orice } \alpha > 0.$$

Dacă $H(s) \in H_2^+$, atunci există $h \in L_2 \cap \mathscr{D}_1'$ astfel încît $F_h(\omega) = \lim_{\alpha \to 0, \alpha > 0} H(\alpha + j\omega)$ în sensul L_2, adică valoarea-frontieră a lui H este transformata Fourier a funcției de pondere a unui sistem cauzal [37].

Printre funcțiile din H_2^+ cărora li se aplică acest rezultat, notăm fracțiile raționale $\frac{P(s)}{Q(s)}$ cu gr $P <$ gr Q, avînd polii în semiplanul stîng. Rezultatul anterior se poate întări sub forma că un sistem liniar continuu și invariant în timp $L_2 \to L_2$ cu funcția de pondere h este cauzal dacă și numai dacă factorul de transfer $F_h(\omega)$ este valoarea-frontieră a unei funcții din H_2^+.

2) În probleme de sinteza rețelelor electrice se pune întrebarea : în ce condiții există o rețea cauzală avînd factorul de transfer $F_h(\omega)$ cu modulul prescris ? Un răspuns este cuprins în criteriul lui Paley-Wiener :

Fie $\varphi \in L_2$, $\varphi > 0$; *sînt echivalente afirmațiile* :

(I) *există* $h \in L_2 \cap \mathscr{D}_1'$ *astfel încît* $\varphi(\omega) = |F_h(\omega)|$;

(II) *integrala improprie*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln \varphi(\omega)|}{1 + \omega^2} \, d\omega$$

este convergentă ; *în particular, dacă h este funcția de pondere a unui sistem liniar continuu invariant în timp și dacă F_h se anulează pe o mulțime de măsură > 0, atunci sistemul respectiv este necauzal* [3].

În general, există multe rezultate privind valorile-frontieră ale funcțiilor olomorfe, care apar în teoria operatorilor cauzali, în probleme de dispersie, în teoria rețelelor electrice, iar cadrul L_2 se dovedește insuficient și este important de privit valorile frontieră ca distribuții (sau hiperfuncții).

Folosind aparatul teoriei distribuțiilor, se pot evidenția și alt legături între cauzalitate și analiticitate [4], în cazul unidimensional.

Fie $T : \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$, $u \mapsto v$ un sistem liniar, continuu și invariant în timp ; fie $h \in \mathscr{D}'$ astfel încît $Tu = h * u$, $(\forall) u \in \mathscr{E}'$. Presupunem că sistemul T este cauzal (deci funcția de pondere h aparține lui $\mathscr{D}_1'$, conform teoremei IV.2) ; facem de asemenea ipoteza că $h \in \mathscr{S}'$, deci $h(t)\, e^{-\alpha t} \in \mathscr{S}'$ pentru orice $\alpha > 0$ și se poate atunci defini transformata Laplace

$$L_h(s) = \langle h(t), e^{-st} \rangle, \; s = \alpha + j\omega,$$

care este o funcție olomorfă în deschisul $\alpha > 0$, mărginită de un polinom pe orice interval compact. Am văzut (cu notații schimbate, de fapt printr-o rotație de unghi $\frac{\pi}{2}$) că pentru orice distribuție $f \in \mathscr{E}'$ reprezentarea sa Cauchy $\hat{f}(s) = \frac{1}{2\pi} \left\langle f(t), \frac{1}{s - jt} \right\rangle$ este o funcție olomorfă în planul complex, cu excepția unui compact de pe axa imaginară și că $\hat{f}$ este valoarea frontieră a lui f ; acest rezultat poate fi extins la orice distribuție din $\mathscr{S}'$ și, în particular, pentru $f = F_h$ (transformata Fourier a lui h). Așadar

$$\widehat{L_h(s)} = \frac{1}{2\pi} \left\langle F_h(\omega), \frac{1}{s - j\omega} \right\rangle \text{ pentru } \operatorname{Re} s \neq 0,$$

deci transformata Fourier a lui h este valoarea frontieră a transformatei sale Laplace, în sensul convergenței slabe. Deoarece $h \in \mathscr{D}_1'$, rezultă că $\widehat{L_h(s)} = 0$ pentru $\operatorname{Re} s < 0$ (ca valoare frontieră a unei funcții olomorfe în $\operatorname{Re} s > 0$) sau echivalent, $\left\langle F_h(\omega), \frac{1}{-\bar{s} - j\omega} \right\rangle = 0$ pentru $\operatorname{Re} s > 0$; separînd distribuția F_h în părțile ei reală și imaginară, rezultă relația

$$\left\langle \operatorname{Re} F_h(\omega), \frac{1}{-\bar{s} - j\omega} \right\rangle = -\, j \left\langle \operatorname{Im} F_h(\omega), \frac{1}{-\bar{s} - j\omega} \right\rangle, \; \operatorname{Re} s > 0.$$

Luînd conjugatele, se obține

$$\left\langle \operatorname{Re} F_h(\omega), \frac{1}{s - j\omega} \right\rangle = j \left\langle \operatorname{Im} F_h(\omega), \frac{1}{s - j\omega} \right\rangle, \; \operatorname{Re} s > 0.$$

Deoarece $L_h(s)\hat{} = \frac{1}{2\pi}\left\langle \operatorname{Re} F_h(\omega) + \mathrm{j} \operatorname{Im} F_h(\omega), \frac{1}{s - \mathrm{j}\omega} \right\rangle$, $\operatorname{Re} s > 0$, rezultă în final

$$L_h(s)\hat{} = \frac{1}{\pi}\left\langle \operatorname{Re} F_h(\omega), \frac{1}{s - \mathrm{j}\omega} \right\rangle = \frac{\mathrm{j}}{\pi}\left\langle \operatorname{Im} F_h(\omega), \frac{1}{s - \mathrm{j}\omega} \right\rangle .$$

$\operatorname{Re} s > 0$, ceea ce arată că prin cunoașterea numai a părții reale (sau imaginare) a valorii frontieră, este determinată complet funcția olomorfă respectivă.

Ca un exemplu, luăm $h = \sigma(t)$, treapta unitate (deci operatorul T este un integrator). Atunci $h \in \mathscr{S}'$ și $h \in \mathscr{D}_1'$, deci T este un sistem cauzal cu $L_h(s) = \frac{1}{s}$ pentru $\operatorname{Re} s > 0$. Pentru $\alpha \to 0$ rezultă $\frac{1}{s} \xrightarrow{\mathscr{S}'} \pi\delta - \mathrm{j}\,\mathrm{VP}\frac{1}{\omega} = F_h(\omega)$. Dacă nu s-ar fi adoptat cadrul distribuțional al convergenței slabe, atunci s-ar fi obținut un rezultat paradoxal, anume $\frac{1}{s} \to \frac{1}{\mathrm{j}\omega}$ (punctual, pentru $\alpha \to 0$), în timp ce $\mathrm{VP}\left(\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\right) = \frac{1}{2}\, s$ pentru $\operatorname{Re} s > 0$.

Menționăm că în lucrarea [4], teorema 3.17, este evidențiat un criteriu ca o matrice de distribuții să fie valoarea-frontieră în sensul convergenței în $\mathscr{S}'$ a unei matrice PR, obținîndu-se o nouă caracterizare a operatorilor de imitanță pasivi. În aceeași lucrare este dată și o caracterizare a operatorilor de repartiție pasivi (teorema 3.20), în termeni de valori-frontieră ale unir matrice MR.

(b) *Cauzalitatea și relații de dispersie.* Fie din nou un sistem liniar, real, continuu și invariant în timp $T : \mathscr{E}' \to \mathscr{D}'$, $u \mapsto h * u$. Presupunem în plus că sistemul este cauzal (deci $h \in \mathscr{D}_1'$) și în plus, transformarea Fourier F_h este o funcție continuă $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ astfel încît $G = 1 - F_h$ să aparțină clasei L_2 (deci $\delta - h \in L_2$). Fie

$$G(\omega)\hat{} = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(t)}{t - \omega}\, \mathrm{d}t.$$

Deoarece $G \in L_2$, această integrală există pentru $\operatorname{Im} \omega \neq 0$ și în plus, cum G_+ este valoare-frontieră a unei funcții olomorfe în semiplanul superior, rezultă că $G_h(\omega)\hat{} = 0$ pentru $\operatorname{Im} \omega < 0$. Atunci pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ avem $\lim\limits_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} G(\omega + \mathrm{j}\varepsilon)\hat{} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} [G(\omega + \mathrm{j}\varepsilon)\hat{} - G(\omega - \mathrm{j}\varepsilon)\hat{}\,] =$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{j}} \lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} \int_{-\infty}^{\infty} G(t) \left(\frac{1}{t - \omega - \mathrm{j}\varepsilon} - \frac{1}{t - \omega + \mathrm{j}\varepsilon} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} \int_{-\infty}^{\infty} G(t)\, \frac{\varepsilon}{(t - \omega)^2 + \varepsilon^2}\, \mathrm{d}t = G(\omega).$$

Pe de altă parte,

$$\lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} G(\omega + \mathrm{j}\varepsilon)\hat{} = \lim_{\varepsilon \to 0,\, \varepsilon > 0} [G(\omega + \mathrm{j}\varepsilon)\hat{} - G(\omega - \mathrm{j}\varepsilon)\hat{}\,] =$$

$$= \frac{1}{\pi\mathrm{j}} \left\langle \mathrm{VP}\left(\frac{1}{t - \omega}\right),\ G(t) \right\rangle$$

și ca atare, se obține relația

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi\mathrm{j}} \left\langle \mathrm{VP}\frac{1}{t - \omega}, G(t) \right\rangle . \tag{4.76}$$

Fie $P = \operatorname{Re} G$, $Q = \operatorname{Im} G$, deci $G = P + \mathrm{j}\,Q$; atunci din relația (4.76) rezultă

$$P(\omega) = \frac{1}{\pi} \left\langle \mathrm{VP}\frac{1}{t - \omega}, Q(t) \right\rangle ; Q(\omega) = -\frac{1}{\pi} \left\langle \mathrm{VP}\frac{1}{t - \omega}, P(t) \right\rangle . \tag{4.77}$$

Egalitățile (4.77) se mai numesc *relațiile de dispersie asociate sistemului* T. Acestea se pot scrie succint

$$P = -\frac{1}{\pi}\, Q * \mathrm{VP}\,\frac{1}{t}, \quad Q = \frac{1}{\pi}\, P * \mathrm{VP}\,\frac{1}{t},$$

adică $P = H_Q$ și $Q = -H_P$ (în limbaj de transformate Hilbert). Funcția P se mai numește uneori *partea dispersivă* a sistemului.

Ca un exemplu, considerăm sistemul

$$T: \mathscr{E}' \to \mathscr{D}',\ u \mapsto u - \mathrm{e}^{-|t|} * u.$$

În acest caz, $h(t) = \delta(t) - \mathrm{e}^{-|t|}$, deci $F_h(\mathrm{V}) = 1 - \frac{2}{1 + \omega^2}$ și $G(\omega) = \frac{2}{1 + \omega^2}$. Dacă $u(t) = A \sin \omega_0 t$, $\omega_0 > 0$, este un semnal sinusoidal, atunci $v(t) = T(u) = A \sin \omega_0 t -$

$-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-z|} A \sin \omega_0 z \, dz$; adică $v(t) = A \sin \omega_0 t - \frac{2A\omega_0}{1+\omega_0^2} \cos \omega_0 t$, deci semnalul de ieșire al sistemului cuprinde semnalul de intrare, la care se adaugă o parte dispersivă.

C. REALIZABILITATE ȘI OPERATORI PE SPAȚII HILBERT CU REZOLUȚIE

În partea B a acestui capitol au fost prezentate elemente de teoria realizabilității din punctul de vedere al teoriei distribuțiilor, unde semnalele de intrare au fost presupuse cu regularitate maximă (cuprinse în clasa $\mathscr{D}$), iar semnalele de ieșire aparținînd clasei distribuțiilor. Teoria expusă a fost finalizată într-o serie de teoreme importante privind realizabilitatea funcțiilor de circuit din clasa $M_n(\mathbb{R}(s))$; totodată au fost evidențiate două concepte — cauzalitatea și pasivitatea, care s-au dovedit fundamentale prin restricțiile pe care le generează asupra operatorilor asociați.

În ultimii ani s-a dezvoltat un nou mod de abordare a teoriei realizabilității, în cadrul spațiilor cu rezoluție; contribuțiile cele mai semnificative în această direcție se datoresc lui De Santis, Helton, Porter, Saeks [30, 13, 24, 29]. Ideile principale sînt următoarele:

— Semnalele de bază, atît cele de intrare cît și cele de ieșire, fac parte dintr-un același spațiu Hilbert H, sistemul fizic însuși fiind modelat după un operator $T : H \to H$. Pasivitatea poate fi definită natural utilizînd produsul scalar din H, pentru orice pereche de semnale intrare-ieșire; în 5.3 și 5.4 am arătat că pentru testarea pasivității era necesară considerarea unor operatori cu domenii mai restrictive $\mathscr{D} \to L_1^{loc}$ (formalismul de imitanță) și $\mathscr{D} \to L_2$ (formalismul de repartiție).

— Pentru definiția cauzalității, este esențială separarea efectelor din trecut și a celor din viitor (față de un moment prezent fixat); punctul de vedere distribuțional a utilizat esențial faptul că mulțimea timp era $\mathbb{R}$, cu ordinea uzuală. În cadrul spațiilor cu rezoluție, ordonarea trecut-viitor este realizată prin introducerea unei indexări a elementelor rezoluției, așa cum se va vedea. Menționăm că într-un spațiu Hilbert fixat pot exista mai multe rezoluții distincte și că adoptarea acestui punct de vedere permite analiza unor sisteme descrise prin operatori relativi la funcții definite pe intervale fixate (nu neapărat pe întreg $\mathbb{R}$ ca în cazul distribuțional). Se poate spune că spațiile cu rezoluție permit stabilirea unei legături în ambele sensuri între teoria realizabilității și teoria sistemelor (în sensul lui [41]).

În cadrul acestei părți C a capitolului IV vom prezenta cîteva rezultate ale teoriei spațiilor cu rezoluție, urmînd paralelismul cu rezultatele din partea B și încercînd astfel un studiu comparat al teoreiei realizabilității din două puncte de vedere fundamentale.

§ 8. Cauzalitate în spații Hilbert

8.1. **Noțiunea de rezoluție.** Fie H un spațiu Hilbert real (sau complex). Reamintim că un *proiector* al lui H este un operator liniar: $P : H \to H$ autoadjunct ($P = P^*$) și idempotent [$P^2 = P$, adică $P(Px) = P(x)$, $(\forall)\, x \in H$].

Fixăm în cele ce urmează o mulțime-timp $\mathscr{T}$ total ordonată, avînd un element inițial t_0 și un element final t_f (de exemplu, $\mathscr{T} = [a, b]$, $\mathscr{T} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$). Putem da acum următoarea definiție:

O familie de proiectori $\mathscr{R} = \{P_t\}_{t \in \mathscr{T}}$ se numește *rezoluție în H* dacă:

1° $P_{t_0} = 0$ (operatorul nul);

2° $P_{t_f} = 1_H$ (operatorul identic al lui H);

3° $\operatorname{Im} P_s \subset \operatorname{Im} P_t$, $(\forall)\, s < t$ în $\mathscr{T}$ (adică orice element de forma $P_s x$, $x \in H$ este de forma $P_t y$ cu $y \in H$, de îndată ce $s, t \in \mathscr{T}$ și $s < t$);

4° familia $\mathscr{R}$ este închisă în raport cu limitele punctuale de operatori (adică un șir punctual convergent de proiectori din $\mathscr{R}$ converge către un element din $\mathscr{R}$).

8.2. **Exemple.** a) Fie $H = \mathbb{R}^2$ cu produsul scalar uzual; aplicația de proiecție pe axa Ox, $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x, 0)$ este un proiector.

Dacă $H = L_2$ și $\tau \in \mathbb{R}$ este fixat, atunci trunchierea $P_\tau : L_2 \to L_2$, $x(t) \mapsto y(t) = x(t)\, \sigma(\tau - t)$ este un proiector al lui L_2.

b) În spațiul Hilbert $H = L_2$ și pentru $\mathscr{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, $t_0 = -\infty$, $t_f = \infty$, familia $\mathscr{R} = \{P_\tau\}_{\tau \in \mathscr{T}}$ constituie o rezoluție în L_2, deoarece se verifică imediat proprietățile definitorii 1° — 4°.

c) Fie $H = L_2[a, b]$, $\mathscr{T} = [a, b]$, $t_0 = a$, $t_f = b$; pentru orice moment τ fixat se poate defini proiectorul

$$P_\tau : L_2[a, b] \to L_2[a, b],$$

$$x(t) \mapsto y(t) = \begin{cases} x(t), \text{ dacă } a \leqslant t \leqslant \tau, \\ 0, \text{ dacă } \tau < t \leqslant b. \end{cases}$$

Familia $\mathscr{R} = \{P_\tau\}_{\tau \in \mathscr{T}}$ constituie o rezoluție în spațiul Hilbert $L_2[a, b]$ care se dovedește deosebit de importantă în aplicații.

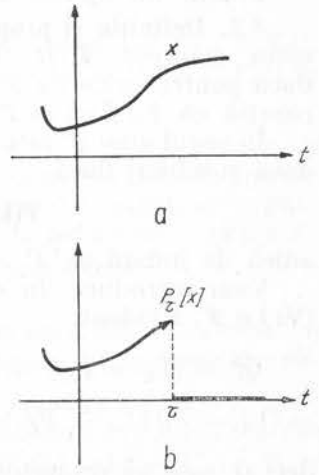


Fig. 4.13. Trunchierea unei funcții ca proiector al lui L_2.

d) Fie $H = l_2$ (studiat în cap. III, exemplul 1.2, e) și $\mathcal{T} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, \infty\}$, $t_0 = -\infty$, $t_f = \infty$. Pentru orice $k \in \mathcal{T}$ se poate defini operatorul

$$P_k : l_2 \to l_2,\ x = \{x_n\} \mapsto y = \{y_n\},\ \text{unde } y_n = \begin{cases} x_n, \text{ dacă } n \leqslant k, \\ 0, \text{ dacă } n > k, \end{cases}$$

și $P_{-\infty} = 0$, $P_\infty = 1_{l_2}$. Este evident că familia $\{P_k\}_{k \in \mathcal{T}}$ constituie o rezoluție în l, de fapt obținută din rezoluția dată în exemplul b) prin discretizare. Se poate de asemenea construi analogul discret al rezoluției date în exemplul c), prin împărțirea intervalului $[a, b]$ în N părți egale ($N \geqslant 2$ convenabil).

e) Fie $H = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, cu produsul scalar uzual și $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, $t_0 = 0$, $t_f = n$. Pentru orice $k \in \mathcal{T}$ se poate defini operatorul $P_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \mapsto y = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, și familia $\{P_k\}_{k \in \mathcal{T}}$ constituie o rezoluție în spațiul euclidian $\mathbb{R}^n$.

Fie $\mathcal{R} = \{P_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ o rezoluție într-un spațiu Hilbert fixat H; pentru orice semnal $x \in H$ și pentru orice moment τ, semnalul $P_\tau(x)$ poate fi numit *trunchierea* lui x la momentul τ (sau partea din x anterioară momentului τ); exemplele b), c,) d) justifică această terminologie.

La punctul 5.1 am definit cauzalitatea unui operator prin aceea că oricăror două semnale de intrare-ieșire egale înainte de un moment t le corespund semnale de ieșire egale înainte de momentul t, $(\forall) t \in \mathbb{R}$. Definiția adoptată pe un spațiu cu rezoluție va conserva această proprietate.

Fixăm un spațiu Hilbert H și o rezoluție $\mathcal{R} = \{P_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ în H.

8.3. **Definiția și proprietăți ale operatorilor cauzali.** Fie un operator mărginit $T : H \to H$ fixat. Operatorul T se numește *cauzal* dacă pentru orice $t \in \mathcal{T}$, din faptul că $x_1, x_2 \in H$ și $P_t(x_1) = P_t(x_2)$, rezultă că $P_t(Tx_1) = P_t(Tx_2)$.

În cazul cînd T este în plus liniar, este evident că T este cauzal dacă și numai dacă

$$T(\ker P_t) \subset \ker P_t,\ (\forall) t \in \mathcal{T}, \qquad (4.78)$$

adică de îndată ce $P_t(x) = 0$, $x \in H$, rezultă că $P_t(Tx) = 0$.

Vom introduce, în cele ce urmează, operatorul $Q_t = 1_H - P_t$, $(\forall)\ t \in \mathcal{T}$. Evident,

$$Q_t^* = (1_H - P_t)^* = 1_H - P_t^* = 1_H - P_t = Q_t,\ Q_t^2 = Q_t Q_t =$$

$$= (1_H - P_t)(1_H - P_t) = 1_H - 2P_t + P_t = Q_t \text{ și } Q_t P_t = 0,\ P_t Q_t = 0,$$

deci Q este un proiector, ortogonal lui P_t; în plus, $\ker Q_t = \operatorname{Im} P_t$ și $\ker P_t = \operatorname{Im} Q_t$. Operatorul Q_t extrage partea de după momentul t din orice semnal căruia i se aplică.

În analogie cu definițiile date în 5.1, se spune că un operator T ca mai sus este anticauzal dacă $(\forall) t \in \mathcal{T}$, din ipoteza că $Q_t(x_1) = Q_t(x_2)$, $x_1, x_2 \in H$, rezultă $Q_t(Tx_1) = Q_t(Tx_2)$; în cazul liniar, aceasta revine la $T(\ker Q_t) \subset \ker Q_t$, $(\forall) t \in \mathcal{T}$. Un operator se numește *fără memorie* dacă acesta este cauzal și anticauzal.

Vom nota cu $\mathcal{C}$ mulțimea operatorilor cauzali pe H.

Teorema IV.15. *Fie H un spațiu Hilbert și $\mathcal{R} = \{P_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ o rezoluție în H. Fie $T : H \to H$ un operator liniar și continuu al lui H. Atunci sînt echivalente afirmațiile:*

(I) *T este cauzal (adică $T \in \mathcal{C}$);*

(II) *T^* este anticauzal;*

(III) $P_t T Q_t = 0$, $(\forall) t \in \mathcal{T}$.

Demonstrație. (I)$\Rightarrow$(II). Dacă T este cauzal, rezultă relația (4.78), deci $\ker P_t$ este un subspațiu T-invariant al lui H; ortogonalul său, $\ker Q_t$, va fi un subspațiu T^*-invariant, adică $T^*(\ker Q_t) \subset \ker Q_t$, deci T^* este anticauzal. Implicația (II)$\Rightarrow$(I) se probează similar.

(I)$\Rightarrow$(III). Presupunem că T este cauzal și fie $(\forall) x \in H$ fixat. Atunci $x - P_t x \in \ker P_t$, deci $Q_t x \in \ker P_t$ și cum $T \in \mathcal{C}$, aplicînd (4.78), rezultă $T(Q_t x) \in \ker P_t$, deci $(P_t T Q_t) x = 0$; x fiind arbitrar, rezultă $P_t T Q_t = 0$.

(III)$\Rightarrow$(I). Ipoteza este că $P_t T Q_t = 0$, adică $P_t T = P_t T P_t$, $(\forall)\ t \in \mathcal{T}$. Dacă $P_t x = 0$, $x \in H$, atunci T fiind liniar, rezultă $T(P_t x) = 0$, adică $P_t(Tx) = 0$. Așadar, $T \in \mathcal{C}$.

Afirmația (III) se scrie echivalent $P_t T = P_t T P_t$, $(\forall) t \in \mathcal{T}$ și ea se interpretează sugestiv astfel: pentru orice semnal de intrare $x \in H$, luînd trunchierea sa $y = P_t x$ la momentul t, ieșirile corespunzătoare Tx și Ty vor avea aceeași trunchiere la momentul t, $(\forall) t \in \mathcal{T}$.

Din teorema anterioară decurg cîteva consecințe.

Corolarul 1. *Dacă T_1 și T_2 sînt operatori liniari cauzali ai lui H, atunci compunerea $T_1 T_2$ este de asemenea un operator cauzal.*

Demonstrație. Aplicăm condiția (III) din teorema IV.15 și arătăm că $P_t(T_1 T_2) Q_t = 0$, $(\forall) t \in \mathcal{T}$. Dar T_1 este cauzal, deci $P_t T_1 Q_t = 0$, adică $P_t T_1 = P_t T_1 P_t$. Atunci $P_t(T_1 T_2) Q_t = (P_t T_1)(T_2 Q_t) = (P_t T_1 P_t)(T_2 Q_t) = (P_t T_1)(P_t T_2 Q_t) = 0$, ultima relație fiind o consecință a cauzalității lui T_2.

Corolarul 2. *În condițiile teoremei* IV.15,

(a) T *este anticauzal* $\rightleftarrows T^*$ *este cauzal* $\rightleftarrows Q_t T P_t = 0$, $(\forall)t \in \mathscr{T}$;

(b) T *este fără memorie* $\rightleftarrows T^*$ *este fără memorie* $\rightleftarrows P_t T Q_t = Q_t T P_t = 0$, $(\forall)t \in \mathscr{T}$.

Demonstrația punctului (a) este similară cu cea a teoremei IV.15, iar punctul (b) rezultă imediat.

Următoarea teoremă se referă la un criteriu de cauzalitate a inversului unui operator cauzal.

Teorema IV.16. *Fie* $T : H \to H$ *un izomorfism liniar continuu al lui* H *astfel încît* $\langle Tx, x\rangle \neq 0$ *pentru orice* $x \neq 0$. *Dacă* $T \in \mathscr{C}$, *atunci și inversul său* T^{-1} *aparține lui* $\mathscr{C}$.

Demonstrație. Fie $(\forall)x \in \ker P_t$ și $y = (1_H - TQ_tT^{-1})\,x$. Deoarece $Q_tT^{-1}x \in \operatorname{Im} Q_t = \ker P_t$ și $T \in \mathscr{C}$, rezultă $TQ_tT^{-1}x \in \ker P_t$, adică $y = x - TQ_tT^{-1}x \in \ker P_t$. În plus, $T^{-1}y = (T^{-1} - Q_tT^{-1})\,x = (1_H - Q_t)T^{-1}x = P_tT^{-1}x$, deci $\langle T^{-1}y,\ y\rangle = \langle P_tT^{-1}x,\ y\rangle = \langle T^{-1}x,\ P_ty\rangle = \langle T^{-1}x, 0\rangle = 0$. Notînd $u = T^{-1}y$, rezultă $\langle Tu, u\rangle = \langle y, T^{-1}y\rangle = 0$, deci conform ipotezei din enunț, rezultă în mod necesar $u = 0$, adică $y = Tu = 0$ și $x = TQ_tT^{-1}x$, deci $TP_tT^{-1}x = 0$. Cum T este izomorfism, rezultă că $P_tT^{-1}x = 0$, pentru orice $x \in \ker P_t$, adică $T^{-1}(\ker P_t) \subset \ker P_t$, deci $T^{-1} \in \mathscr{C}$, conform relației (4.78).

Exemplele următoare vor ilustra conținutul teoremelor anterioare.

8.4. **Exemple.** (a) Reluînd exemplul 5.3, (a), dacă $K(t, \tau)$ este nucleul unui sistem liniar continuu variant în timp $x \mapsto y$, dat prin formula (4.33) și dacă suportul lui K este cuprins în regiunea $\{t \geqslant \tau\}$ (respectiv $\{t \leqslant \tau\}$, $\{t = \tau\}$), atunci operatorul respectiv este cauzal (respectiv anticauzal, fără memorie). Pentru nuclee regulate, se poate defini în general partea cauzală (respectiv anticauzală)

$$y_c(t) = \int_{-\infty}^{t} K(t, \tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau \left(\text{respectiv } y_{ac}(t) = \int_{t}^{\infty} K(\tau, t)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right),$$

operatorii $x \mapsto y_c$, $x \mapsto y_{ac}$ fiind adjuncți. O astfel de descompunere există, mai general, în cadrul spațiilor cu rezoluție, anume orice operator liniar se reprezintă ca suma unui operator cauzal cu unul anticauzal, în mod unic pînă la un termen aditiv care este un operator fără memorie [28].

(b) Corolarul 1 al teoremei IV.15 are o interpretare fizică sugestivă : conectarea în cascadă a două sisteme liniare și cauzale, avînd operatori asociați T_1 și T_2, conduce la un sistem cauzal (fig. 4.14).

Proprietatea de liniaritate este esențială ; în cazul general, dacă T_2 este cauzal iar T_1 comută cu toți proiectorii P_t, atunci T_1T_2 este cauzal [într-adevăr, dacă $P_tx_1 = P_tx_2$, atunci $P_t(T_1T_2)\,x_1 = T_1(P_tT_2x_1) = T_1(P_tT_2x_2) = P_t(T_1T_2)\,x_2$, deci T_1T_2 este cauzal, folosind numai definiția (8.3)].

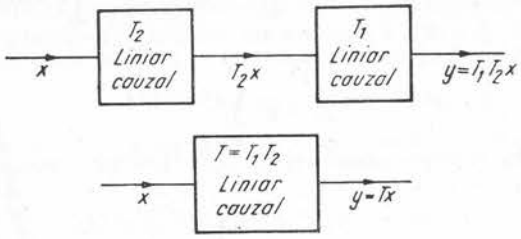


Fig. 4.14. Schema sistemică corespunzătoare compunerii a doi operatori.

Ca un alt fapt teoretic, menționăm următoarea consecință a teoremei IV.16. *Fie* $T : H \to H$ *un operator liniar cauzal astfel încît* $T + 1_H$ *să fie un izomorfism și* $\dfrac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \neq -1$ *pentru orice* $x \neq 0$. *Atunci* $(T + 1_H)^{-1}$ *este cauzal.*

Într-adevăr, $T + 1_H$ este evident cauzal și în plus, din ipoteză rezultă $\langle Tx + x, x\rangle \neq 0$; se poate aplica atunci teorema IV.16 pentru operatorul $T + 1_H$.

(c) Considerăm circuitul RC dat în fig. 4.15, care lucrează în intervalul de timp $[0, 1]$, semnalul de intrare fiind tensiunea aplicată $x(t)$ iar ieșirea curentul $y(t)$. Un calcul simplu arată că operatorul intrare-ieșire corespunzător este definit pe spațiul Hilbert $H = \mathrm{L}_2[0, 1]$, prin

$$T : H \to H,\quad x(t) \mapsto y(t) = -u_c(0)\mathrm{e}^{-t} + x(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{-(t-z)}\, x(z)\mathrm{d}z, \tag{4.79}$$

unde $t \in [0, 1]$, iar $u_c(0)$ este tensiunea inițială pe condensator. (Există și o altă interpretare, prin considerarea aplicației $\mathrm{L}_2[0, 1] \times \mathbb{R} \to \mathrm{L}_2[0, 1]$, $(x(t), u_c(0)) \mapsto y(t)$, dat de (4.79) și prin evidențierea stărilor $u_c(0) \in \mathbb{R}$ ale sistemului).

Operatorul T este cauzal deoarece este mărginit și, în plus, ori de cîte ori $x_1, x_2 \in H$ și $P_s(x_1) = P_s(x_2)$, $s \in [0, 1]$, rezultă $x_1(t) = x_2(t)$ pentru orice $t \leqslant s$ [conform exemplului 8.2, c)], deci $y_1(t) = y_2(t)$ pentru orice $t \leqslant s$, adică $P_s(Tx_1) = P_s(Tx_2)$, oricare ar fi $s \in [0,1]$ fixat. (Se presupune că starea inițială este neschimbată). Pe de altă parte, aceeași rețea poate fi modelată prin operatorul anticauzal $S : H \to H$, dat prin

$$x(t) \mapsto -u_c(1)\mathrm{e}^{-(t-1)} + x(t) - \frac{1}{2}\int_t^1 \mathrm{e}^{-(t-z)}\, x(z)\,\mathrm{d}z$$

[din egalitatea $Q_s(x_1) = Q_s(x_2)$, $s \in [0,1]$, rezultă $Q_s(Sx_1) = Q_s(Sx_2)$].

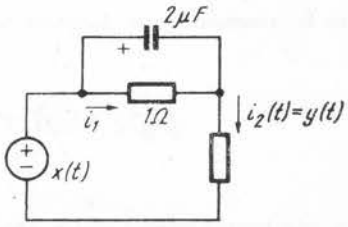


Fig. 4.15. Rețea RC.

Dacă urmărim să modelăm rețeaua RC anterioară în regim periodic, în care semnalul $x(t)$ este periodic cu perioada egală cu 1, atunci periodicitatea semnalului de ieșire $y(t)$ impune condiția $y(0) = y(1)$, adică conform cu (4.79)

$$-u_c(0) + x(0) = -u_c(0)\frac{1}{e} + x(1) - \frac{1}{2e}\int_0^1 e^z x(z)\,dz,$$

de unde

$$u_c(0) = \frac{1}{2e-2}\int_0^1 e^z x(z)\,dz;$$

introducînd în (4.79), se obține operatorul lui $L_2[0, 1]$ definit prin

$$U : x(t) \mapsto y(t) = x(t) + \int_0^1 K(t, z)\,x(z)\,dz,$$

unde nucleul $K(t, z)$ este dat de

$$K(t, z) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2e-2}\,e^{-t+z+1}, & \text{dacă } 0 < z < t < 1, \\ -\dfrac{1}{2e-2}\,e^{-t+z}, & \text{dacă } 0 < t < z < 1. \end{cases}$$

Operatorul U astfel definit nu este nici cauzal, nici anticauzal (căci valoarea lui y la orce moment $t \in [0, 1]$ depinde atît de valorile semnalului x anterioare lui t cît și de valorile lui x după momentul t).

Exemplul anterior se poate extinde luînd $H = L_2[a, b]$ și atunci orice operator de forma

$$x(t) \mapsto y(t) = \varphi(t)\,x(t) + \int_a^t K(t, z)\,x(z)\,dz, \quad t \in [a, b],$$

unde $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue, rezultă cauzal. Astfel de operatori sînt asociați unor sisteme liniare continue cu stări nule.

(d) Fie $H = \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, cu rezoluția indicată în exemplul 8.2, e) și operatorul liniar $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto y = (y_1, \ldots, y_n)$, unde $y_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij}\,x_j$, $1 \leqslant i \leqslant n$, cu a_{ij} constante reale. Matricea asociată lui T în baza canonică este

$$M_T = \begin{bmatrix} a_{11} & & \mathbf{0} \\ a_{21} & a_{22} & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

și este triunghiulară inferior. Operatorul T este cauzal deoarece, dacă $P_k(x) = P_k(x')$, atunci $P_k(Tx) = P_k(Tx')$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $x, x' \in \mathbb{R}^n$.

În general, un operator liniar $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ este cauzal (respectiv anticauzal, fără memorie) dacă și numai dacă matricea asociată în baza canonică este triunghiulară inferior (respectiv triunghiulară superior, diagonală). De asemenea, dacă T este un izomorfism cauzal, atunci T^{-1} este cauzal. De exemplu, orice operator T cauzal ortogonal ($TT^* = 1_H$) este fără memorie, căci există $T^{-1} = T^*$ care rezultă cauzal și deci T este și anticauzal.

Aceste afirmații au loc pentru orice spații Hilbert finit dimensionale (peste $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$).

(e) Fie $H = l_2$ înzestrat cu rezoluția din exemplul 8.2, d) și fie T operatorul de decalare la dreapta (întîrziere discretă) cu un număr fixat de pași $n \geqslant 2$:

$$T : l_2 \to l_2,\ x = \{x_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto y = \{x_{k-n}\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Evident, T este cauzal, deoarece $(\forall)k \in \mathbb{Z}$ fixat, dacă $x_p = 0$ pentru $p \leqslant k$, atunci $y_p = x_{p-n} = 0$ pentru $p \leqslant k + n$. În plus, T^{-1} există, $T^{-1}(x) = \{x_{k+n}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ și este clar că T^{-1} nu este cauzal și deși $T^{-1} = T^*$, operatorul T nu este fără memorie.

Acest exemplu arată că afirmațiile din exemplul anterior relativ la spații finit dimensionale nu au loc în cazul infinit dimensional.

(f) Fie $H = L_2$ și $h \in L_1$ o funcție fixată, nulă a.p. pentru $t < 0$. Operatorul de convoluție $T = h*$ este cauzal (întrucît $(\forall)\tau \in \mathbb{R}$ fixat, dacă $u(t) = 0$ pentru $t \leqslant \tau$, atunci $(h*u)(t) = 0$, adică

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(t - z)\,u(z)\,dz = 0 \text{ pentru } t \leqslant \tau);$$

reciproc, dacă $h \in L_1$ și $T = h*$ este cauzal, atunci supp $h \subset [0, \infty)$. Acest fapt este corespondentul în spații Hilbert al teoremei IV.2 din cazul distribuțional.

8.5. **O problemă de control optimal.** Cadrul spațiilor cu rezoluție permite formularea și soluționarea unor probleme de comandă optimală (de exemplu de energie minimală) din teoria sistemelor.

Fie H un spațiu Hilbert cu rezoluție $\{P_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ și $T : H \to H$ un operator liniar cauzal. Fie $x \in H$ un semnal de intrare și $z_0 \in H$ un semnal perturbator fixat. Problema constă în a găsi dintre toți operatorii $D \in \mathcal{C}$ pe acela pentru care funcționala $J(D) \overset{\Delta}{=} \|Dx\|^2 + \|TDx - z_0\|^2$ este minimă [30]. Cu alte cuvinte, trebuie găsit un sistem de compensare cu operatorul $D_0 : H \to H$ din $\mathcal{C}$ astfel încît $J(D_0) \leqslant J(D)$, $(\forall)D \in \mathcal{C}$.

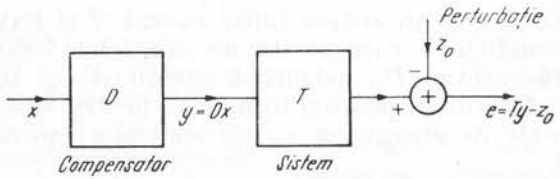


Fig. 4.16. Schema sistemică corespunzătoare compensării sistemului dat prin operatorul T.

Teorema IV.17. *Presupunem că pentru semnalul $x \in H$ există $t_0 \in \mathcal{T}$ astfel încît $Q_{t_0} x = x$ și că există $A \in \mathcal{C}$ inversabil cu $A^{-1} \in \mathcal{C}$, astfel încît $1_H + T^*T = A^*A$. Dacă $D_0 \in \mathcal{C}$ și dacă*

$$D_0 x = A^{-1} Q_{t_0} (A^*)^{-1} T^* z_0, \tag{4.80}$$

atunci acest operator rezolvă problema anterioară.

Demonstrație. Cum operatorii A și A^{-1} sînt cauzali, atunci A^*, $(A^*)^{-1}$ sînt anticauzali și, în particular, $Q_{t_0} A^* = Q_{t_0} A^* Q_{t_0}$ (conform analogului anticauzal al teoremei IV.15). Aplicînd relației (4.80) operatorul $Q_{t_0} A^* A$, rezultă

$$Q_{t_0} A^* A D_0 x = (Q_{t_0} A^* Q_{t_0})(A^*)^{-1} T^* z_0 = Q_{t_0} T^* z_0$$

și înlocuind $A^*A = 1_H + T^*T$, se obține $Q_{t_0}(D_0 x + T^*TD_0 x - T^*z_0) = 0$. Deoarece $Q_{t_0} x = x$, rezultă că pentru orice operator $B \in \mathcal{C}$ avem $Bx = BQ_{t_0} x = Q_{t_0} BQ_{t_0} x = Q_{t_0} Bx$ și atunci relația precedentă se scrie

$$D_0 x + T^*TD_0 x - Q_{t_0} T^* z_0 = 0,$$

adică $D_0 x + T^*TD_0 x - T^*z_0 = -P_{t_0} T^* z_0$, deci, cum $\operatorname{Im} P_{t_0} \perp \operatorname{Im} Q_{t_0}$, avem $\langle D_0 x + T^*TD_0 x - T^*z_0, Bx\rangle = 0$, pentru orice $B \in \mathcal{C}$.

În particular, pentru $B = D - D_0$ cu $D \in \mathcal{C}$ arbitrar, rezultă

$$\langle D_0 x + T^*TD_0 x - T^*z_0, Dx - D_0 x\rangle = 0, \ (\forall) D \in \mathcal{C}. \tag{4.81}$$

Folosind relația (4.81), rezultă după calcule imediate că

$$J(D) - J(D_0) = \|Dx\|^2 + \|TDx - z_0\|^2 - \|D_0 x\|^2 - \|TD_0 x - z_0\|^2 =$$

$$= \|Dx - D_0 x\|^2 + \|TDx - TD_0 x\|^2,$$

deci $J(D) \geq J(D_0)$, adică D_0 realizează într-adevăr minimul funcționalei $J(D)$.

Așadar, fiind dat un sistem liniar cauzal T și fixînd x, $z_0 \in H$, am indicat condiții în care există un controlor optimal în buclă deschisă (fără reacție) D_0, asigurînd energia $J(D_0)$ minimă.

O problemă similară poate fi formulată pentru cazul minimizării unei funcționale de energie printr-un controlor optimal cu reacție inversă [30].

Ca o exemplificare pentru teorema anterioară considerăm $H = L_2[0, \infty)$ și un sistem liniar, continuu, invariant în timp și cauzal, definit printr-un operator T; fie $\hat{T}(s)$ operatorul corespunzător în domeniul s, $X(s)$ și $Z_0(s)$ transformatele Laplace ale lui x și z_0. Operatorul minimizator este atunci dat prin funcția de transfer

$$D_0(s) = \frac{1}{A(s)\, X(s)} \left[\frac{\hat{T}(-s)\, Z_0(s)}{A(-s)} \right]^+,$$

unde $[\ ]^+$ este componenta aditivă cauzală a funcției de transfer cuprinsă în paranteză, iar $A(s)$ este un multiplicator cauzal într-o factorizare de forma $1 + \hat{T}(-s)\,\hat{T}(s) = A(-s)A(s)$. Dacă notăm $y = Dx$, $e = Ty - z_0$, atunci $D_0(s)$ este funcția de transfer a unui sistem pentru care este atins minimul (după D) expresiei

$$\int_0^\infty y(t)^2\, dt + \int_0^\infty e(t)^2\, dt.$$

8.6. **Inversabilitatea operatorilor cauzali.** În teorema IV.16 sînt date condiții în care inversul unui izomorfism liniar cauzal este cauzal. În exemplele 8.4, d), e) am văzut că, în general, operatorii cauzali nu sînt inversabili și chiar dacă ar fi, inversul nu este neapărat cauzal. În sistemele cu reacție este necesar să fie cunoscute condiții în care un operator are invers cauzal. Fie un astfel de sistem (fig. 4.17), unde x_1, x_2 sînt intrări ale sistemului aparținînd aceluiași spațiu cu rezoluție H, T_1, T_2 fiind operatori cunoscuți ai lui H (asociați căii directe și căii de reacție), iar y_1, y_2 fiind erori ale intrărilor (ieșirile fiind $T_1 y_1$, $T_2 y_2$). Ecuațiile sistemului sînt

$$y_1 + T_2 y_2 = x_1,\ y_2 - T_1 y_1 = x_2. \tag{4.82}$$

Problema tipică este determinarea soluției (y_1, y_2) cunoscînd (x_1, x_2). Dacă operatorii $1_H + T_1T_2$, $1_H + T_2T_1$ ar fi inversabili, atunci soluția corespunzătoare ar fi

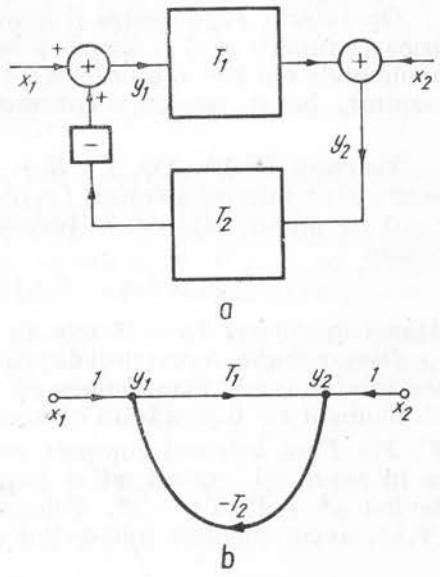


Fig. 4.17. Sistem cu reacție:
a — schema bloc; b — schema operatorială (graf de fluență operatorială)

$$y_1 = (1 + T_2T_1)^{-1}(x_1 - T_2x_2),\ y_2 = (1 + T_1T_2)^{-1}(x_2 + T_1x_1).$$

Sistemul anterior admite o interpretare ca 2-port, în care T_1 este un operator de tip impedanţă (transformînd curenţi în tensiuni), iar T_2 un operator admitanţă (transformînd tensiuni în curenţi), relaţiile (4.82) decurgînd din legile lui Kirchhoff.

Vom modifica puţin forma sistemului, ceea ce va aduce simplificări considerabile. Pentru aceasta, vom înlocui spaţiul H cu $H \times H$ (cu structura uzuală de spaţiu Hilbert) şi vom defini operatorul

$$T : H \times H \to H \times H,\ (y_1, y_2) \mapsto (T_2 y_2, -T_1 y_1).$$

Punînd $y = (y_1, y_2)$ şi $x = (x_1, x_2)$, sistemul (4.82) se scrie echivalent sub forma

$$y + Ty = x, \text{ adică } (1_H + T)\, y = x. \tag{4.83}$$

Dăm acum condiţii care asigură inversabilitatea operatorului $1_H + T$.

Presupunem în cele ce urmează că $\mathcal{T} = [0, \infty)$ şi $\boldsymbol{H} = \mathrm{L}_2[0, \infty)$, sau $\mathcal{T} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $H = \mathrm{l}_2$, cu rezoluţiile definite în exemplele 8.2, c), d). Pentru orice $s,\ t > 0$ notăm $P_{t,s} = P_{t+s} - P_t$ şi vom face ipoteza că $P_{t,s}(\boldsymbol{H})$ este un subspaţiu închis al lui $\boldsymbol{H}$.

Operatorul $P_{t,s}$ ar putea fi numit *operator de segmentare*, deoarece oricărei funcţii $x(\tau)$ îi asociază segmentul de funcţie cuprins între momentele t şi $t + s$, adică $[\sigma(t + s) - \sigma(t)]x(\tau)$. Are loc următorul rezultat, bazat pe lema contracţiei.

Teorema IV.18. *Fie $T : H \to H$ un operator cauzal astfel încît pentru orice interval mărginit $I \subset [0, \infty)$ să existe numere reale $0 < c < 1$, $s > 0$ cu proprietatea că de îndată ce $t \in I$, $x_1, x_2 \in H$, $P_t x_1 = P_t x_2$, rezultă*

$$\| P_{t,s}(Tx_1 - Tx_2) \| \leqslant c \| P_{t,s}(x_1 - x_2) \|. \tag{4.84}$$

Atunci operatorul $1_H + T$ este un izomorfism.

Demonstraţie. Avem deci de arătat că $(\forall) x \in H$, ecuaţia $y + Ty = x$ are soluţie unică. Presupunem că am determinat o soluţie y pînă la un moment $t > 0$ şi arătăm că aceasta poate fi extinsă unic la întreg $\mathcal{T}$. Fie I un interval compact astfel încît $t \in \mathring{I}$. Există atunci c, s ca în enunţ şi notînd $x^* = P_{t,s}x$, $y^* = P_{t,s}y$, ecuaţia $y + Ty = x$ devine $y^* + P_{t,s}Ty = x^*$. Folosind cauzalitatea lui T şi teorema IV.15, avem succesiv (observînd că $P_t = P_t P_{t+s}$, $s > 0$):

$$P_{t;s}T = P_{t+s}T - P_t T = P_{t;s}TP_{t+s} - P_t T P_t = P_{t+s}TP_{t+s} -$$

$$- P_t T P_t P_{t+s} = P_{t+s}TP_{t+s} - P_t T P_{t+s} = P_{t,s}TP_{t+s} = P_{t;s}T(P_t + P_{t;s}).$$

Deci egalitatea anterioară se va scrie

$$y^* + P_{t,s}\, \boldsymbol{T}(P_t y + y^*) = x^*.$$

Aplicaţia

$$\varphi : P_{t;s}(H) \to P_{t;s}(H), \quad y^* \mapsto x^* - P_{t;s}(T(P_t y + y^*)) \tag{4.85}$$

este o contracţie, aşa cum rezultă din (4.84), deci φ are un punct fix, care constituie unica soluţie căutată pe intervalul $[t,\ t + s]$. Aşadar, pornind de la momentul $t = 0$ şi repetînd procedeul anterior, se construieşte soluţia $y + Ty = x$ pe întreg $\mathcal{T}$.

Trebuie remarcat că operatorul T nu este presupus liniar (deoarece în teorema IV.15 implicaţia I⇒III are loc şi pentru operatori neliniari). Dacă T este invariant în timp, atunci intervalele de tipul I pot fi alese ca translatatele unuia singur şi t, s pot fi aceeaşi peste tot.

Revenind la problema cauzalităţii inversului unui operator, se poate stabili următorul rezultat [11].

Teorema IV.19. *Fie $H = \mathrm{L}_2[0, \infty)$ cu rezoluţia uzuală şi T_1, T_2, S operatori liniari continui ai lui H astfel încît $1_H + ST_1$ să fie inversabil şi*

$$\alpha \overset{\Delta}{=} \| 1_H + ST_1)^{-1} \| \cdot \| T_1 \| \cdot \| T_2 - S \| < 1.$$

În acest caz, operatorul $1_H + T_2 T_1$ este inversabil şi în plus, inversul său este cauzal dacă şi numai dacă $1_H + ST_1$ este cauzal.

Demonstraţie. Fie $\mathcal{A}$ algebra Banach a tuturor operatorilor liniari şi continui $H \to H$; reamintim că pentru orice $U \in \mathcal{A}$, se notează $\| U \| = \sup_{x \in H} \| Ux \|$ şi că dacă $\| U \| < 1$, atunci operatorul $1_H + U$ este inversabil (cu inversul $1_H - U + U^2 - U^3 + \ldots$); de asemenea, $(\forall) U, V \in \mathcal{A}$, avem $\| UV \| \leqslant \| U \| \cdot \| V \|$. Cu aceste pregătiri, pentru orice număr real $t \in [0, 1]$ notăm $U_t = 1_H + ST_1 + t(T_2 - S)T_1 \in \mathcal{A}$. Evident

$$U_t = (1_H + ST_1)\,[1_H + t(1_H + ST_1)^{-1}(T_2 - S)T_1]$$

şi deoarece prin ipoteză avem

$$\| t(1_H + ST_1)^{-1}(T_2 - S)T_1 \| \leqslant t \| (1_H + ST_1)^{-1} \| \, \| T_2 - S \| \, \| T_1 \| < 1,$$

rezultă că operatorul U_t este inversabil pentru orice $t \in [0, 1]$ şi

în plus, $\| U_t^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-\alpha} \|(1_H + ST_1)^{-1}\|$; în particular, operatorul $U_1 = 1_H + T_2 T_1$ este inversabil. Demonstrația se încheie dacă aplicăm lema care urmează, de unde se va deduce că U_t^{-1} este cauzal dacă și numai dacă U_0^{-1} este cauzal, adică $(1_H + T_2 T_1)^{-1}$ este cauzal în același timp cu $(1_H + ST_1)^{-1}$.

Lema 4. *Cu notațiile precedente, operatorul U_t^{-1} este cauzal, $(\forall)t \in [0,1]$ dacă și numai dacă U_0^{-1} este cauzal.*

Demonstrație. Fie $V = 1_H + ST_1$, $W = (T_2 - S)T_1$ și $\frac{1}{1-\alpha}\|(1_H + ST_1)^{-1}\| = \beta$. Atunci $U_t = V + tW$ și $\| U_t^{-1}\| \leqslant \beta$, $(\forall)t \in [0,1]$. Presupunem ca V este cauzal și avem de probat că U_t este cauzal pentru orice $t \in [0,1]$. Putem considera că $W \neq 0$ (adică $W = 0$, atunci $V = U_0$ este cauzal). Se observă că dacă $t \in [0,1]$ și U_t^{-1} este cauzal și dacă $|t - s| \leqslant \frac{1}{\|W\|\beta}$, atunci U_s^{-1} există și este cauzal, așa cum rezultă din relația

$$U_s = V + sW = V + tW + (s-t)W =$$

$$= [1_H + (s-t)\,W(V+tW)^{-1}](V+tW) = [1_H + (s-t)\,WU_t^{-1}]\,U_t$$

și din inegalitatea $\|(s-t)\,WU_t^{-1}\| < 1$. Așadar, dacă se consideră orice două puncte din intervalul $[0,1]$ la distanță cel mult $\frac{1}{\|W\|\beta}$ și dacă operatorul U_t^{-1} este cauzal într-unul din puncte, el rezultă cauzal și în celălalt. Lema este demonstrată.

8.7. **Exemplu.** Ca exemplificare a teoremei IV.18 fie $H = l_2$, cu rezoluția de trunchiere indexată pe momentele discrete din $\mathscr{T} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Fie operatorul de decalare cu două unități

$$T : l_2 \to l_2,\ x = \{x_k\}_{k\geqslant 0} \to y = \{y_k\}_{k\geqslant 0},\ \text{unde } y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_k = x_{k-2},\ k \geqslant 3.$$

Acest operator este cauzal și satisface condițiile teoremei IV.18 (operatorul $P_{m,n}$ reține din orice semnal $x = \{x_k\}_{k\geqslant 0}$ doar eșantioanele $x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}$, celelalte fiind nule). În acest caz operatorul $1_H + T$ are matricea infinită asociată

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

și este inversabil, cu inversul cauzal.

§ 9. Pasivitate, disipativitate

Am văzut în partea B rolul esențial jucat de conceptele de pasivitate și disipativitate în studiul circuitelor; în cele ce urmează, vom prezenta aceste concepte în cadrul spațiilor Hilbert cu rezoluție, printr-o reformulare convenabilă care lărgește cîmpul de aplicabilitate.

Fie un spațiu Hilbert H (real sau complex) cu produsul scalar notat $\langle\ ,\ \rangle$ și fie $\{P_t\}_{t\in\mathscr{T}}$ o rezoluție în H, $Q_t = 1_H - P_t$. Fixăm un operator $T : H \to H$.

9.1. **Definiții.** Operatorul T se numește *pasiv* dacă $(\forall)t \in \mathscr{T}$, $(\forall)x \in H$, avem

$$\mathrm{Re}\,\langle P_t x,\ Tx\rangle \geqslant 0. \tag{4.86}$$

Operatorul T se numește *disipativ* dacă

$$\|P_t Tx\| \leqslant \|P_t x\|,\quad (\forall)t \in \mathscr{T},\ (\forall)x \in H. \tag{4.87}$$

Legătura între cauzalitate și pasivitate este exprimată în

Teorema IV.20. *Fie $T : H \to H$ un operator liniar și continuu. Sînt echivalente următoarele afirmații:*

(I) *T este pasiv;*

(II) *T este cauzal și pozitiv* [*adică* $\mathrm{Re}\langle Tx, x\rangle \geqslant 0$, $(\forall)x \in H$].

Demonstrație. (I)⇒(II). Presupunem T pasiv și fie $y \in H$, $t \in \mathscr{T}$, $P_t y = 0$. Fie de asemenea $x \in H$ fixat arbitrar și $z = x + \lambda y$ cu λ scalar oarecare. Deoarece $P_t y = 0$, rezultă $P_t z = P_t x$, deci $\mathrm{Re}\langle P_t z,\ Tz\rangle = \mathrm{Re}\,\langle P_t x,\ Tx\rangle + \mathrm{Re}\,\bar\lambda\langle P_t x,\ Ty\rangle$. Conform ipotezei, $\mathrm{Re}\,\langle P_t x,\ Tx\rangle \geqslant 0$ și $\mathrm{Re}\,\langle P_t z,\ Tz\rangle \geqslant 0$, deci λ fiind arbitrar, rezultă că $\langle P_t x,\ Ty\rangle = 0$, adică $\langle x,\ P_t Ty\rangle = 0$ și cum x este arbitrar, rezultă $P_t Ty = 0$. Așadar, T este cauzal.

Pe de altă parte, $\lim\limits_{t\to t_f} P_t = 1_H$, deci din relația $\mathrm{Re}\,\langle P_t x,\ Tx\rangle \geqslant 0$ valabilă pentru orice $t \in \mathscr{T}$, rezultă la limită (pentru $t \to t_f$) că $\mathrm{Re}\,\langle x,\ Tx\rangle \geqslant 0$, deci T este pozitiv.

(II)⇒(I). Presupunem T cauzal și pozitiv și fixăm $t \in \mathscr{T}$, $x \in H$ arbitrare. Fie $y = P_t x$. Atunci

$$0 \leqslant \mathrm{Re}\,\langle y,\ Ty\rangle = \mathrm{Re}\,\langle P_t x,\ TP_t\,x\rangle = \mathrm{Re}\,\langle x,\ P_t\,TP_t\,x\rangle =$$

$$= \mathrm{Re}\,\langle x, P_t Tx\rangle = \mathrm{Re}\,\langle P_t x,\ Tx\rangle,$$

ceea ce trebuia dovedit. S-a folosit în mod succesiv că T este pozitiv, cauzal ($P_tTP_t = P_tT$) și că operatorul P_t este autoadjunct.

Legătura între disipativitate și cauzalitate este dată în

Teorema IV.21. *Fie un operator liniar și continuu* $T : H \to H$. *Sînt echivalente afirmațiile :*

(I) T *este disipativ* ;

(II) T *este cauzal și contractiv* ($\| T\| \leqslant 1$).

Demonstrație. (I)⇒(II). Admitem că T este disipativ. Este atunci evident că T este cauzal. În plus, făcînd $t \to t_f$, rezultă $P_t \to 1_H$ și inegalitatea (4.87) rămîne adevărată la limită, obținîndu-se $\| Tx\| \leqslant \| x\|$, pentru orice $x \in H$, de unde $\| T\| \leqslant 1$.

(II)⇒(I). Pentru orice $t \in \mathscr{T}$, $u \in H$ avem

$$\| P_tu\|^2 = \langle P_tu,\ P_t u\rangle = \langle u,\ P_tP_tu\rangle = \langle u,\ P_tu\rangle \leqslant \| u\| \cdot \| P_tu\|,$$

de unde $\| P_tu\| \leqslant \|u\|$. Cum T este cauzal, rezultă

$$\| P_tTx\| = \| P_tTP_t\, x\| \leqslant \| TP_t\, x\|,\ (\forall)x \in H,$$

și fiindcă $\| T\| \leqslant 1$, se obține $\| P_tTx\| \leqslant \| P_tx\|$, deci T este disipativ.

Corolar. *Un operator* $T : H \to H$ *pasiv și unitar este cauzal și disipativ ; în plus,* $\| Tx\| = \| x\|$, $(\forall)x \in H$.

Demonstrație. Deoarece T este pasiv, el va fi cauzal și deoarece $T^*T = 1_H$, rezultă $\| T\| \leqslant 1$, deci T este disipativ. În plus

$$\| Tx\|^2 = \langle Tx,\ Tx\rangle = \langle x,\ T^*\, Tx\rangle = \| x\|^2,\ \ (\forall)x \in H.$$

9.2. **Observații.** Definițiile 9.1 își au corespondentul în cadrul punctului de vedere distribuțional. Astfel, pasivitatea (respectiv disipativitatea) unui operator corespunde pasivității în formalismul de imitanță (5.3) [respectiv pasivității în formalismul de repartiție (5.4)]. Faptul că domeniul de definiție și domeniul de valori ale operatorilor considerați aici coincid face ca rezultatele să difere puțin de rezultatele similare din teoria rețelelor (de exemplu, teoremele IV.3 și IV.20).

9.3. **Exemple.** (a) Fie $H = \mathbb{C}^n$ cu produsul scalar uzual $\left(\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i\, \overline{w}_i \right)$ și rezoluția $\mathscr{R} = \{p_k\}_{0 \leqslant k \leqslant n}$, $p_0 = 0$ și pentru $1 \leqslant k \leqslant n$, $p_k : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $p_k\,(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, dacă $x = (x_1, x_2, \ldots x_n)$. În acest caz, un operator $T : H \to H$ este pasiv (respectiv disipativ) dacă și numai dacă $(\forall)k$, $1 \leqslant k \leqslant n$ și $(\forall)x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, notînd $y = Tx = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, avem $\operatorname{Re} \sum_{i=1}^{k} x_i\, \overline{y}_i \geqslant 0$ $\left(\text{respectiv} \sum_{i=1}^{k} |\, x_i|^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} |\, y_i|^2 \right)$,

Acest fapt rezultă direct din relațiile (4.86), (4.87). Se dau ușor exemple de operatori pasivi care nu sînt disipativi (și reciproc), folosind faptul că un operator T ca mai sus este cauzal, dacă și numai dacă matricea sa asociată în baza canonică M_T este triunghiulară inferior.

(b) Fie $H = L_2$, cu rezoluția uzuală definită cu ajutorul trunchierilor și un operator $T : L_2 \to L_2$, $x \to h*x$, unde h este un semnal fixat (din $L_1 \cap L_2$, cu suport pozitiv) ; evident T este cauzal. Fie $x_t = P_t(x)$, pentru orice $t \in \mathbb{R}$ și $x \in L_2$; fie $X_t(\omega)$ și $H(\omega)$ transformatele Fourier ale lui x_t și h. Atunci pentru orice $x \in L_2$ avem

$$\langle P_t\, x,\ Tx\rangle = \langle x_t,\ h*x\rangle = \langle x_t\, ,\ h*x_t\rangle,$$

deoarece T este cauzal. Conform relației lui Parseval, rezultă

$$\langle x_t,\ h*x_t\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)\, |X_t(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega \geqslant 0.$$

Conform cu (4.86), rezultă că T este pasiv dacă și numai dacă $\operatorname{Re} H(\omega) \geqslant 0$ pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$.

În cazul mai general al unui operator $L_2^n \to L_2^n$, $x \to \mathbf{H}*x$ de convoluție cu o matrice $n \times n$, $\mathbf{H}(t)$ avînd elementele funcții din $L_1 \cap L_2$ cu suport pozitiv, notînd cu $H(\omega)$ matricea transformatelor Fourier, rezultă că operatorul respectiv este pasiv dacă și numai dacă matricea hermitică $\mathbf{H}(\omega) + \mathbf{H}^*(\omega)$ este pozitiv semidefinită.

(c) Reluînd exemplul (b) în varianta discretă, fie $H = l_2$ și $T : l_2 \to l_2$ operatorul de convoluție cu un semnal discret $h \in l_1$ cauzal [$h(n) = 0$ pentru $n < 0$], deci $Tx = h*x$, $(\forall)x \in l_2$. În acest caz, rezultă că T este pasiv dacă și numai dacă $\operatorname{Re} L_h(z) \geqslant 0$ ori de cîte ori $|z| = 1$, unde $L_h(z)$ este z-transformata lui h (definită în III.2.1).

(d) Considerăm spațiul Hilbert real $H = L_2\,[0, \infty)$, cu rezoluție uzuală și fie operatorii

$T_1 : H \to H$, $x(t) \mapsto z(t)$ = soluția ecuației $z' + az = x(t)$, $z(0) = z_0$ ($a > 0$, z_0 fiind constante reale date),

$$T_2 :\ H \to H,\ u(t) \mapsto u(t)\ \sigma(u(t)) = \begin{cases} u(t), \text{ dacă } u(t) \geqslant 0, \\ 0, \quad \text{dacă } u(t) < 0. \end{cases}$$

Fie $T = T_2T_1$; atunci $(\forall)t \geqslant 0$ și $(\forall)x \in H$, avem

$$\langle P_t\, x,\ Tx\rangle = \langle P_t\, x,\ z(t)\ \sigma(z(t))\rangle = \langle P_t\, (z' + az),\ z(t)\ \sigma(z(t))\rangle =$$

$$= \int_0^t (z' + az) z\ \sigma(z(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^t z'(t)\ z(t) \sigma(z(t))\ dt + a \int_0^t z^2\ \sigma(z(t))\ \mathrm{d}t \geqslant$$

$$\geqslant \int_0^t z'(t)\ z(t) \sigma(z(t))\ \mathrm{d}t = \int_0^t G'(z(t))\ z'(t)\ \mathrm{d}t,$$

unde G este funcția

$$G(x) = \frac{x^2}{2}\ \sigma(x),\ \text{deci } \langle P_tx,\ Tx\rangle = G(z(t))\Big|_0^t = G(z(t)) - G(z(0)) \geqslant -\, G(z_0) = -\, G(z_0).$$

Dacă $z_0 < 0$, atunci operatorul T este pasiv.

Pe de altă parte, se verifică uşor că operatorul $T_1 T_2$ nu este pasiv.

Aşadar, în descompunerea unui sistem fizic în blocuri pasive, pentru a asigura proprietatea de pasivitate a sistemului, ordinea blocurilor este decisivă [11].

Relativ la inversarea operatorilor pasivi, poate fi util următorul rezultat [11].

Teorema IV.22. *Fie H un spaţiu Hilbert real cu rezoluţie şi $T : H \to H$ un operator liniar continuu cu proprietatea că există $c > 0$ şi $d > 0$ astfel încît* $(\forall)x \in H$, $(\forall)t \in \mathrm{T}$,

$$\| P_t(Tx) \| \leqslant c \| P_t x \| \text{ şi } \langle P_t x, Tx \rangle \geqslant d \| x \|^2 \text{ (deci } T \text{ este pasiv).}$$

Atunci T este inversabil şi T^{-1} este pasiv.

Demonstraţie. Mai întîi, se observă că

$$d \| x \|^2 \leqslant \langle P_t x, Tx \rangle \leqslant \langle x, P_t(Tx) \rangle \leqslant \| x \| \cdot \| P_t(Tx) \| \leqslant \| x \| c \| P_t x \| \leqslant c \| x \|^2,$$

pentru orice $x \in H$, deci $d \leqslant c$. Fie $(\forall)z \in H$ fixat şi

$$\varphi(x) = x + \frac{\mathrm{d}}{c^2} z - \frac{d}{c^2} T(x);$$

ecuaţia $T(x) = z$ se scrie echivalent $\varphi(x) = x$. Vom proba că aplicaţia $\varphi : H \to H$ este o contracţie şi pentru aceasta, se observă că $(\forall)x, x' \in H$, $(\forall)t \in \mathscr{T}$, avem

$$\| P_t \varphi(x) - P_t \varphi(x') \|^2 = \| P_t(x - x') - \frac{d}{c^2} P_t T(x - x') \|^2 =$$

$$= \| P_t(x - x') \|^2 + \frac{d^2}{c^4} \| P_t T(x - x') \|^2 - 2 \frac{d}{c^2} \langle P_t(x - x'), T(x - x') \rangle \leqslant$$

$$\leqslant \| x - x' \|^2 \left(1 + \frac{d^4}{c^4} - 2 \frac{d^2}{c^2} \right) = \| x - x' \|^2 \left(1 - \frac{d^2}{c^2} \right)^2$$

şi făcînd $t \to t_f$, rezultă $P_t \to 1_H$, de unde

$$\| \varphi(x) - \varphi(x') \| \leqslant \left(1 - \frac{d^2}{c^2} \right) \| x - x' \|,$$

deci φ este contracţie. Aplicînd lema contracţiei, ecuaţia $\varphi(x) = x$, adică $T(x) = z$ are soluţie unică $x \in H$, deci $x = T^{-1}(z)$. Apoi $\langle P_t z, T^{-1} z \rangle \geqslant d \| T^{-1} z \|^2$, $(\forall)z \in H$, deci T^{-1} este pasiv.

9.4. **Legătura între pasivitate şi disipativitate.** Fixăm din nou un spaţiu Hilbert H cu o rezoluţie fixată şi un operator liniar continuu $T : H \to H$. Un operator liniar continuu $S : H \to H$ cu proprietatea că

$$T - 1_H = S(T + 1_H) \tag{4.88}$$

se numeşte *operator de repartiţie* asociat lui T.

Dacă T este dat şi dacă $1_H + T$ este inversabil, atunci operatorul de repartiţie este unic determinat şi anume $S = (T - 1_H)(T + 1_H)^{-1} = (T + 1_H)^{-1}(T - 1_H)$. Am văzut că dacă $\mathbf{Z}(s)$ este matricea de impedanţă a unui multiport liniar şi invariant în timp şi dacă $\mathbf{S}(s)$ este matricea de repartiţie a multiportului, atunci $Z(s) - 1 = \mathbf{S}(s)[\mathbf{Z}(s) + 1]$, ceea ce justifică definiţia (4.88).

Teorema IV.23. *Fie $T : H \to H$ un operator liniar continuu şi S un operator de repartiţie asociat lui T.*

Dacă S este disipativ, atunci T este pasiv şi dacă în plus $T + 1_H$ este inversabil, are loc şi reciproca.

Demonstraţie. Fie $(\forall)x \in H$ fixat, $u = Tx + x$, $v = Tx - x$, deci $v = Su$. Pentru orice $t \in \mathscr{T}$, avem $\| P_t u \|^2 = \| P_t x \|^2 + \| P_t Tx \|^2 + 2\mathrm{Re}\langle P_t x, Tx \rangle$, $\| P_t v \|^2 = \| P_t x \|^2 + \| P_t Tx \|^2 - 2\mathrm{Re}\langle P_t x, Tx \rangle$ şi scăzînd aceste relaţii, rezultă relaţia $\| P_t u \|^2 - \| P_t v \|^2 = 4\mathrm{Re}\langle P_t x, Tx \rangle$. Dacă S este disipativ, atunci rezultă direct din ultima relaţie că T este pasiv. Reciproc, presupunem că T este pasiv şi fie $(\forall)u \in H$, $v = Su$; cum $T + 1_H$ este inversabil, există $x \in H$ astfel încît $u = (T + 1_H)x$ şi din relaţia anterioară rezultă că S este disipativ.

9.5. **Observaţii.** Multe sisteme fizice (incluzînd reţelele electrice) pot fi descrise prin operatori de transfer şi un rol important îl au tipurile canonice de operatori (de exemplu, cazul funcţiilor de transfer cu valori operatori egal mărginiţi se reduce la cazul contracţiilor prin înmulţire cu o constantă convenabilă). În acest sens, enunţăm următoarea teoremă de realizabilitate [19] : *Fie H un spaţiu Hilbert (complex, cu conjugare) şi $S(s)$ o funcţie olomorfă $\{\mathrm{Re}\, s > 0\} \to \mathscr{L}(H)$ cu valori contracţii ale lui H. Atunci* : a) *de îndată ce S este pur contractivă* (i.e. $\| S(1)x \| < \| x \|$, $(\forall)x \in H$) *şi $S(\bar{s}) = \overline{S(s)}$*, $\mathrm{Re}\, s > 0$, *există un spaţiu Hilbert $\mathscr{H}$ şi operatori liniari continui $S_{11} : H \to H$, $S_{12} : \mathscr{H} \to H$, $S_{21} : H \to \mathscr{H}$, $S_{22} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ astfel ca operatorul $H \oplus \mathscr{H} \to H \oplus \mathscr{H}$, $(u, v) \mapsto (S_{11}u + S_{12}v, S_{21}u + S_{22}v)$ să fie unitar surjectiv şi în plus*

$$S(s) = S_{11} + S_{12} z (1 - S_{22} z)^{-1} S_{21}, \text{ unde } z = \frac{s - 1}{s + 1}: \tag{4.89}$$

b) *spațiul H admite o descompunere ortogonală* $H = H_1 \oplus H_2$ *astfel ca* $S(s)H_1 \subset H_1$, $S(s)H_2 \subset H_2$, Re $s > 0$, *iar* $S(s)$ *este pur contractivă pe* H_1 *și unitară constantă pe* H_2. Este binecunoscut că orice matrice unitară constantă poate fi realizată efectiv, sintetizată prin circuite [20] și astfel, punctul b) anterior arată că problema realizabilității revine la a construi circuite cu funcția de transfer $S(s)$ pur contractivă dată ; în cazul finit dimensional, $S(s)$ este o matrice $n \times n$, olomorfă în $\{\text{Re } s > 0\}$ și se calculează blocurile S_{11}, S_{12}, S_{21}, S_{22}, se construiește $(n + m)$-portul ,$m = \dim H$, având ca matrice de repartiție $\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, în lungul ultimelor m porți plasînd cîte un inductor unitate, cu funcția de repartiție $\frac{s-1}{s+1}$. Atunci circuitul obținut are ca matrice de repartiție $S(s)$ dat de (4.89).

O altă direcție de cercetare în studiul operatorilor de transfer cu aplicații în geofizică a fost generată prin lucrarea [9].

Se pot dezvolta algoritmi pentru sinteza circuitelor liniare pasive, implementabili pe calculator, de tipul Ho [12, 15].

BIBLIOGRAFIE

1. Anderson, B. D., Newcomb, R. W. *Linear passive networks* (functional theory) Proc. IEEE, vol. 64, Nr. 1, 1976, pp. 72—88.
2. Andreian-Cazacu, C. *Teoria funcțiilor de mai multe variabile complexe.* București, Editura didactică și pedagogică, 1971 ; Berlin, Verlag, 1975.
3. Balabanian, N., Bickart, T. *Teoria modernă a circuitelor electrice.* București, Editura tehnică, 1974.
4. Beltrami, E. J., Wohlers, M. R. *Distributions and the boundary values of analytic functions.* New York, Academic Press, 1966.
5. Bremerman, H. *Distributions, complex variables and Fourier transforms.* Addison-Wesley, Massachusetts, 1965.
6. Carlin, H. J. *Network theory without circuit elements.* Proc. IEEE, vol. 55, Nr. 4, 1967, pp. 482—497.
7. Cartianu, Gh., Constantin, I. *Sinteza în domeniul frecvență.* București, Editura Academiei R.S.R., 1974.
8. Călin, S., Belea, C. *Sisteme automate complexe.* București, Editura tehnică, 1974.
9. Ceaușescu, Z. *On intertwining dilations,* I. Acta Scient. Math., 38, pp. 281—290, 1976.
10. Colojoară, I. *Elemente de teorie spectrală.* București, Editura Academiei R.S.R., 1968.
11. Desoer, Ch. A., Vidyasagar, M. *Feedback systems ; input-output properties.* New York, Academic Press, 1975.
12. Helton, J. W. *The characteristic functions of operator theory and electrical network realization.* Indiana Univ. Math. J. 22, Nr. 5, 1972, pp. 403—414.
13. Helton, J. W. *Discrete-time systems, operator models and scattering theory.* J. Functional Analysis, vol. 16, 1974, pp. 15—38.
14. Kalman, R. E. *Mathematical description of linear dynamical systems.* J. Siam of control, vol. 1, 1963, pp. 159—192.
15. Kalman, R. E., Falb, P. L., Arbib, M. A. *Teoria sistemelor dinamice.* București, Editura tehnică, 1975.
16. Levan Nhan. *The Nagy-Foias operator models network and systems.* IEEE Trans on circuits and systems, Nr. 6, june 1976, pp. 335—343.

17. Mateescu, Ad. *Analiza și sinteza circuitelor.* București, Editura didactică și pedagogică, 1975.
18. Mateescu, Ad., Stanomir, D. (coordonatori). *Probleme de teoria circuitelor.* București, Editura tehnică, 1976.
19. Nagy, B. Sz., ș.a. *Harmonic analysis of operators on Hilbert space,* Amsterdam, North Holland, 1970.
20. Newcomb, R. W. *Linear multiport synthesis.* New York, McGraw Hill, 1966.
21. Nicolau, E. *Tipuri de dipoli electrici elementari pasivi, fizic realizabili.* Studii și cerc. Energetică și Electrotehnică, 22, 1972, pp. 423—431.
22. Pham, F. *Hyperfunctions and theoretical physics.* Berlin, Springer Verlag, 1975.
23. Porter, W. A. *Modern foundations of systems engineering.* New York, Macmillan, 1967.
24. Porter, W. A. *Some circuit theory concepts revisited.* Int. J. Control, vol. 12, 1970, pp. 433—448.
25. Preda, M., Cristea, P. *Analiza și sinteza circuitelor electrice.* București, Editura tehnică 1968.
26. Rulea, Gh. *Tehnica frecvențelor foarte înalte.* București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
27. Rulea, Gh. *Sinteza sistemelor adaptate semnalului.* Probleme de automatizare, VII, 157—167, București, Editura Academiei R.S.R, 1973.
28. Saeks, R. *Causality in Hilbert space.* SIAM review, vol. 12, 1970, pp. 357—383.
29. Saeks, R. *Resolution spaces, operators and systems.* Berlin, Springer Verlag, 1973.
30. de Santis, R. M. *Causality in systems analysis.* Proc. IEEE. vol. 64, 1, Jan. 1976.
31. Săvescu, M. *Circuite electrice liniare.* București, Editura didactică și pedagogică, 1968.
32. Schwartz, L. *Théorie des noyaux.* Proc. Int. Congress of mathem. 220—230, 1950.
33. Stanomir, D. *Cauzalitate și analiticitate în teoria semnalelor.* Probleme de automatizare, VII, 43—60, București, Editura Academiei RSR, 1973.
34. Stanomir, D. *Circuite electrice multiport.* București, Lit. IPB, 1974.
35. Stanomir, D., Stănășilă, O. *Asupra matricelor olomorfe real-raționale.* Bul. IPB, Seria Electrotehnică, Nr. 4, 1978, pp. 1—7.
36. Stanomir, D., Stănășilă, O. *Realizabilitate, puncte de vedere distribuțional și operatorial.* AMC, București, Editura tehnică, 1980.
37. Vladimirov, V. S. *Obobscionnie funckții v matematiceskoi fizike.* Moscova, Nauka, 1976.
38. Willems, J. C. *Stability, instability, invertibility and causality.* Siam J. Control, vol. 7, Nr. 4, 1969, pp. 645—671.
39. Wohlers, M. R. *Lumped and distributed passive systems.* New York, Academic Press, 1969.
40. Youla, D. C., Castriota, D. C., Carlin, H. J. *Bounded-real scattering matrices and the foundations of linear passive network theory.* IRE Trans. Circuit theory CT — 6, 1959, pp. 102—124.
41. Zadeh, L. A., Desoer, Ch. A. *Linear system theory.* New York, McGraw Hill, 1963.
42. Zemanian, A. H. *A N-port realizability theory based in the theory of distributions.* IEEE Trans. Circuit theory CT—10, 1963, pp. 265—274.
43. Zemanian, A. H. *Realizability theory for continuous linear systems.* New York, Academic Press, 1972.

Capitolul V

STUDIUL SEMNALELOR ALEATOARE

A. CARACTERISTICI STATISTICE ALE SEMNALELOR ALEATOARE

Un rol central, atît în conducerea experimentelor cît și în analiza rezultatelor obținute în orice domeniu al tehnicii moderne, îl ocupă metodele de prelucrare statistică a datelor. Se poate spune că în natură nu pot exista semnale care să nu fie supuse unor perturbații aleatoare și ca atare, în teoria dezvoltată în capitolele precedente apare ca forțată ipoteza simplificatoare de eliminare a caracterului aleator al fenomenelor considerate. În acest capitol ne ocupăm de unele probleme specifice studiului semnalelor aleatoare, prin conjugare sistematică a aspectelor deterministice și statistice în descrierea matematică a acestora.

§ 1. Preliminarii

Reamintim cîteva rezultate din teoria probabilităților, atît pentru fixarea notațiilor, cît și pentru a puncta noțiunile utilizate cu precădere în teoria semnalelor. Vom căuta să reducem la minimum referirile la teoria abstractă a măsurii și vom adopta spiritul capitolelor anterioare, prin exemplificări concrete ale tuturor afirmațiilor teoretice.

1.1. **Tipuri de variabile aleatoare.** Fixăm un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathscr{K}, P)$; elementele lui Ω se numesc *evenimente elementare*, $\mathscr{K}$ este o σ-algebră de părți ale lui Ω numite *evenimente* (așadar $\emptyset$, $\Omega \in \mathscr{K}$, complementara oricărui eveniment este un eveniment și orice reuniune numărabilă sau intersecție numărabilă de evenimente

reprezintă un eveniment), iar P este o *măsură probabilistică* (adică o funcție $P : \mathscr{K} \to [0, 1]$ astfel încît $P(\emptyset) = 0$, $P(\Omega) = 1$ și dacă $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ este un șir de evenimente din $\mathscr{K}$ două cîte două incompatibile, atunci $P(\bigcup_{n\geqslant 1} A_n) = \sum_{n\geqslant 1} P(A_n)$). Pentru orice eveniment $E \in \mathscr{K}$, numărul real $P(E)$, cuprins între 0 și 1, se numește *probabilitatea lui* E [3, 10, 20].

Așadar, evenimentele care se pot produce în orice experiență fixată sînt concepute ca mulțimi observabile și sînt măsurabile prin probabilitatea lor, care idealizează frecvența apariților acelor evenimente în serii de repetări ale experienței respective.

Un exemplu tipic de cîmp de probabilitate se poate obține luînd $\Omega = [0, 1]$, $\mathscr{K}$ colecția submulțimilor măsurabile Lebesgue ale lui Ω (printre care se află și subintervalele lui Ω) și P măsura extinsă la $\mathscr{K}$, care asociază fiecărui subinterval $(\alpha, \beta] \subset [0, 1]$, lungimea $\beta - \alpha$ a intervalului respectiv. De asemenea, dacă se fixează o funcție $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ monoton crescătoare, continuă la dreapta și astfel încît $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$, atunci se poate considera cîmpul de probabilitate $(\mathbb{R}, \mathscr{K}, \mathrm{d}F)$, unde $\mathscr{K}$ este colecția mulțimilor măsurabile Lebesgue de pe dreapta reală și $\mathrm{d}F$ este extinderea măsurii care asociază fiecărui interval mărginit $(\alpha, \beta]$ numărul $F(\beta) - F(\alpha)$.

Dacă H este un spațiu metric oarecare, se notează cu $\mathscr{B}_H$ colecția mulțimilor boreliene pe H (deci cea mai mică σ-algebră de părți ale lui H care cuprinde mulțimile deschise din H). În cazul $H = \mathbb{R}^n$, $n > 1$, se consideră structura metrică euclidiană uzuală; cel mai important caz este $H = \mathbb{R}$ și scriem atunci $\mathscr{B}$ în loc de $\mathscr{B}_H$.

Reamintim că o funcție $\xi(\omega)$, $\xi : \Omega \to H$ se numește *variabilă aleatoare* (v.a.) cu valori în H dacă pentru orice $B \in \mathscr{B}_H$ mulțimea $\{\xi \in B\} \stackrel{\Delta}{=} \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\}$ este un eveniment, adică aparține lui $\mathscr{K}$. Din definiție rezultă că o funcție $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ (cu valori reale!) este o variabilă aleatoare dacă și numai dacă pentru orice numere reale $a < b$, mulțimea $\{a < \xi < b\}$ este un eveniment. Similar, o funcție vectorială $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ este v.a. (numită și vector aleator) atunci și numai atunci cînd componentele ei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ sînt variabile aleatoare $\Omega \to \mathbb{R}$, iar o funcție $\xi : \Omega \to \mathbb{C}$ este v.a. dacă și numai dacă $\mathrm{Re}\,\xi$, $\mathrm{Im}\,\xi$ sînt v.a. $\Omega \to \mathbb{R}$.

Dacă $\xi, \eta : \Omega \to \mathbb{R}$ sînt v.a., atunci $\xi + \eta$, $\xi - \eta$, $\xi\eta$, $|\xi|$ sînt de asemenea v.a.; în acest caz mulțimile $\{\xi < a\}$, $\{\xi > a\}$, $\{\xi = a\}$, $\{\xi \leqslant a\}$, $\{\xi < \eta\}$ etc., a fiind un număr real oarecare fixat, sînt evenimente.

O variabilă aleatoare $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ se consideră cunoscută nu atît prin valorile ei individuale, cît prin *funcția ei de repartiție*

$$F_\xi : \mathbb{R} \to [0, 1],\ x \mapsto P(\xi \leqslant x). \tag{5.1}$$

Această funcție este continuă la dreapta, monoton crescătoare, $F_\xi(-\infty)=0$, $F_\xi(\infty)=1$; de asemenea, $P(a<\xi\leqslant b)=F_\xi(b)-F_\xi(a)$ și $P(a<\xi<b)=F_\xi(b-0)-F_\xi(a)$.

În particular, rezultă că $F_\xi\in L_1^{loc}$ și deci F_ξ este o distribuție regulată, conform observației 2.5 din cap. II. Ea poate fi derivată totdeauna în sensul teoriei distribuțiilor și notăm $p_\xi=F_\xi'$ (aceasta este *densitatea de probabilitate a lui* ξ).

O v.a. $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ se numește ***continuă*** dacă funcția ei de repartiție F_ξ este absolut continuă și de clasă C^1 pe porțiuni; în acest caz densitatea ei de probabilitate $p_\xi=F_\xi'$ este continuă pe porțiuni și

$$p_\xi\geqslant 0,\ F_\xi(x)=\int_{-\infty}^{x}p_\xi(t)\,dt \text{ și, în particular, } \int_{-\infty}^{\infty}p_\xi(t)\,dt=1.$$

O v.a. $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ se numește *discretă* dacă ξ ia o mulțime cel mult numărabilă de valori $\{a_n\}$ cu probabilitățile $p_n=P(\xi=a_n)$, $n\geqslant 1$, $\sum_{n\geqslant 1}p_n=1$. În acest caz, folosind notațiile din cap. II, rezultă

$$F_\xi(x)=P(\xi\leqslant x)=\sum_{n,\,a_n\leqslant x}p_n=\sum_{n\geqslant 1}p_n\sigma(x-a_n),\ \text{deci } p_\xi(x)=\sum_{n\geqslant 1}p_n\,\delta(x-a_n).$$

Oricărei variabile aleatoare discrete i se asociază tabloul de repartiție

$$\xi\sim\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \dots & a_n & \dots\\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots\end{pmatrix}$$

Împărțirea variabilelor aleatoare în continue și discrete nu este exhaustivă și nici terminologia nu este unanim acceptată. Dealtfel se întîlnesc variabile aleatoare de tipul $\xi+\eta$ cu ξ continuă și η discretă.

1.2. **Exemple.** a) O variabilă aleatoare $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ se numește *uniform repartizată pe un interval* $[a,b]$ dacă are densitatea de probabilitate p_ξ definită prin

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & \text{dacă } x\in[a,b],\\ 0 & \text{în caz contrar,}\end{cases}$$

deci $p_\xi(x)=\dfrac{1}{b-a}\,[\sigma(x-a)-\sigma(x-b)]$ și, ca atare, ξ este continuă.

b) O variabilă aleatoare discretă $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ se numește *repartizată Poisson cu parametrul* $\lambda>0$ dacă ξ are tabloul de repartiție

$$\xi\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & n & \dots\\ p_0 & p_1 & \dots & p_n & \dots\end{pmatrix}$$

unde $p_n=\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $n\geqslant 0$. În acest caz se mai spune că ξ urmează *legea evenimentelor rare* și descrie fenomene în care succesul separat este puțin probabil. De exemplu, numărul de apeluri telefonice dintr-un interval de timp la un post telefonic se consideră repartizat Poisson; similar dacă numărul mediu de bruiaje într-o transmisie este λ, atunci se poate considera că probabilitatea ca într-o transmisie să apară n bruiaje este $\dfrac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$.

c) O variabilă aleatoare continuă $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ se numește *gaussiană* (sau *repartizată normal*) cu media m și dispersia σ^2 dacă are densitatea de probabilitate $p_\xi(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left[-\dfrac{1}{2\sigma^2}(x-m)^2\right]$, având ca grafic clopotul lui Gauss. Considerînd funcția lui Laplace $\Phi=\operatorname{erf} f$ a erorilor definită prin

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{u^2}{2}}du,$$

ale cărei valori sînt tabelate, rezultă că funcția de repartiție a lui ξ este $F_\xi(x)=\Phi\left(\dfrac{x-m}{\sigma}\right)$ și deci $P(a<\xi<b)=\Phi\left(\dfrac{b-m}{\sigma}\right)-\Phi\left(\dfrac{a-m}{\sigma}\right)$; în particular, $P(|\xi-m|<3\sigma)=P(m-3\sigma<\xi<m+3\sigma)=\Phi(3)-\Phi(-3)\approx 1$ și este aproape sigur că valorile lui ξ sînt concentrate în jurul lui m, la distanță cel mult 3σ (*regula lui* 3σ). Remarcăm că $\lim_{\sigma\to 0}F_\xi(x)=\delta(x-m)$, în convergența slabă (în $\mathscr{D}'$), fapt probat în cap. II, exemplul 4.3, (c), care arată că la limită ($\sigma\to 0$), ξ se apropie de o variabilă aleatoare discretă luînd valoarea m cu probabilitatea 1.

Atunci cînd un fenomen își datorează caracterul aleator mai multor factori independenți, se consideră că el urmează o repartiție gaussiană; aceasta este forma grosieră de enunțare a teoremei limită centrală și arată de ce multe fenomene fizice sînt supuse legii normale, de îndată ce ele sînt medii de sume de variabile aleatoare independente cu dispersii apropiate.

d) *Repartiția exponențială cu parametrul* $\lambda>0$ a unei variabile aleatoare $\xi:\Omega\to\mathbb{R}$ este definită prin funcția de repartiție $F_\xi(t)=(1-e^{-\lambda t})\cdot\sigma(t)$, σ fiind aici treapta unitate. Dacă un dispozitiv intră în funcțiune la momentul $t=0$, atunci este rezonabilă ipoteza că momentul (aleator!) al defectării lui este o variabilă aleatoare repartizată exponențial. Dacă dispozitivul are n componente independente C_i, $1\leqslant i\leqslant n$, și defectarea uneia (la momentul ξ_i cu parametrul λ_n) conduce la defectarea întregului dispozitiv [deci la momentul $\xi=\min(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n)$], atunci $P(\xi<t)=1-P(\xi\geqslant t)=1-P(\xi_1\geqslant t,\xi_2\geqslant t,\dots,\xi_n\geqslant t)=1-\prod_{i=1}^{n}P(\xi_i\geqslant t)=1-e^{-(\lambda_1+\dots+\lambda_n)t}$, deci ξ are de asemenea o repartiție exponențială.

e) O variabilă aleatoare continuă $\rho : \Omega \to [0, \infty)$ se numește *repartizată Rayleigh* dacă densitatea ei de probabilitate este de forma

$$p_\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Funcția ei de repartiție este evident

$$F_\rho(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Dacă ξ, η sînt variabile gaussiene independente cu media nulă, avînd dispersia σ^2 și dacă $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$, atunci ρ urmează legea Rayleigh. Dacă ξ, η nu au media nulă, atunci ρ are densitatea de probabilitate

$$p_\rho(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+m^2}{2\sigma^2}} J_0\left(\dfrac{mx}{\sigma^2}\right), & \text{dacă } x > 0, \\ 0, & \text{dacă } x \leqslant 0, \end{cases}$$

unde $m = \sqrt{(M\xi)^2 + (M\eta)^2}$, iar J_0 este funcția Bessel modificată de indice 0. Aceasta este *legea Rayleigh generalizată*.

Eșantionul luat la un moment dat pe anvelopa unui zgomot cu bandă îngustă este o variabilă aleatoare repartizată Rayleigh, iar eșantionul luat pe anvelopa sumei unui semnal sinusoidal cu un zgomot gaussian urmează legea Rayleigh generalizată [12].

f) Dăm în fine un exemplu de variabilă aleatoare „mixtă", care nu este nici continuă și nici discretă, în sensul definițiilor anterioare. Presupunem că un dispozitiv funcționează pe un interval de timp $[0, t_1]$ și că dacă acesta se defectează în această perioadă, este înlocuit definitiv. Ne propunem să determinăm legea de repartiție a timpului ξ scurs după momentul defectării dispozitivului (pe care îl notăm cu T și îl presupunem repartizat exponențial cu parametrul λ). Așadar,

$$\xi = \begin{cases} 0, & \text{dacă } T \geqslant t_1, \\ t_1 - T, & \text{dacă } T < t_1. \end{cases}$$

Dacă $t \leqslant 0$, atunci $F_\xi(t) = 0$ și dacă $t > 0$, atunci $F_\xi(t) = P(\xi \leqslant t) = P(t_1 - T \leqslant t) = P(T \geqslant t_1 - t) = 1 - P(T < t_1 - t)$. Așadar

$$F_\xi(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \leqslant 0, \\ 1, & \text{dacă } t \geqslant t_1, \\ e^{-(t\lambda_1 - t)}, & \text{dacă } 0 < t < t_1, \end{cases}$$

și densitatea de probabilitate a lui ξ este conform formulei (2.20), $F'_\xi(t) = p_\xi(t) = \lambda e^{-\lambda(t_1 - t)} + e^{-\lambda t_1}\delta(t)$, $t \in [0, t_1]$, astfel că ξ nu este nici continuă, nici discretă [11].

1.3. **Caracteristici statistice ale variabilelor aleatoare.** Fie $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare pe un cîmp de probabilitate $(\Omega, \mathcal{K}, P)$. Se spune că ξ este *simplă* dacă există o partiție cel mult numărabilă a lui Ω cu evenimente $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$ astfel încît ξ să fie constantă ($\xi = a_n$) pe fiecare A_n. Așadar $\xi(\omega) = \sum_{n \geqslant 1} a_n \chi_{A_n}(\omega)$, $(\forall)\omega \in \Omega$. Dacă seria numerică $\sum_{n \geqslant 1} |a_n| P(A_n)$ este convergentă, atunci se notează $I(\xi) \overset{\Delta}{=} \sum_{n \geqslant 1} a_n P(A_n)$; evident $|I(\xi)| \leqslant \sup_{\omega \in \Omega} |\xi(\omega)|$. Dacă ξ este v.a. oarecare, atunci se notează

$$J(\xi) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{k}{n} P\left(\frac{k}{n} \leqslant \xi < \frac{k+1}{n}\right) \leqslant \infty$$

și avem $J(\xi) = \lim_{n \to \infty} I(\xi_n)$, de îndată ce ξ_n sînt v.a. simple convergînd uniform către ξ și există $I(\xi_n)$, $n \geqslant 1$; ξ se numește *integrabilă* (Lebesgue) dacă $J(|\xi|) < \infty$ și în acest caz se notează

$$\int_\Omega \xi(\omega) P(d\omega) \overset{\Delta}{=} J(\xi). \tag{5.2}$$

Dacă ξ este simplă ca mai sus și dacă există $I(\xi)$, atunci [1, 10, 18]

$$\int_\Omega \xi(\omega)\, P(d\omega) = I(\xi) = \sum_{n \geqslant 1} a_n \cdot P(A_n).$$

De exemplu, pentru $\Omega = [0, 1]$ (cu structura de cîmp de probabilitate indicată în 1.1), rezultă că orice funcție integrabilă Riemann $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ este integrabilă în sensul anterior (5.2) și în plus

$$\int_\Omega f(\omega)\, P(d\omega) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

În teoria probabilităților, rostul principal al integralei Lebesgue este acela de a putea defini riguros și în mod unificat (pentru cazul continuu sau discret) conceptele de medie, dispersie, momente etc. pentru variabile aleatoare fixate. Se spune că o v.a. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *are medie* dacă ea este integrabilă Lebesgue și, în acest caz, numărul real

$$M\xi \overset{\Delta}{=} \int_\Omega \xi(\omega)\, P(d\omega) \tag{5.3}$$

se numește *media lui* ξ. Mulțimea tuturor variabilelor aleatoare avînd medie se notează $L_1(\Omega)$. Evident, dacă $\xi, \eta \in L_1(\Omega)$ și $a, b \in \mathbb{R}$ sînt constante, atunci $a\xi + b\eta \in L_1(\Omega)$ și $M(a\xi + b\eta) = a(M\xi) + b(M\eta)$. Se poate defini de asemenea $L_2(\Omega)$ ca mulțimea tuturor v.a. $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ astfel încît $\xi^2 \in L_1(\Omega)$ și se verifică imediat că $L_2(\Omega)$ este un subspațiu liniar al lui $L_1(\Omega)$. În mod sistematic vom identifica două variabile aleatoare care coincid a.p.

Pentru orice $\xi \in L_2(\Omega)$ se poate defini *dispersia* lui ξ ca fiind

$$D\xi \stackrel{\Delta}{=} M(\xi^2) - (M\xi)^2 = M(\xi - M\xi)^2 = \int_\Omega (\xi - M\xi)^2 P(\mathrm{d}\omega). \quad (5.4)$$

Dacă $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^p$ este o v.a. fixată, se poate defini măsura probabilistică P_ξ pe $\mathbb{R}^p$ asociată lui ξ, prin care oricărei mulțimi boreliene $B \subset \mathbb{R}^p$ îi corespunde numărul $P(\xi^{-1}(B))$. Dacă $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ este o funcție boreliană oarecare [$B \subset \mathbb{R}$ boreliană $\Rightarrow f^{-1}(B)$ boreliană în $\mathbb{R}^p$], atunci variabila aleatoare $f \circ \xi : \Omega \to \mathbb{R}$ este integrabilă dacă și numai dacă f este integrabilă relativ la măsura P_ξ și în plus

$$M(f \circ \xi) = \int_{\mathbb{R}^p} f(\underline{x}) \cdot P_\xi(\mathrm{d}\underline{x}).$$

Luînd $p = 1$ și $f(x) = x$, rezultă $f \circ \xi = \xi$ și atunci

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot P_\xi(\mathrm{d}x), \text{ iar dacă } \xi \in L_2(\Omega),\ D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 P_\xi(\mathrm{d}x). \quad (5.5)$$

Dacă $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ este v.a. discretă, $\xi \sim \begin{pmatrix} a_1 a_2 \dots a_n \dots \\ p_1 p_2 \dots p_n \dots \end{pmatrix}$ și dacă seria $\sum_{n \geq 1} |a_n|\, p_n$ este convergentă, atunci, punînd $A_n = \{\xi = a_n\}$, $n \geq 1$, rezultă $M\xi = I(\xi) = \sum_{n \geq 1} a_n p_n$, conform cu (5.3), iar dacă seria $\sum_{n \geq 1} a_n^2 p_n$ este convergentă, atunci există $D\xi = \sum_{n \geq 1} a_n^2 p_n - (\sum_{n \geq 1} a_n p_n)^2$.

Dacă ξ este v.a. continuă, atunci măsura probabilistică P_ξ pe $\mathbb{R}$ coincide cu măsura $p(x)\mathrm{d}x$ asociată densității de probabilitate $p(x)$ a lui ξ și formula (5.5) devine

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x)\,\mathrm{d}x,\ D\xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M\xi)^2 p(x)\,\mathrm{d}x. \quad (5.6)$$

Un rezultat binecunoscut este inegalitatea lui Cebîșev: dacă $\xi \in L_2(\Omega)$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$, $P(|\xi - M\xi| \geq \varepsilon) < \frac{1}{\varepsilon^2} D\xi$, deci la dispersii mici, abateri mari de la medie sînt puțin probabile.

1.4. **Exemple.** a) În cazul exemplului 1.2, a) al unei variabile aleatoare uniform repartizate pe intervalul $[a, b]$ avem

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(a-b)^2}{12},$$

după un calcul imediat. În cazul 1.2, b), avem $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$ și în cazul 1.2, c) al variabilelor gaussiene, $M\xi = m$, $D\xi = \sigma^2$. Pentru o variabilă aleatoare ξ repartizată exponențial (exemplul 1.2, d)], rezultă $M\xi = \frac{1}{\lambda}$, $D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$.

Ne ocupăm acum de exemplul 1.2, f). În acest caz,

$$M\xi = \int_0^{t_1} [t \cdot \lambda \mathrm{e}^{-\lambda(t_1 - t)} + \mathrm{e}^{-\lambda t_1} \cdot t\delta(t)]\,\mathrm{d}t$$

și cum $t\delta(t) = 0$, rezultă

$$M\xi = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t_1} \int_0^{t_1} t\mathrm{e}^{\lambda t}\,\mathrm{d}t = t_1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t_1}.$$

Similar se găsește

$$D\xi = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{2t_1}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda t_1} - \frac{1}{\lambda^2}\mathrm{e}^{-2\lambda t_1}.$$

În general, pentru a decide dacă o variabilă aleatoare urmează una din legile standard (gaussiană, exponențială, Poisson etc.), se calculează media empirică, dispersia empirică etc. și se compară cu entitățile teoretice corespunzătoare ale diverselor legi-standard. În acest mod, se decide care este legea teoretică de repartiție a variabilei aleatoare în observație. Reamintim că dacă $x_1, x_2, \dots, x_N$ formează o selecție de valori ale unei variabile aleatoare ξ, atunci media empirică este $\overline{\xi} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N)$, iar dispersia empirică este $\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{\xi})^2$.

b) În mecanica cuantică, în studiul mișcării presupuse rectilinii a unei particule, necunoscutele nu sînt coordonata carteziană x și viteza v a particulei ca în cazul clasic, ci o funcție de poziție $\varphi(x)$ și o funcție de impuls $\psi(p)$, ambele aparținînd lui $L_1 \cap L_2$ astfel încît

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\,\mathrm{d}x = 1, \int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\psi(p)|^2\,\mathrm{d}p < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(p)|^2\,\mathrm{d}p = 2\pi.$$

și pentru orice $x_1 < x_2$, $p_1 < p_2$ să avem

$$P(x_1 \leqslant x \leqslant x_2) = \int_{x_1}^{x_2} |\varphi(x)|^2 \, dx, \; P(p_1 \leqslant p \leqslant p_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{p_1}^{p_2} |\psi(p)|^2 \, dp.$$

Din raţiuni fizice, ψ este transformata Fourier a lui φ, deci

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \, e^{-ipx} \, dx, \; (\forall)\, p \in \mathbb{R} \text{ şi } \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(p) \, e^{ipx} \, dp, \; (\forall) x \in \mathbb{R}.$$

Atunci φ, ψ sînt derivabile şi funcţia $x\varphi(x)\,\overline{\varphi}(x)$ tinde la zero cînd $|x| \to \infty$. Fără restrîngerea generalităţii, se poate presupune că $Mx = 0$, $Mp = 0$, deci pentru dispersii,

$$Dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi(x)|^2 \, dx \text{ şi } Dp = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 |\psi(p)|^2 \, dp.$$

În aceste condiţii, se poate stabili relaţia de incertitudine („principiul'' indeterminismului), anume inegalitatea $Dx \cdot Dp \geqslant \frac{1}{4}$. Pentru aceasta, considerăm integrala

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |xt\varphi(x) + \varphi'(x)|^2 \, dx,$$

cu parametrul real t. Evident, $I(t) \geqslant 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$. Prelucrăm această integrală:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [xt\varphi(x) + \varphi'(x)] \cdot [xt\,\overline{\varphi(x)} + \overline{\varphi'(x)}]^2 \, dx =$$

$$= t^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\varphi(x)|^2 \, dx + t \int_{-\infty}^{\infty} x[\varphi(x)\,\overline{\varphi'(x)} + \varphi'(x)\,\overline{\varphi(x)}] \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi'(x)|^2 \, dx.$$

Dar integrala din mijloc este egală cu

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\varphi\overline{\varphi})' \, dx = x\varphi(x)\,\overline{\varphi(x)} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2 \, dx = -1,$$

apoi prima integrală este Dx iar a treia integrală este egală cu Dp, deoarece transformata Fourier a lui φ' este $jp\psi(p)$ şi aplicăm relaţia (2.61). Aşadar, $I(t) = t^2 Dx - t + Dp$ şi, astfel, $I(t)$ este un trinom de gradul doi, pozitiv pentru orice t real. Atunci discriminantul trinomului este negativ, deci $1 - 4Dx \cdot Dp \leqslant 0$, ceea ce trebuia dovedit. Aşadar, dacă dispersia Dx este mică (adică poziţia particulei este bine localizată în jurul valorii medii), atunci din inegalitatea anterioară rezultă că impulsul nu are o proprietate similară şi reciproc, ceea ce explică „indeterminismul'' în studiul mişcării particulei [17, 12].

1.5. Independenţă, corelaţie. Fie $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p : \Omega \to \mathbb{R}$ variabile aleatoare şi $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ vectorul aleator asociat, care este o variabilă aleatoare $\Omega \to \mathbb{R}^p$. Funcţia $P_\xi = P_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_p}$ care asociază oricărui şir de p mulţimi boreliene $(B_1, B_2, \ldots, B_p)$ numărul real $P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \ldots, \xi_p \in B_p)$ se numeşte *repartiţia comună de probabilitate a lui* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$. Variabilele aleatoare $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ se numesc *independente* dacă

$$P_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_p}(B_1, B_2, \ldots, B_p) \; [= P(\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2, \ldots, \xi_p \in B_p)] \overset{\Delta}{=}$$

$$\overset{\Delta}{=} P_{\xi_1}(B_1) \cdot P_{\xi_2}(B_2) \ldots P_{\xi_p}(B_p), \; (\forall)\, (B_1, B_2, \ldots, B_p).$$

Funcţia $F_\xi : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F_\xi(\underline{x}) = P(\xi_1 \leqslant x_1, \xi_2 \leqslant x_2, \ldots, \xi_p \leqslant x_p), \qquad \underline{x} = (x_1, \ldots, x_p),$$

se numeşte *funcţia de repartiţie comună a lui* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$. În practică este preferabilă indicarea lui P_ξ în locul lui F_ξ.

Ne restrîngem, pentru a simplifica notaţia, la cazul $p = 2$ şi fie ξ, η v.a. $\Omega \to \mathbb{R}$. Se spune că ξ, η *au densitate comună de probabilitate* dacă există o funcţie $p_{\xi\eta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ pozitivă, integrabilă pe $\mathbb{R}^2$ astfel încît pentru orice mulţime măsurabilă $M \subset \mathbb{R}^2$,

$$P((\xi, \eta) \in M) = \iint_M p_{\xi\eta}(x, y) \, dx \wedge dy.$$

Pentru orice mulţime boreliană $B \subset \mathbb{R}$, avem

$$P(\xi \in B) = P(\xi \in B, \eta \in \mathbb{R}) = P((\xi, \eta) \in B \times \mathbb{R}) =$$

$$= \iint_{B \times \mathbb{R}} p_{\xi\eta}(x, y) \, dx \wedge dy = \int_B dx \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y) \, dy = \int_B p_\xi(x) \, dx,$$

unde am notat

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y) \, dy, \quad (\forall)\, x \in B \; (\textit{prima densitate marginală}).$$

Similar se defineşte cealaltă densitate marginală

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y) \, dx.$$

Dacă ξ, η sînt independente, atunci se poate arăta că $p_{\xi\eta}(x, y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$, $(\forall)(x, y) \in \mathbb{R}^2$ și că $p_{\xi+\eta} = p_\xi * p_\eta$ (convoluție), adică

$$p_{\xi+\eta}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(t - z) \cdot p_\eta(z)\, dz \qquad \text{(cf. 2.38).}$$

Se numește *densitate de probabilitate a lui* η *condiționată de* ξ funcția $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$p_\eta(y/x) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\xi(x)};$$

este evident că

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(y/x)\, dy = \frac{1}{p_\xi(x)} \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y)\, dy = 1$$

și că

$$p_\eta(y) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) \cdot p_\eta(y/x)\, dx.$$

Situațiile limită de dependență între ξ și η sînt următoarele:

— dacă $p_\eta(y/x) = p_\eta(y)$, $(\forall)x, y \in \mathbb{R}$, atunci $p_{\xi\eta}(x, y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y)$ și ξ, η sînt independente; în acest caz, valoarea y luată de η nu depinde de valoarea x luată de ξ;

— dacă $p_\eta(y/x) = \delta(y - y_x)$, atunci legătura între ξ și η este totală, în sensul că valoarea y_x luată de η este determinată de valoarea x luată de ξ [2, 10].

O noțiune de mare utilitate este cea de corelație a două variabile aleatoare; spațiul $L_2(\Omega)$ are o structură de spațiu Hilbert relativ la produsul scalar $\langle \xi, \eta \rangle = M(\xi\eta)$, $(\forall)\xi, \eta \in L_2(\Omega)$.

Vom nota $\overset{\circ}{\xi} = \xi - M\xi$ pentru orice $\xi \in L_2(\Omega)$. Se numește *corelație* (sau *covarianță*) *a lui* ξ *și* η scalarul

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) \overset{\Delta}{=} \langle \overset{\circ}{\xi}, \overset{\circ}{\eta} \rangle = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta) = M(\xi\eta) - (M\xi)(M\eta). \tag{5.7}$$

Dacă ξ, η au valori complexe, atunci $\langle \xi, \eta \rangle = M(\xi\bar{\eta})$ și $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = M(\xi\bar{\eta}) - (M\xi)(M\bar{\eta})$. Așadar

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = \iint_{\mathbb{R}^2} (x - M\xi)(y - M\eta)\, p_{\xi\eta}(x, y)\, dx \wedge dy.$$

Evident, $\operatorname{cov}(\xi, \xi) = M(\xi^2) - (M\xi)^2 = D\xi$; notînd $\sigma_\xi = \| \overset{\circ}{\xi} \|$ abaterea medie pătratică [adică norma lui $\overset{\circ}{\xi}$ în $L_2(\Omega)$], rezultă deci că $D\xi = \sigma_\xi^2$. Din inegalitatea lui Schwartz rezultă direct că $|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \leqslant \sigma_\xi \sigma_\eta$ pentru orice v.a. ξ, $\eta \in L_2(\Omega)$.

Definind *coeficientul de corelație a lui* ξ, η prin

$$r_{\xi\eta} = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta},$$

rezultă că $|r_{\xi\eta}| \leqslant 1$ (în ipoteza că σ_ξ, σ_η sînt nenule). Dacă $r_{\xi\eta} = \pm 1$, vectorii $\overset{\circ}{\xi}$, $\overset{\circ}{\eta}$ rezultă coliniari în $L_2(\Omega)$, deci $\overset{\circ}{\eta} = a\overset{\circ}{\xi}$ cu $a \in \mathbb{R}$, adică η depinde liniar de ξ, anume $\eta = a\xi + b$, cu $b = M\eta - a \cdot M\xi$.

ξ și η se numește *necorelate* dacă $\operatorname{cov}(\xi, \eta) = 0$. Evident, dacă ξ și η sînt independente, atunci ele sînt necorelate, conform cu (5.7), dar reciproca nu este adevărată.

Dacă vectorul aleator (ξ, η) este gaussian, adică densitatea comună de probabilitate este de forma

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_\xi \sigma_\eta \sqrt{1 - r^2}}\, e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_\xi^2} - \frac{2r(x-a)(y-b)}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_\eta^2}\right]}, \tag{5.8}$$

$r = r_{\xi\eta}$ fiind coeficientul de corelație, atunci reciproca afirmației anterioare este adevărată deoarece pentru $r = 0$ se obține

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\, \sigma_\xi\, \sigma_\eta}\, e^{-\left[\frac{(x-a)^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{(y-b)^2}{\sigma_\eta^2}\right]} = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y),$$

deci ξ, η sînt independente. Covarianța ca și coeficientul de corelație dau o indicație asupra dependenței lui ξ și η; dacă $r_{\xi\eta} = \pm 1$, legătura este totală, iar dacă $r_{\xi\eta} = 0$, atunci ξ și η au o dependență probabilistică mai slabă.

Pentru orice v.a. ξ, densitatea de probabilitate p_ξ aparține spațiului $\mathscr{S}'$ și se poate defini *funcția sa caracteristică* φ_ξ ca fiind transformata Fourier a lui p_ξ (în sensul teoriei distribuțiilor, conform capitolului II.10.5); dacă $p_\xi \in L_1(\mathbb{R})$, atunci

$$\varphi_\xi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\, e^{jux}\, dx.$$

De exemplu, dacă ξ ia numai o valoare a, cu probabilitatea 1, adică $p_\xi(x) = \delta(x-a)$, atunci $\varphi_\xi(u) = e^{-jau}$ [conform exemplului II. 10.7, d)]. Dacă ξ este v.a. gaussiană cu media 0 și dispersia 1, atunci $\varphi_\xi(u) = \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$.

De asemenea, pentru ξ din exemplul 1.2, f) avem

$$\varphi_\xi(u) = \int_0^{t_1} e^{jux}\,[\lambda e^{-\lambda(t_1-x)} + e^{-\lambda t_1}\delta(x)]\,dx = e^{-\lambda t_1} + \frac{\lambda(e^{jut_1} - e^{-\lambda t_1})}{\lambda + ju}.$$

Cele spuse anterior se extind fără dificultate la cazul vectorilor aleatori $\Omega \to \mathbb{R}^p$. De exemplu, dacă $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ sînt v.a. astfel încît densitatea comună de probabilitate $p_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_p}$ să fie o funcție din $L_1(\mathbb{R}^p)$, atunci se poate defini funcția caracteristică a vectorului $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p)$ ca fiind

$$\varphi_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \int_{\mathbb{R}^p} p_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_p}(x_1, x_2, \ldots, x_p)\, e^{j\sum_{k=1}^{p} u_k x_k}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_p.$$

Vectorul ξ este gaussian dacă $\xi_k \in L_2(\Omega)$, $1 \leqslant k \leqslant p$, și dacă

$$\varphi_\xi(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \exp\left[j\sum_{k=1}^{p}(M\xi_k)\,u_k - \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k,l\leqslant p}\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_l)\,u_k u_l\right].$$

§ 2. Clase de semnale aleatoare

Fie $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ un cîmp de probabilitate și $\mathcal{T}$ o mulțime timp. Notăm cu $\mathcal{V}$ mulțimea tuturor variabilelor aleatoare $\Omega \to \mathbb{R}$ (teoria se poate dezvolta fără modificări esențiale și pentru variabile aleatoare cu valori complexe).

2.1. **Definiție.** Se numește *semnal aleator* orice funcție $\mathcal{T} \to \mathcal{V}$. Așadar pentru un semnal aleator fixat $\xi : \mathcal{T} \to \mathcal{V}$, fiecărui moment $t \in \mathcal{T}$ i se poate asocia o v.a. ξ_t (numită *eșantion la momentul* t al semnalului), deci un semnal aleator ξ este o familie $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ de variabile aleatoare $\Omega \to \mathbb{R}$, indexată după toate momentele $t \in \mathcal{T}$. Funcția $\Omega \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$, $(\omega, t) \mapsto \xi_t(\omega)$ este notată tot cu ξ.

Noțiunea de semnal aleator coincide cu cea de proces aleator (sau stochastic); am ales terminologia mai bine adaptată scopului acestei lucrări. Printre semnale aleatoare desprindem pe cele continue (dacă $\mathcal{T}$ este un interval în $\mathbb{R}$) și pe cele discrete (dacă $\mathcal{T}$ este o submulțime a lui $\mathbb{Z}$); acestea din urmă sînt numite uneori *lanțuri* de variabile aleatoare [1, 7].

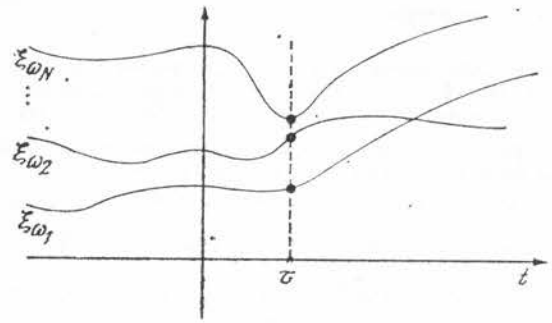


Fig. 5.1. Selecție de traiectorii ale unui semnal aleator $\xi_t(\omega)$ și eșantioanele selecției la momentul τ.

Pentru orice semnal aleator ξ și pentru orice eveniment elementar $\omega \in \Omega$ se poate defini un semnal deterministic

$$\xi_\omega : \mathcal{T} \to \mathbb{R},\ t \to \xi_t(\omega),$$

numit *traiectorie* (*realizare* sau *selecție*) a lui ξ. Orice realizare apare ca rezultat al unei observări a semnalului și este funcție deterministică de timp. Așadar, semnalul ξ poate fi privit și ca o familie $\{\xi_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ de semnale deterministice; acest fapt arată că semnalele aleatoare constituie o extindere sensibilă a semnalelor deterministice.

Fixînd o selecție $\xi_{\omega_1}, \xi_{\omega_2}, \ldots, \xi_{\omega_N}$ de traiectorii ale unui semnal aleator ξ, pentru orice moment $\tau \in \mathcal{T}$, valorile $\xi_\tau(\omega_1)$, $\xi_\tau(\omega_2), \ldots, \xi_\tau(\omega_N)$ se numesc *eșantioanele selecției* la momentul τ.

Dacă $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ (vom scrie pe scurt ξ_t) este un semnal aleator, atunci pentru orice momente $t_1, t_2, \ldots, t_p \in \mathcal{T}$ se poate defini *repartiția de probabilitate a semnalului* ξ *la momentele* $t_1, t_2, \ldots, t_p$ ca fiind repartiția comună de probabilitate $P_{t_1, t_2, \ldots, t_p}$ a variabilelor aleatoare $\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_p}$ (în sensul precizat la punctul 1.5); așadar

$$P_{t_1, t_2, \ldots, t_p}(B) = P\{(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_p}) \in B\},$$

pentru orice mulțime borelianăă $B \subset \mathbb{R}^p$. Măsura probabilistică $P_{t_1, t_2, \ldots, t_p}$, definită astfel pentru orice număr finit de momente

fixate $t_1, t_2, \ldots, t_p$, constituie un instrument util de lucru și studiul unui semnal aleator începe cu determinarea acestor repartiții de probabilitate. Conform unei teoreme binecunoscute a lui Kolmogorov, există totdeauna un semnal aleator avînd repartiții de probabilitate prescrise.

2.2. **Exemple.** a) Orice semnal deterministic, adică orice funcție $f: \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ poate fi privit ca semnal aleator $\xi: \Omega \times \mathscr{T} \to \mathbb{R}$, $(\omega, t) \mapsto f(t)$, avînd o singură traiectorie. Pentru orice $t_1, t_2, \ldots, t_p \in \mathscr{T}$, repartiția semnalului la aceste momente este $P_{t_1, t_2, \ldots, t_p}(B) = P\{f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_p)) \in B\}$, pentru orice mulțime boreliană $B \subset \mathbb{R}^p$. În particular, densitatea de probabilitate la momentul t este $p_t(x) = \delta(x - f(t))$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Acest exemplu poate fi generalizat în modul următor: se consideră variabile aleatoare $\alpha_k: \Omega \to \mathbb{C}$ și funcții $f_k: \mathscr{T} \to \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$; punînd $\xi_t(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\omega) f_k(t)$, se obține un semnal aleator ξ_t, care cuprinde drept cazuri particulare polinoamele algebrice aleatoare $\sum_{k=0}^{n} a_k(\omega) t^k$ și polinoamele trigonometrice aleatoare

$$\frac{a_0(\omega)}{2} + \sum_{k=0}^{n} [a_k(\omega) \cos kt + b_k(\omega) \sin kt].$$

b) Fie A, α, φ v.a. independente, $A \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$ avînd aceeași funcție de repartiție, iar φ avînd repartiția uniformă pe intervalul $[0, 2\pi)$ [conform exemplului 1.2, a)]. Se poate defini atunci *semnalul aleator sinusoidal* cu amplitudinea, frecvența și faza aleatoare

$$\xi_t = A \sin(\alpha t + \varphi), \quad t \in \mathscr{T} = \mathbb{R},$$

ale cărui traiectorii sînt semnale sinusoidale uzuale [19].

O proprietate remarcabilă a acestuia este aceea că repartițiile lui nu se modifică la nici o translație de timp, adică

$$P_{t_1+\tau, \ldots, t_p+\tau} = P_{t_1, \ldots, t_p}, \quad (\forall) t_1, \ldots, t_p, \tau \in \mathscr{T}.$$

Într-adevăr, avem de arătat că pentru orice $B \subset \mathbb{R}^p$ boreliană are loc egalitatea

$$P\{(A \sin(\alpha t_1 + \alpha\tau + \varphi), \ldots, A \sin(\alpha t_p + \alpha\tau + \varphi)) \in B\} =$$

$$= P\{(A \sin(\alpha t_1 + \varphi), \ldots, A \sin(\alpha t_p + \varphi)) \in B\}.$$

Considerăm mulțimea boreliană din $\mathbb{R}^3$

$$C = \{(x, y, z) \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z < 2\pi,\ (x \sin(yt_1 + z), \ldots, x \sin(yt_p + z)) \in B\}.$$

Pentru orice număr real r notăm cu $\overset{\blacktriangle}{r} \in [0, 2\pi)$ acel unic număr astfel încît $r - \hat{r}$ să fie un multiplu întreg de 2π; atunci egalitatea de demonstrat devine $P\{(A, \alpha, \widehat{\varphi + \alpha\tau}) \in C\} = P\{(A, \alpha, \varphi, \in C\}$. Din ipoteza de independență rezultă că $P_{A\alpha\varphi} = P_A P_\alpha P_\varphi$ și avem de probat egalitatea

$$\int_0^\infty P_A(x)\,dx \int_0^\infty P_\alpha(y)\,dy \cdot P_\varphi\{z \mid (x, y, \widehat{z + y\tau}) \in C\} =$$

$$= \int_0^\infty P_A(x)\,dx \int_0^\infty P_\alpha(y)\,dy \cdot P_\varphi\{z \mid (x, y, z) \in C\}.$$

Dar mulțimea $\{z \mid (x, y, \widehat{z + y\tau}) \in C\}$ se obține din mulțimea $\{z \mid (x, y, z) \in C\}$ prin translație cu $y\tau$ și reducere modulo 2π și cum repartiția lui φ este uniformă, ea nu se modifică prin translație, deci $P_\varphi\{z \mid (x, y, \widehat{z + y\tau}) \in C\} = P_\varphi\{z \mid (x, y, z) \in C\}$, ceea ce trebuia probat.

Asupra acestui exemplu vom reveni în mai multe rînduri.

c) Se numește *proces Poisson cu parametrul* $\lambda > 0$ orice semnal aleator ξ_t, $t \in \mathscr{T} = [0, \infty)$ astfel încît $\xi_0 = 0$, pentru orice momente $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, v.a. $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}$, $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ să fie independente și, în plus, pentru orice $0 \leqslant s \leqslant t$, v.a. $\xi_t - \xi_s$ să fie repartizată Poisson cu parametrul $\lambda(t - s)$, adică $P\{\xi_t - \xi_s = k\} = \frac{\lambda^k (t - s)^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$, $k \geqslant 0$ întreg [conform exemplului 1.2, b)]. Traiectoriile unui astfel de semnal sînt funcții în scară crescătoare și cu valori întregi. Dacă ξ_t reprezintă numărul de chemări la o stație telefonică pînă la momentul t (sau în alte sisteme de așteptare), se consideră de obicei că ξ_t este un proces Poisson.

d) *Proces Wiener* este orice semnal aleator w_t, $t \in \mathscr{T} = [0, \infty)$ astfel încît $w_0 = 0$, pentru orice momente $0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, v.a. $w_{t_1} - w_{t_0}$, $w_{t_2} - w_{t_1}, \ldots, w_{t_n} - w_{t_{n-1}}$ să fie independente și, în plus, pentru orice $0 \leqslant s \leqslant t$, v.a. $w_t - w_s$ să fie gaussiană (adică repartizată normal) cu media 0 și dispersia $t - s$ [conform exemplului 1.2, c)]. Poziția w_t la fiecare moment t a unei particule supuse la o mișcare browniană (pe o axă fixată) se consideră a fi un proces Wiener.

Un semnal aleator $\xi: \mathscr{T} \to \mathscr{X}$ se numește *gaussian* dacă pentru orice $t_1, t_2, \ldots, t_p \in \mathscr{T}$, vectorul aleator $(\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_p})$ este gaussian (conform cu 1.5). Orice proces Wiener este evident cu semnal gaussian, reciproca nefiind adevărată. Semnalele gaussiene descriu fenomene avînd un număr mare de cauze aleatoare independente (de exemplu, zgomotul termic al rezistențelor).

e) O altă clasă remarcabilă de semnale aleatoare ξ sînt cele markoviene, în care pentru orice moment fixat $\tau \in \mathscr{T} = \mathbb{R}$ viitorul ($t > \tau$) depinde de trecut ($t < \tau$) doar prin prezent ($t = \tau$), deci cunoscînd deja ξ_τ, determinarea lui ξ_t, $t > \tau$, este independentă de cunoașterea lui ξ_t, $t < \tau$. Mai precis, un șir de v.a. $\{\xi_n\}_{n \geqslant 1}$ se numește *lanț markovian* dacă repartiția lui ξ_{k+1} condiționată de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ ($k \geqslant 1$ arbitrar fixat) coincide cu repartiția lui ξ_{k+1} condiționată numai de ξ_k (prezentul este reprezentat aici de indicele k). Un semnal aleator $\xi: \mathscr{T} \to \mathscr{X}$, $\mathscr{T} = \mathbb{R}$ se numește *markovian* dacă pentru orice șir de momente $t_1 < t_2 < t_3 < \ldots$ șirul $\{\xi_{t_n}\}_{n \geqslant 1}$ este un lanț markovian [7]

f) Un semnal aleator $\xi : \mathcal{T} \to \mathcal{V}$, $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ se numește *cu creșteri independente* dacă pentru orice momente $t_0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_n$ din $\mathcal{T}$ v.a. $\xi_{t_1} - \xi_{t_0}$, $\xi_{t_2} - \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n} - \xi_{t_{n-1}}$ sînt independente. Dacă $\xi_t \in L_2(\Omega)$, $(\forall) t \in \mathcal{T}$ și pentru orice $t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant t_3$, avem $\operatorname{cov}(\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_2} - \xi_{t_1}) = 0$, semnalul ξ *are creșteri necorelate*. Evident, procesele Poisson și Wiener sînt cu creșteri independente. Dacă un semnal are creșteri independente, el are și creșteri necorelate (și reciproc în cazul semnalelor gaussiene, așa cum am văzut în 1.5).

§ 3. Funcția de covarianță a unui semnal aleator

Vom nota în cele ce urmează cu S_a mulțimea tuturor semnalelor aleatoare $\xi : \mathcal{T} \to L_2(\Omega)$; deci pentru orice $t \in \mathcal{T}$, ξ_t este o v.a. din $L_2(\Omega)$, în particular are medie și dispersie, anume

$$M(t) = M\xi_t \text{ și } D(t) = (D\xi_t) = M(\xi_t^2) - M(t)^2 = \sigma_t^2, \ (\forall) t \in \mathcal{T}.$$

Presupunem că variabilele aleatoare ξ_t au valori reale sau complexe.

3.1. **Definiție.** Fie $\xi \in S_a$ un semnal fixat. Pentru orice momente $s, t \in \mathcal{T}$ notăm

$$K(t, s) \stackrel{\Delta}{=} \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s).$$

Funcția $K : \mathcal{T} \times \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ se numește *funcția de covarianță a semnalului* ξ (notată uneori cu K_ξ și numită *funcție de corelație a lui* ξ).

Se poate de asemenea defini coeficientul de corelație al lui ξ la momentele $s, t \in \mathcal{T}$:

$$r_\xi(t, s) = r(\xi_t, \xi_s) = \frac{\operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s)}{\sigma_t \sigma_s}.$$

Dacă $\xi, \eta \in S_a$, atunci se poate defini

$$K_{\xi\eta}(t, s) \stackrel{\Delta}{=} \operatorname{cov}(\xi_t, \eta_s), \ (\forall) t, s \in \mathcal{T}.$$

În cazul în care $K_{\xi\eta} = 0$, se spune că semnalele aleatoare ξ, η sînt *necorelate* (sau *necoerente*).

Proprietățile imediate ale funcției de covarianță sînt concentrate în

Teorema V.1. *Fixăm un semnal aleator* $\xi \in S_a$. *Pentru orice* $t, s \in \mathcal{T}$ *avem:*

(a) $K(s, t) = M(\xi_s \overline{\xi_t}) - (M\xi_s) \cdot \overline{(M\xi_t)}$;

(b) $K(t, s) = \overline{K(s, t)}$;

(c) $D(t) = K(t, t) \geqslant 0$ *și* $|K(t, s)|^2 \leqslant D(t) \cdot D(s)$;

(d) *pentru orice* $t_1, \ldots, t_p \in \mathcal{T}$, $c_1, \ldots, c_p \in \mathbb{C}$, *suma* $\sum_{1 \leqslant k, l \leqslant p} c_k \bar{c}_l K(t_k, t_l)$ *este reală și pozitivă.*

Demonstrație. Relația (a) rezultă din (5.7), anume

$$K(s, t) = \langle \mathring{\xi}_s, \mathring{\xi}_t \rangle = M(\xi_s - M\xi_s)\overline{(\xi_t - M\xi_t)} =$$

$$= M(\xi_s \overline{\xi_t}) - (M\xi_s)\overline{(M\xi_t)}.$$

(b) rezultă direct din (a), reamintind că $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$ și $Mu = \langle u, 1 \rangle$ pentru orice $u, v \in L_2(\Omega)$. Dacă variabilele aleatoare ξ_t, $t \in \mathcal{T}$, au valori reale, atunci $K(t, s) = K(s, t)$.

Punctul (c) rezultă direct din definiții și din inegalitatea lui Schwartz.

(d) Considerăm variabila aleatoare $u = \sum_{k=1}^{p} c_k \xi_{t_k}$ care aparține evident lui $L_2(\Omega)$. Atunci suma respectivă este egală cu $\operatorname{cov}(u, u) = Du$ și deci este reală și pozitivă.

3.2. **Exemple.** a) Fie $f_k : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ funcții oarecare și $\alpha_k \in L_2(\Omega)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, variabile aleatoare necorelate două cîte două cu mediile m_k și dispersiile D_k. Considerăm semnalul aleator $\xi_t(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(\omega) \cdot f_k(t)$, considerat în exemplul 2.2, a). În acest caz, $M(t) = \sum_{k=1}^{n} m_k f_k(t)$ și

$$K(t, s) = \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s) = \sum_{1 \leqslant k, l \leqslant n} f_k(t) \cdot \overline{f_l(s)} \cdot \operatorname{cov}(\alpha_k, \alpha_l) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} D_k \cdot f_k(t) \cdot \overline{f_k(s)}, \text{ pentru orice } t, s \in \mathcal{T}.$$

Ca un caz particular, fie $n = 2$ și $\xi_t(\omega) = \alpha_1(\omega) \cdot \sin at + \alpha_2(\omega) \cdot \cos at$ cu $a > 0$ constant. Acest semnal reprezintă oscilațiile armonice de frecvență a, avînd amplitudinea și faza φ, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ aleatoare. În acest caz, $M(t) = m_1 \sin at + m_2 \cos at$ și $K(t, s) = D_1 \sin at \cdot \sin as + D_2 \cos at \cdot \cos as$.

Desigur, pentru un semnal deterministic $f: \mathscr{T} \to \mathbb{R}$, media este $M(t) = f(t)$, iar funcția de covarianță este identic nulă.

b) Considerăm semnalul aleator sinusoidal ξ din exemplul 2.2, b) cu A, α, φ v.a. independente din $L_2(\Omega)$. Deoarece în acest caz $P_{t+\tau} = P_t$, $(\forall)\, t, \tau \in \mathscr{T} = \mathbb{R}$, rezultă că $M(t+\tau) = M(t)$, $(\forall) t, \tau$, deci luînd $\tau = -t$, rezultă că $M(t) = M(0)$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$, adică media lui ξ este constantă. Așadar,

$$M(t) = M(\xi_0) = M(A \sin \varphi) = (MA) \cdot (M \sin \varphi) = (MA) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin z \, dz = 0.$$

În acest caz, funcția de covarianță este mai dificil de explicitat și va fi evaluată mai tîrziu.

c) Pentru un proces Poisson [exemplul 2.2, c)] avem

$$P\{\xi_t = k\} = \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t}, \; k \geqslant 0, \; t \geqslant 0,$$

deci $M(t) = M(\xi_t) = \sum_{k \geqslant 0} k \frac{\lambda^k t^k}{k!} e^{-\lambda t} = \lambda t$. Apoi, dacă $s \leqslant t$, atunci

$$K(t, s) = \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_s, \xi_s) + \operatorname{cov}(\xi_t - \xi_s, \xi_s) = D\xi_s + 0 = D\xi_s = \lambda s,$$

deoarece luînd momentele $0 \leqslant s \leqslant t$, rezultă că $\xi_t - \xi_s$, ξ_s sînt independente, deci necorelate; similar, dacă $s > t$, atunci $K(t, s) = \lambda t$, deci

$$K(t, s) = \lambda \cdot \min(t, s), \; (\forall)\, s, t \in \mathscr{T} = [0, \infty).$$

Se poate arăta printr-un raționament similar că pentru un proces Wiener [exemplul 2.2 d)] avem $M w_t = 0$ și $K(t, s) = \min(t, s)$ pentru orice $s, t \in \mathscr{T} = [0, \infty)$.

3.3. **Observație.** Fie $\xi \in S_a$ și $t, s \in \mathscr{T} = [0, \infty)$. Notînd cu p_t densitatea de probabilitate a variabilei aleatoare ξ_t și p_{ts} densitatea comună de probabilitate a vectorului aleator (ξ_t, ξ_s), rezultă că

$$M(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_t(x) \, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \xi_k(t),$$

$$D(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(t)]^2 \, p_t(x) \, dx \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} [\xi_k(t) - M(t)]^2, \tag{5.9}$$

$$K(t, s) = \iint_{\mathbb{R}^2} [x - M(t)] \cdot [y - M(s)] \cdot p_{ts}(x, y) \, dx \wedge dy \approx$$

$$\approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} [\xi_k(t) - M(t)] \, \overline{[\xi_k(s) - M(s)]},$$

unde $\xi_1, \ldots, \xi_N$ sînt realizări ale lui ξ (cu N suficient de mare). Formulele aproximative date aici permit evaluarea empirică a caracteristicilor statistice ale unui semnal aleator.

§ 4. Semnale staționare

Ideea de staționaritate a unui semnal este legată de faptul că în decursul timpului semnalul nu își modifică proprietățile; mai precis, repartițiile de probabilitate ale semnalului sînt invariante la translații de timp. În cele ce urmează, vom presupune că $\mathscr{T} = \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{Z}$ sau $\mathbb{N}$) și vom da un concept de staționaritate care să permită formularea unor proprietăți energetice remarcabile ale semnalelor.

4.1. **Definiție.** Un semnal aleator $\xi \in S_a$ se numește *staționar* dacă $M\xi_{t+\tau} = M\xi_t$ și $K(t + \tau, s + \tau) = K(t, s)$ pentru orice $t, s, \tau \in \mathscr{T}$.

Teorema V.2. *Fie $\xi \in S_a$ un semnal staționar. Atunci:*

(a) *media $M(t)$ a lui ξ este constantă;*

(b) *pentru orice s, $t \in \mathscr{T}$, $K(t) = \operatorname{cov}(\xi_{s+t}, \xi_s)$ este independentă de s și $K_{\xi\xi}(t, s) = K(t - s)$.*

Demonstrație. (a) Din definiția 4.1, făcînd $\tau = -t$, rezultă

$$M(t) = M\xi_t = M\xi_0 = M(0), \quad (\forall) t \in \mathscr{T}.$$

(b) Avem de arătat egalitatea $\operatorname{cov}(\xi_{s+t}, \xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_0)$ pentru orice $s, t \in \mathscr{T}$, adică $K(s + t, s) = K(t, 0)$, ceea ce rezultă din definiția 4.1, luînd $\tau = -s$ și înlocuind t cu $s + t$. Apoi

$$K_{\xi\xi}(t, s) \overset{\Delta}{=} \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s) = \operatorname{cov}(\xi_{s+(t-s)}, \xi_s) = K(t - s).$$

Funcția de o singură variabilă $K: \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ (sau $\mathbb{C}$), definită în teorema V.2, se numește *funcția de covarianță a lui* ξ și este notată uneori cu K_ξ. Folosind teoremele V.1, V.2, rezultă următorul

Corolar. $K(0) = D(t)$, $K(-t) = \overline{K(t)}$, $|K(t)| \leqslant K(0)$, $(\forall) t \in \mathscr{T}$.

Reținem că pentru un semnal staționar, media și dispersia sînt constante în timp.

4.2. **Exemple.** a) Orice semnal aleator constant $\xi_t = a(\omega)$, $t \in \mathscr{T}$ cu $a(\omega)$ v.a. este staționar. În acest caz, $M(t) = Ma$ și $K_\xi(t) = Da$, $(\forall)\, t \in \mathscr{T}$.

b) Considerăm acum semnalul aleator sinusoidal din exemplul 2.2, b) cu A, $\alpha \in L_2(\Omega)$. Am arătat deja că $M(t) = 0$, $(\forall) t \in \mathbb{R}$. În plus,

$$K(t, s) = \operatorname{cov}(\xi_t, \xi_s) = M(\xi_t \xi_s) = M(A^2 \sin(\alpha t + \varphi) \sin(\alpha s + \varphi)) =$$

$$= \frac{1}{2} [M(A^2 \cos \alpha(t - s)) - M(A^2 \cos(\alpha t + \alpha s + 2\varphi))].$$

Notînd cu $p_\alpha(x)$ densitatea de probabilitate a lui α, rezultă

$$M(A^2\cos\alpha(t-s)) = (MA^2)\,M(\cos\alpha(t-s)) = (MA^2)\int_0^\infty p_\alpha(x)\cos(t-s)\,x\,dx.$$

Similar,

$$M(A^2\cos(\alpha t+\alpha s+2\varphi)) = (MA^2)\,[M\cos(\alpha t+\alpha s)\cdot M(\cos 2\varphi) -$$

$$-\,M\sin(\alpha t+\alpha s)\cdot M(\sin 2\varphi)] = 0,$$

căci $M(\cos 2\varphi) = M(\sin 2\varphi) = 0$, φ fiind v.a. uniform repartizată pe intervalul $[0, 2\pi)$; rezultă deci relația

$$K(t,s) = \frac{1}{2}(MA^2)\int_0^\infty p_\alpha(x)\cos(t-s)x\,dx,$$

deci $K(t+\tau, s+\tau) = K(t,s)$, $(\forall)t, s, \tau\in\mathcal{T}$. Așadar, semnalul considerat este staționar. Reținem totodată că $M(t) = 0$, $D(t) = \frac{1}{2}(MA^2)$, $(\forall)\ t\in\mathbb{R}$. Dacă în particular $p_\alpha(x) = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}\cdot\sigma(x)$, atunci

$$K_\xi(t) = K(t,0) = \frac{1}{\pi}(MA^2)\int_0^\infty\frac{\cos tx}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}(MA^2)e^{-|t|}.$$

c) Fie $\xi = \{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ un șir de v.a. independente din $L_2(\Omega)$, presupuse gaussiene cu media 0 și dispersia σ^2. În acest caz,

$$K(m,n) = \operatorname{cov}(\xi_m, \xi_n) = M(\xi_m\xi_n) = \begin{cases}\sigma^2, & \text{dacă } m = n,\\ 0, & \text{dacă } m\neq n,\end{cases}$$

adică $K(m,n) = \sigma^2\delta(m-n)$. Avem astfel un exemplu de lanț staționar de variabile aleatoare, numit *zgomot alb gaussian în timp discret*.

d) Fie un semnal $s:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ deterministic din L_2, periodic de perioadă T și φ o v.a. uniform repartizată pe intervalul $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$. Considerăm semnalul aleator [2]

$$\xi_t(\omega) = s(t) * \delta(t-\varphi(\omega)),\quad (\forall)\,t\in\mathbb{R},$$

deci conform formulei (2.49), $\xi_t = s(t-\varphi)$. Considerăm dezvoltarea Fourier

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t},\quad \text{deci}\quad \xi_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}} d_n e^{jn\frac{2\pi}{T}t},$$

unde $d_n = c_n e^{-jn\frac{2\pi}{T}\varphi}$ sînt v.a. cu media nulă (ca și φ). Atunci pentru orice $t, s\in\mathbb{R}$, $M\xi_t = 0$ și

$$K(t,s) = M(\xi_t\bar{\xi}_s) = \sum_{m,n} e^{j\frac{2\pi}{T}(mt-ns)}M(d_m\bar{d}_n) =$$

$$= \sum_{m,n} e^{j\frac{2\pi}{T}(mt-ns)}c_m\bar{c}_n\,Me^{-j\frac{2\pi}{T}(m-n)\varphi} = \sum_m |c_m|^2 e^{j\frac{2\pi}{T}m(t-s)}.$$

Semnalul ξ_t obținut dintr-un semnal deterministic prin întîrzieri aleatoare uniform repartizate este deci staționar, cu funcția de covariață

$$K_\xi(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 e^{j\frac{2\pi}{T}nt},$$

unde c_n sînt coeficienții Fourier ai semnalului deterministic.

Ca un caz special, considerăm semnalul aleator staționar

$$\xi_t = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t-nT-\varphi);$$

în acest caz,

$$s(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{j\frac{2\pi}{T}nt},$$

conform cu (2.36), deci $c_n = \frac{1}{T}$ și atunci

$$K_\xi(t) = \frac{1}{T^2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{j\frac{2\pi}{T}nt} = \frac{1}{T}s(t),\quad (\forall)t\in\mathcal{T} = \mathbb{R}.$$

Ne ocupăm în cele ce urmează de semnalele analitice staționare. În realitatea fizică procesele sînt descrise prin funcții reale, dar uneori este comodă utilizarea variabilei complexe.

Fie X_t, $t\in\mathbb{R}$, un semnal aleator din S_a cu valori reale. Considerarea unui semnal cu valori complexe $\xi_t = X_t + jY_t$ avînd X_t ca parte reală este utilă numai dacă între X_t și Y_t există o legătură, de tipul celei explicitate mai jos. Fie $z = t + ju$ (t, u reale) și presu-

punem că există o funcție olomorfă $X(z)$ astfel încît $X(z)|_{u=0} = X_t$ și alegem $Y(z)$ astfel încît funcția complexă $\xi(z) = X(z) + \mathrm{j}Y(z)$ să fie olomorfă în semiplanul superior $u > 0$ și rapid descrescătoare către zero pentru $u \to \infty$. În acest caz, aplicînd formula integrală a lui Cauchy, rezultă

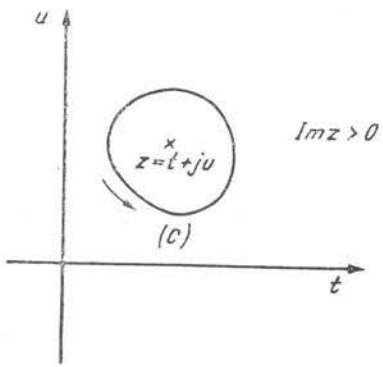


Fig. 5.2. Conturul de integrală considerat pentru exprimarea lui $\xi(z)$.

$$\xi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \oint_{(C)} \frac{\xi(\theta)}{\theta - z}\,\mathrm{d}\theta$$

și conform ipotezei făcute asupra lui $\xi(z)$, în această integrală se poate înlocui conturul (C) prin axa reală, deci

$$\xi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\theta)}{\theta - z}\,\mathrm{d}\theta.$$

Dar

$$\frac{1}{\theta - z} = \frac{1}{\theta - t - \mathrm{j}u} = \frac{\theta - t}{(\theta - t)^2 + u^2} + \mathrm{j}\,\frac{u}{(\theta - t)^2 + u^2}$$

și pentru $u \to 0$, $u > 0$, partea reală a acestei expresii conduce la valoarea principală Cauchy a integralei din $\dfrac{\xi(\theta)}{\theta - z}$, iar partea imaginară conduce la $\pi\delta(\theta - t)$, deci obținem la limită formula

$$\xi_t = \frac{1}{2\pi j}\left[\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\theta)}{\theta - t}\,\mathrm{d}\theta + \pi \mathrm{j}\,\xi_t\right],$$

de unde

$$\xi_t = \frac{1}{\pi \mathrm{j}}\,\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\theta)}{\theta - t}\,\mathrm{d}\theta$$

și înlocuind $\xi_t = X_t + \mathrm{j}Y_t$, rezultă relațiile

$$Y_t = -\frac{1}{\pi}\,\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X_\theta}{\theta - t}\,\mathrm{d}\theta,\quad X_t = \frac{1}{\pi}\,\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Y_\theta}{\theta - t}\,\mathrm{d}\theta.$$

Așadar, conform cu (2.63), rezultă că (X_t, Y_t) formează o pereche de transformate Hilbert : $Y_t = H_{X_t}$, $X_t = -H_{Y_t}$.

4.3. **Definiție.** Funcția olomorfă $\xi(z) = X(z) + \mathrm{j}Y(z)$ se numește *semnalul analitic* generat de X_t, iar X_t, Y_t sînt conjugate.

Se pot stabili legături între caracteristicile statistice ale semnalelor X_t, Y_t. De exemplu, dacă X_t este staționar cu media nulă, atunci și Y_t este staționar ; în plus, $MY_t = 0$, $K_Y(t) = K_X(t)$ [12].

4.4. **Observație.** Schema generală de a construi lanțuri staționare este următoarea [8]. Fie $U : H \to H$ un operator unitar ($U^*U = 1_H$) al unui subspațiu închis H al spațiului Hilbert $L_2(\Omega)$; fixînd $\xi \in H$ și notînd $\xi_n = U^n\xi$, $n \in \mathbb{Z}$, lanțul ξ_n este staționar, deoarece

$$M(\xi_{m+h}\overline{\xi}_{n+h}) = \langle U^{m+h}\xi,\, U^{n+h}\xi\rangle = \langle U^{m-n}\xi,\, \xi\rangle = \langle U^m\xi,\, U^n\xi\rangle = M(\xi_m\overline{\xi}_n).$$

($\forall$) $m, n, h \in \mathbb{Z}$. Reciproc, orice lanț staționar ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$, poate fi reprezentat ca mai sus, luînd drept H închiderea subspațiului lui $L_2(\Omega)$ generat de ξ_n, $n \in \mathbb{Z}$ și U operatorul de decalare $H \to H$, $\sum_{i=-N}^{N} c_i\xi_i \mapsto \sum_{i=-N}^{N} c_i\xi_{i+1}$, $c_i \in \mathbb{C}$.

4.5. **Ergodicitate.** Fie $\mathcal{T} = [a, b]$ și $\xi \in S_a$ un semnal staționar, continuu în medie (i.e. $(\forall) t_0 \in \mathcal{T}$, $\lim_{t \to t_0} \|\xi_t - \xi_{t_0}\| = 0$, în norma din $L_2(\Omega)$) ; fie m media lui ξ, care este constantă conform teoremei V.2. Atunci se poate defini *integrala în medie* $\int_a^b \xi_t\,\mathrm{d}t$, ca fiind variabila aleatoare limită în medie a sumelor Riemann $\sum_{i=0}^{n-1} \xi_{u_i}(t_{i+1} - t_i)$, asociate unei diviziuni $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, cu $u_i \in [t_i, t_{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, cînd norma diviziunii tinde la zero. Este evident că

$$M\left(\int_a^b \xi_t\,\mathrm{d}t\right) = \int_a^b (M\xi_t)\,\mathrm{d}t = m(b - a). \tag{5.10}$$

Presupunînd că $\mathcal{T} = [0, \infty)$ și $\xi \in S_a$ este un semnal staționar continuu în medie, cu media m, atunci pentru orice $T > 0$ se poate defini v.a. din $L_2(\Omega)$

$$\eta_T = \frac{1}{T}\int_0^T \xi_t\,\mathrm{d}t. \tag{5.11}$$

Evident, $M\eta_T = \frac{1}{T} M\int_0^T \xi_t\,dt = \frac{1}{T} mT = m$, conform cu (5.10). Semnalul ξ se numește *ergodic* dacă $\lim_{T\to\infty} D(\eta_T) = 0$. Considerînd un șir de momente $T_n \to \infty$, fiecare din v.a. η_{T_n} are media m, iar dispersia tinde la zero pentru $n\to\infty$ (fig. 5.3).

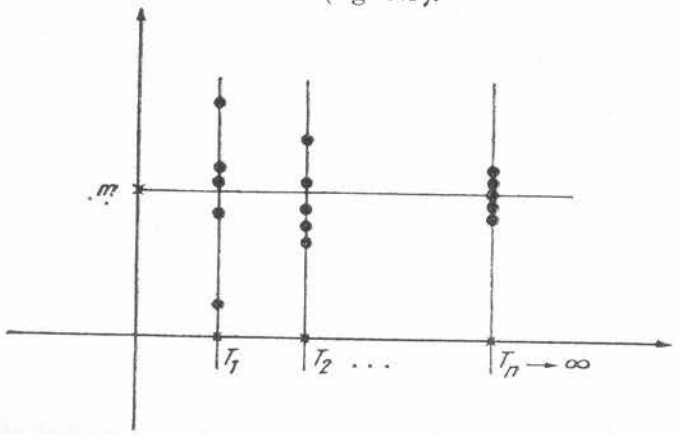


Fig. 5.3. Reprezentarea fenomenului de ergodicitate. La fiecare moment T_n sînt indicate prin puncte valori ale variabilei aleatoare η_{t_n} oscilînd în jurul mediei m, cu dispersia tinzînd la zero pentru $n\to\infty$.

Teorema următoare dă un criteriu de ergodicitate [6].

Teorema V.3. *Dacă* $\xi \in S_a$, $\mathcal{T} = [0, \infty)$ *este un semnal staționar continuu în medie și dacă*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) K_\xi(u)\,du = 0,$$

atunci semnalul ξ *este ergodic.*

Demonstrație. În acest caz, avem

$$D\eta_T = M(\eta_T^2) - m^2 = M\left(\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \xi_t\xi_s\,dt\wedge ds\right) - m^2 =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T [M(\xi_t\xi_s) - m^2]\,dt\wedge ds = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K(t,s)\,dt\wedge ds =$$

$$= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T K_\xi(t-s)\,dt\wedge ds, \text{ conform teoremei V.2, (b).}$$

Efectuînd schimbarea de variabilă în integrala dublă $u = t - s$, $v = s$, rezultă

$$D\eta_T = \frac{2}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) K_\xi(u)\,du.$$

Atunci conform ipotezei rezultă $\lim_{T\to\infty} D\eta_T = 0$, deci ξ este ergodic.

Teorema V.4. *Dacă* $\lim_{u\to\infty} K_\xi(u) = 0$, *atunci* ξ *este ergodic.*

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon > 0$ putem alege $A > 0$ astfel încît $|K_\xi(u)| < \varepsilon$ de îndată ce $u > A$. Atunci pentru $T > A$, avem

$$\left|\frac{1}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right)\cdot K_\xi(u)\,du\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{T}\int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right) du = \frac{\varepsilon}{2},$$

deci

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left(1 - \frac{u}{T}\right)\cdot K_\xi(u)\,du = 0$$

și se poate aplica teorema V.3.

4.6. **Observații.** Ne situăm în ipotezele acestei teoreme. Atunci $D\eta_T \to 0$ și η_T converge în medie către $m = M\xi_t$ (pentru $T\to\infty$), deci dacă T este suficient de mare, avem formula aproximativă

$$m \approx \eta_T = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt, \tag{5.12}$$

unde $x(t) = \xi_t(\omega_0)$ este o singură realizare a semnalului aleator ξ.

Fixăm acum un moment t_0 și considerăm semnalul aleator $\zeta_t = (\xi_t - m)\cdot(\xi_{t-t_0} - m)$; se verifică ușor că dacă ξ_t este gaussian, atunci ζ_t este staționar și ergodic și, în plus, $M\zeta_t = K_\xi(t_0)$, $(\forall)t \geqslant 0$. Admițînd că ξ este gaussian și aplicînd formula (5.12) pentru semnalul ζ_t, rezultă formula aproximativă de calcul pentru funcția de corelație K_ξ în punctul t_0, anume

$$K_\xi(t_0) \approx \frac{1}{T}\int_0^T [x(t) - m]\cdot[x(t - t_0) - m]\,dt, \tag{5.13}$$

pentru T ales suficient de mare. În particular, se calculează $D\xi_t = K_\xi(0)$, $t \geqslant 0$.

Din cele spuse, reiese utilitatea condiției de ergodicitate $\lim_{u\to\infty} K_\xi(u) = 0$, care asigură modalități de calcul aproximativ al caracteristicilor statistice ale unor semnale aleatoare, folosind o singură realizare, urmărită un timp suficient de mare. În practică se utilizează noțiunea de *interval de corelație* $[-c, c]$ pentru un semnal staționar ξ, în afara căruia se poate neglija K_ξ. Interpretarea acestuia este aceea că v.a. ξ_t, ξ_{t+u} pot fi considerate necorelate dacă u nu aparține intervalului $[-c, c]$.

4.7. **Exemple.** a) Dacă ξ este un semnal staționar ergodic și θ este v.a. independentă de toate eșantioanele lui ξ, atunci semnalul $\xi + \theta$ este încă staționar, dar poate să nu mai fie ergodic.

b) Considerăm semnalul aleator sinusoidal ξ din exemplul 4.2, b); am văzut că acesta este staționar, cu funcția de covarianță $K_\xi(t) = \frac{1}{2}(MA^2)\cdot e^{-|t|}$; observăm că

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)\cdot K_\xi(u)\,du = \frac{1}{2}(MA^2)\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(1-\frac{u}{T}\right)e^{-u}du = 0,$$

după un calcul imediat. Aplicînd teorema V.3, rezultă că ξ este ergotic.

4.8. **Operatori diferențiali stochastici.** Dacă $\xi : \mathscr{T}\to L_2(\Omega)$ este un semnal aleator, $\mathscr{T}$ fiind un interval al dreptei reale și dacă $t_0 \in \overline{\mathscr{T}}$, se spune că ξ tinde în medie către o variabilă aleatoare θ pentru $t\to t_0$, dacă $\lim_{t\to t_0}\|\xi_t - \theta\| = 0$ [în norma din $L_2(\Omega)$]. Semnalul ξ se numește *derivabil (în medie)* dacă $(\forall)t\in\mathscr{T}$ există limita în medie

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\xi_{t+h} - \xi_t), \quad \text{notată} \quad \xi_t'.$$

Este evident că semnalele aleatoare sinusoidale sînt derivabile, dar procesele Poisson și Wiener nu sînt derivabile. Este evident de asemenea că dacă ξ este derivabil, derivata ξ_t' în punctul t este o v.a., este însă dificil de indicat repartiția acesteia.

Se definesc fără dificultate derivate de ordin superior (ca în cazul deterministic), [19].

Vom nota în cele ce urmează cu $S^{(k)}$, $k \geqslant 0$, spațiul vectorial al semnalelor aleatoare $\mathscr{T}\to L_2(\Omega)$ derivabile de k ori, cu derivate continue (în medie) pe un interval $\mathscr{T}$ al lui $\mathbb{R}$. Dacă a_i, $0\leqslant i\leqslant k$, sînt constante reale sau complexe, se pot defini operatorii diferențiali stochastici

$$D : S^{(k)} \to S^{(0)}, \quad \xi_t \mapsto a_0\xi_t^{(k)} + a_1\xi_t^{(k-1)} + \ldots + a_{k-1}\xi_t' + a_k\xi_t, \tag{5.14}$$

$$D_1 : S^{(k)} \to S^{(0)}, \quad \xi_t \mapsto (-1)^k a_0\xi_t^{(k)} + (-1)^{(k-1)}a_1\xi_t^{(k-1)} + \ldots - a_{k-1}\xi_t' + a_k\xi_t.$$

Aceeași operatori pot fi definiți în cazul deterministic $C^k_{\mathscr{T}} \to C^0_{\mathscr{T}}$.

Dacă ξ_t este un semnal staționar aparținînd lui $S^{(k)}$, $k \geqslant 1$, atunci semnalele aleatoare ξ_t' și, mai general, $D\xi_t$, $D_1\xi_t$ sînt de asemenea staționare.

Teorema V.5. *Fie $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathscr{T}}$ un semnal staționar din $S^{(k)}$, $k \geqslant 1$, cu funcția de covarianță K.*

(a) $M\xi_t' = 0$, $MD\xi_t = MD_1\xi_t = a_k m$, *unde* $m = M\xi_t$, $t\in\mathscr{T}$.
(b) $K_{D\xi}(t) = DD_1K(t)$, $K_{D\xi,\xi}(t) = DK(t)$, $K_{\xi,D\xi}(t) = D_1K(t)$, $(\forall)t\in\mathscr{T}$.

Demonstrație. (a) Avem $M\xi_t' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(M\xi_{t+h} - M\xi_t) = 0$, deoarece ξ este staționar. Apoi $MD\xi_t = D(M\xi_t) = D(m) = a_k m$.

(b) Mai întîi observăm că $(\forall)t, s\in\mathscr{T}$ avem

$$K_{D\xi}(t-s) = \overset{t\ s}{DD}K_\xi(t-s) \quad \text{și} \quad K_{D\xi,\xi}(t-s) = \overset{t}{D}K_\xi(t-s),$$

unde indicii de deasupra arată în raport cu ce variabilă se derivează. Cum derivata de ordin r a lui $K_\xi(t-s)$ în raport cu s este tocmai derivata lui K_ξ în raport cu argumentul $u = t - s$, înmulțită cu $(-1)^r$, rezultă imediat formulele din enunț.

Se poate arăta mai general că $M\xi^{(k)} = 0$, $k \geqslant 1$, $K_{\xi^{(p)}\xi^{(q)}}(t) = (-1)^q K_\xi^{(p+q)}(t)$ etc. [18].

4.9. **Exemple.** a) Dacă $D : S^{(1)} \to S^{(0)}$, $\xi_t \mapsto \xi_t'$ este operatorul uzual de derivare, atunci $(\forall)t\in\mathscr{T}$ avem

$$M\xi_t' = 0, \quad K_{\xi'}(t) = -K''(t), \quad K_{\xi'\xi}(t) = K'(t) = -K_{\xi\xi'}(t).$$

b) Fie $\xi\in S^{(1)}$ un semnal aleator staționar cu media nulă și funcția de covarianță $K(t) = e^{-|t|}$. Atunci

$$K_{\xi\xi'}(t) = -K'(t) = \begin{cases} -e^t, & \text{dacă } t < 0, \\ e^{-t}, & \text{dacă } t > 0, \end{cases}$$

deci funcția de covarianță mutuală a semnalelor ξ, ξ' este discontinuă în punctul $t = 0$, cu saltul egal cu 2. Funcția $\varphi(t) = K_{\xi\xi'}(t) - 2\sigma(t)$ este continuă și, derivînd, rezultă conform exemplului a) $\varphi'(t) = -K''(t) - 2\delta(t)$, deci $K_{\xi'}(t) = \varphi'(t) + 2\delta(t) = e^{-|t|} + 2\delta(t)$. Dispersia lui ξ' este infinită [căci $D\xi' = K_{\xi'}(0)$], fapt explicabil prin aceea că funcția K_ξ nu este derivabilă.

4.10. **Două tipuri de ecuații diferențiale stochastice.** I. Considerăm ecuația diferențială stochastică

$$\xi_t' = [A(t) + \eta_t]\xi_t, \quad t\in\mathscr{T} = \mathbb{R}, \tag{5.15}$$

unde A este un semnal deterministic, η_t un semnal aleator gaussian cu media 0 și funcția de covarianță $K_\eta(t, s)$.

Din teoria generală a ecuațiilor diferențiale, soluția este

$$\xi_t = \xi_0 \exp\int_0^t [A(s) + \eta_s]\,ds, \quad t\in\mathscr{T}.$$

Notăm cu φ_t funcția caracteristică a v.a. ξ_t. Rezultă conform cu 1.5,

$$\varphi_t(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_t}(x) \cdot e^{jux}\,dx = \sum_{n\geq 0} \frac{(ju)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \cdot p_{\xi_t}(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{(jux_0)^n}{n!} \exp\left[n\int_0^t A(s)\,ds + n^2\Phi(t)\right],$$

unde

$$\Phi(t) = \frac{1}{2}\int_0^t dp \int_0^t K_\eta(p, q)dq.$$

Derivînd și ținînd seamă că $\Phi'(t) = \int_0^t K_\eta(t, s)\,ds$, $nu^n = \left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)u^n$, $n^2u^n = \left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)^2 u^n$, rezultă relația

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = A(t)\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)\varphi + \left[\int_0^t K_\eta(t, s)\,ds\right]\cdot\left(u\frac{\partial}{\partial u}\right)^2\varphi.$$

Notînd cu $p = p(x, t)$ densitatea de probabilitate a lui ξ_t și ținînd seama că aceasta este transformata Fourier inversă a funcției caracteristice, rezultă relația

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -A(t)\frac{\partial}{\partial x}(xp) + \left[\int_0^t K_\eta(t, s)\,ds\right]\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial}{\partial x}(xp)\right], \quad (5.16)$$

numită uneori *ecuația Einstein-Fokker-Kolmogorov asociată ecuației* (5.15) [12].

Cele spuse anterior se extind fără dificultate la cazul sistemelor diferențiale omogene de ordin întîi sub formă matriceală. Reținem că determinarea unor informații asupra soluției se face prin rezolvarea ecuației cu derivate parțiale de ordin al doilea (5.16), care este o ecuație cvasiliniară de tip parabolic.

Exemplu. Fie ecuația $\xi_t' = \tau_t\xi_t$, $t\in\mathbb{R}$, unde τ_t este un semnal staționar astfel încît $K_\eta(t, s) = \delta(t - s)$. În acest caz $\int_0^t K_\eta(t, s)\,ds = \frac{1}{2}$, $A = 0$ și ecuația Einstein-Fokker-Kolmogorov asociată este

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial}{\partial x}(xp)\right], \text{ adică } x^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 3x\frac{\partial p}{\partial x} - 2\frac{\partial p}{\partial t} + p = 0,$$

care este o ecuație cu derivate parțiale de ordin al doilea cu necunoscuta $p_t(x)$, densitatea de probabilitate a soluției ξ_t.

II. Fie un operator diferențial liniar L definit prin

$$Lx = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\,x, \quad t\in\mathcal{T} = [0, A],$$

$A > 0$ fixat, cu $a_1, \ldots, a_n$ funcții continue (deterministice) și fie $G(t, s)$ funcția Green asociată. Așadar, pentru orice $s\in\mathcal{T}$ fixat, funcția $x(t) = G(t, s)$ este soluție a ecuației $Lx = 0$ pe $\mathcal{T}\setminus\{s\}$, nulă pentru $t\leqslant s$ și astfel încît $x, x', \ldots, x^{(n-2)}$ să fie continue pe $\mathcal{T}$ iar $x^{(n-1)}$ să aibă saltul 1 în punctul s. De exemplu pentru $L(x) = x' + ax$ avem

$$G(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t\leqslant s, \\ e^{-a(t-s)}, & \text{dacă } t > s,\ a\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

iar dacă $Lx = x'' + \omega^2 x$, $\omega > 0$, atunci

$$G(t, s) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t\leqslant s, \\ \frac{1}{\omega}\sin\omega(t - s), & \text{dacă } t > s. \end{cases}$$

Dacă toți coeficienții a_i sînt constanți, atunci $G(t, s) = G(t - s)$, $(\forall)s, t\in\mathcal{T}$, deoarece dacă $x(t)$ este soluție pentru ecuația $Lx = 0$, atunci $x(t + \tau)$ este soluție, $(\forall)\tau\in\mathbb{R}$. Faptul că $G(t, s) = 0$ pentru $t < s$ exprimă condiția de cauzalitate a sistemului dinamic definit de L.

Fie acum b_t un semnal aleator continuu în medie $\mathcal{T}\to L_2(\Omega)$. Soluția ecuației diferențiale $L(x) = b_t$ verificînd problema Cauchy $x(0) = 0, \ldots, x^{(n-1)}(0) = 0$ va fi atunci

$$x_t = \int_0^t G(t, s)\,b_s ds. \quad (5.17)$$

Într-adevăr, derivînd sub integrală în raport cu t, rezultă

$$x_t^{(k)} = \int_0^t \frac{\partial^k G}{\partial t^k}(t, s)b_s ds,\ 1\leqslant k\leqslant n - 1 \text{ și } x_t^{(n)} = \int_0^t \frac{\partial^n G}{\partial t^n}(t, s)\cdot b_s\,ds + b_t,$$

deci

$$L(x_t) = \int_0^t L(G)b_s\,ds + b_t = b_t,$$

adică semnalul x_t verifică problema Cauchy respectivă.

În cadrul teoriei distribuțiilor se obține o interpretare remarcabilă a funcției Green, anume $G(t, s)$ este funcția de pondere sau răspunsul-impuls al sistemului dinamic L, adică răspunsul la orice moment t, $t > s$, la impulsul $b_t = \delta(t - s)$, în ipoteza că pînă la momentul s sistemul este în repaus. Într-adevăr, este suficient de aplicat (5.17) și de observat că

$$\int_0^t G(t, \sigma)\, \delta(\sigma - s)\, \mathrm{d}\sigma = G(t, s).$$

Reprezentarea integrală (5.17) permite exprimarea caracteristicilor statistice ale lui x_t în funcție de cele ale lui b_t. Astfel,

$$Mx_t = \int_0^t G(t, s) \cdot (Mb_s)\, \mathrm{d}s,$$

$$\langle x_t, x_s \rangle = \int_0^t G(t, u)\, \mathrm{d}u \int_0^s G(s, v) \langle b_u, b_v \rangle\, \mathrm{d}v,$$

iar dacă b_t este semnal staționar cu media nulă și coeficienții a_i sînt constanți, atunci pentru funcția de covariață a semnalului x are loc formula

$$K_x(t, t+s) = \int_0^t G(u)\, \mathrm{d}u \int_0^{t+s} G(v)\, K_b(s + u - v)\mathrm{d}v. \qquad (5.18)$$

În general, sistemele reale au o memorie finită, deci pentru $t \to \infty$ avem $G(t) \to 0$ și în acest caz $K_x(t, t + s)$ nu depinde de t, iar x poate fi asimilat cu un semnal staționar cu funcția de covariață

$$K_x(s) = \int_0^\infty G(u)\, \mathrm{d}u \int_0^\infty G(v)\, K_b(s + u - v)\, \mathrm{d}v.$$

Folosind faptul că $G(u) = 0$ pentru $u < 0$ și schimbarea de variabilă $v - u = w$, rezultă

$$K_x(t) = \int_{-\infty}^\infty G(u)\, \mathrm{d}u \int_{-\infty}^\infty G(u + w)\, K_b(t - w)\, \mathrm{d}w \qquad (5.19)$$

și, în final, rezultă următoarea relație de convoluție :

$$K_x = H * K_b, \qquad (5.20)$$

unde am notat

$$H(w) = \int_{-\infty}^\infty G(u)\, G(u + w)\, \mathrm{d}u. \qquad (5.21)$$

Pentru a da un exemplu concret, considerăm un circuit RL sub acțiunea unei f.e.m. E_t asimilată cu un semnal aleator staționar cu funcția de covariață $K_E(t) = Ae^{-a|t|}$ ($A, a > 0$ constante). Calculăm funcția de covariață a curentului i_t.

Ecuația diferențială verificată de i este $i' + \frac{R}{L} i = \frac{1}{L} E_t$. Pentru operatorul $Lx = x' + \frac{R}{L} x$, funcția Green este

$$G(t) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t \leqslant 0, \\ e^{-\frac{R}{L}t}, & \text{dacă } t > 0, \end{cases}$$

În acest caz, aplicînd formula (5.21), rezultă

$$H(w) = \begin{cases} \frac{L}{2R} e^{-\frac{R}{L}w}, & \text{dacă } w \geqslant 0, \\ \frac{L}{2R} e^{\frac{R}{L}w}, & \text{dacă } w < 0. \end{cases}$$

Atunci $K_i = H * K_E$, deci

$$K_i(t) = \int_{-\infty}^\infty H(w) \cdot K_E(t - w)\, \mathrm{d}w = \frac{AL}{2R} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{R}{L}|w| - a|t-w|}\, \mathrm{d}w,$$

o integrală ușor de efectuat ; pentru $t = 0$ se obține expresia dispersiei curentului staționar

$$\mathrm{D}_i = \frac{AL}{2R} \int_{-\infty}^\infty e^{-\left(\frac{R}{L} + a\right)|w|}\, \mathrm{d}w = \frac{AL}{2R} \cdot \frac{2}{\frac{R}{L} + a} = \frac{AL^2}{R(R + aL)}.$$

Pentru a obține formule mai precise trebuie aplicată formula (5.18).

B. REPREZENTĂRI SPECTRALE ȘI PROPRIETĂȚI ENERGETICE

Este binecunoscut rolul important pe care îl au în analiza Fourier deterministică descompunerile semnalelor în armonicele lor. Astfel de descompuneri au loc și în cazul semnalelor aleatoare; în special în studiul sistemelor dinamice liniare sînt utilizate în mod frecvent descompuneri armonice în termeni elementari (de tipul $e^{j\omega t}$ cu frecvența ω continuă sau discretă). În studiul analizei matematice de corelație se disting semnalele cu energie finită și cele cu putere finită, energia și puterea fiind variabile aleatoare, pentru care semnificații aparte au valorile medii ale acestor entități.

Un paragraf separat va fi consacrat noțiunii de zgomot alb, ca semnal ideal avînd toate eșantioanele distincte necorelate între ele.

§ 5. Reprezentări spectrale ale semnalelor staționare

5.1. Integrala stochastică în raport cu un semnal cu creșteri necorelate. Reamintim că un semnal aleator $\xi \in S_a$, $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathcal{T}}$, $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, se numește *cu creșteri necorelate* dacă pentru orice momente $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$, $\operatorname{cov}(\xi_{t_1} - \xi_{t_0}, \xi_{t_3} - \xi_{t_2}) = 0$ [exemplul 2.2, f)]. Pentru astfel de semnale va fi util de introdus un concept specific de integrală stochastică.

Lemă. *Fie $\xi \in S_a$ un semnal aleator pe un interval $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$, cu media nulă $M\xi_t = 0$, $(\forall) t \in \mathcal{T}$ și cu creșteri necorelate. Atunci există o funcție monoton crescătoare $F : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ astfel încît orice creștere $\xi_t - \xi_s$, $s < t$, să aibă dispersia egală cu $F(t) - F(s)$.*

Demonstrație. Fixăm $t_0 \in \mathcal{T}$ și punem $F(t_0) = 0$. Definim apoi

$$F(t) = \begin{cases} M|\xi_t - \xi_{t_0}|^2, \text{ dacă } t > t_0, \\ -M|\xi_t - \xi_{t_0}|^2, \text{ dacă } t < t_0. \end{cases}$$

Probăm mai întîi relația

$$F(t) - F(s) = M|\xi_t - \xi_s|^2. \tag{5.22}$$

Dacă $t_0 \leqslant s < t$, atunci

$$F(t) = M|\xi_t - \xi_{t_0}|^2 = M|\xi_s - \xi_{t_0}|^2 + M(\xi_s - \xi_{t_0})\overline{(\xi_t - \xi_s)} + M\overline{(\xi_s - \xi_{t_0})}(\xi_t - \xi_s) + M|\xi_t - \xi_s|^2$$

și conform ipotezei de necorelare a creșterilor, termenii din mijloc sînt nuli, iar $M|\xi_s - \xi_{t_0}|^2 = F(s)$, deci are loc (5.22).

Dacă $s < t \leqslant t_0$, se procedează similar, scriind $\xi_t - \xi_s$ ca sumă a două creșteri necorelate pe intervale mai mici de timp. Dacă $s < t_0 < t$, atunci $M|\xi_t - \xi_s|^2 = M|\xi_t - \xi_{t_0}|^2 + M|\xi_{t_0} - \xi_s|^2 = F(t) - F(s)$. Relația (5.22) este probată în toate cazurile. Lema rezultă atunci observînd că $M(\xi_t - \xi_s) = M\xi_t - M\xi_s = 0$, deci $F(t) - F(s) = D(\xi_t - \xi_s)$.

Din lemă rezultă că dacă ξ este continuu în medie la dreapta (sau stînga), atunci funcția F are aceeași proprietate și reciproc.

Presupunem că $\mathcal{T} = [a, b]$, iar ξ este continuu în medie (la dreapta) și satisface condițiile din lemă. Se poate atunci considera măsura dF pe intervalul $\mathcal{T}$ care asociază oricărui subinterval $(\alpha, \beta]$ al lui $\mathcal{T}$ numărul real $F(\beta) - F(\alpha)$ și fie $L_2(dF)$ spațiul funcțiilor de pătrat integrabil relativ la măsura dF. Dacă φ este funcție în scară relativ la o diviziune $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, cu valorile $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ (reale sau complexe), se pune $I(\varphi) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})$. Dacă se notează cu Σ mulțimea funcțiilor în scară, asocierea $I : \Sigma \to L_2(\Omega)$ este o aplicație $\mathbb{C}$-liniară și în plus, $MI(\varphi) = 0$, $M|I(\varphi)|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} |c_i|^2[F(t_{i+1}) - F(t_i)]$ și, mai general, pentru φ, ψ funcții în scară relativ la aceeași diviziune, cu valorile c_i, d_i, avem

$$M(I(\varphi)\overline{I(\psi)}) = M\sum_i c_i(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i}) \cdot \overline{\sum_j d_j(\xi_{t_{j+1}} - \xi_{t_j})} =$$

$$= \sum_{i,j} c_i \bar{d}_j M(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})(\overline{\xi_{t_{j+1}} - \xi_{t_j}}) = \sum_i c_i \bar{d}_i [F(t_{i+1}) - F(t_i)].$$

Așadar, aplicația $I : \Sigma \to L_2(\Omega)$, $\varphi = \{t_i, c_i\} \mapsto \sum_i c_i(\xi_{t_{i+1}} - \xi_{t_i})$ conservă produsele scalare și cum Σ este o submulțime densă a lui $L_2(dF)$, iar $L_2(\Omega)$ este spațiu Hilbert, rezultă că I are o extindere unică la spațiul $L_2(dF)$ în modul următor: pentru orice funcție $\varphi \in L_2(dF)$, $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ se alege un șir $\varphi_n \in \Sigma$ astfel ca $\varphi_n \to \varphi$ în $L_2(dF)$ și se definește elementul din $L_2(\Omega)$

$$I(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, d\xi_t \triangleq \lim_{n\to\infty} I(\varphi_n), \tag{5.23}$$

numit *integrala stochastică a lui* φ *în raport cu semnalul* ξ. Prin continuitate, I este aplicația $\mathbb{C}$-liniară $L_2(dF) \to L_2(\Omega)$, $M(I(\varphi)) = 0$ și dispersia lui $I(\varphi)$ este egală cu $\int_a^b |\varphi(t)|^2 \, dF(t)$, iar covarianța lui $I(\varphi)$ și $I(\psi)$ este egală cu

$$M(I(\varphi)\overline{I(\psi)}) = \int_a^b \varphi(t)\,\overline{\psi(t)}\, dF(t), \quad (\forall)\varphi, \psi \in L_2(dF).$$

În cele de mai sus, intervalul $[a, b]$ poate fi substituit prin orice alt interval al dreptei reale. De exemplu, dacă $-\infty < t_1 < t_2 < \infty$ și A_1, A_2 sînt v.a. independente din $L_2(\Omega)$, atunci pentru

$$\xi_t = \begin{cases} 0, & \text{dacă } t < t_1, \\ A_1, & \text{dacă } t_1 \leqslant t < t_2, \\ A_2 + A_1, & \text{dacă } t \geqslant t_2, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, d\xi_t = A_1\varphi(t_1) + A_2\varphi(t_2).$$

5.2. **Teorema Bochner-Hincin-Herglotz.** Pentru o matrice pătrată $\mathbf{A}$ din $M_n(\mathbb{C})$ vom nota cu $\mathbf{A}'$ transpusa lui $\mathbf{A}$ și cu $\overline{\mathbf{A}}$ conjugata lui $\mathbf{A}$. Dacă $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ este o matrice hermitică (adică $\mathbf{A}' = \overline{\mathbf{A}}$ sau $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$, $(\forall) i, j$), atunci pentru orice vector coloană $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} = [x_1\, x_2 \ldots x_n]'$, numărul $y = \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i \bar{x}_j$ este real (deoarece $\bar{y} = \bar{y}' = \bar{\mathbf{x}}''\mathbf{A}'\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}'\mathbf{A}\mathbf{x} = y$). Reamintim că o matrice hermitică $\mathbf{A} \in M_n(\mathbb{C})$ se numește *pozitivă* dacă pentru orice vector $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ numărul real $\bar{\mathbf{x}}'\mathbf{A}\mathbf{x}$ este $\geqslant 0$.

Fie $\mathcal{T}$ o mulțime timp; o funcție $K : \mathcal{T} \to \mathbb{C}$ se numește *de tip pozitiv* dacă pentru orice număr finit de momente $t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, matricea $\mathbf{A} = [K(t_i - t_j)]_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ este hermitică și pozitivă, deci pentru orice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ avem $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} K(t_i - t_j)\, x_i \bar{x}_j \geqslant 0$.

Există două exemple tipice de funcții de tip pozitiv:

I. Funcția de covarianță $K_\xi(t)$ a unui semnal aleator staționar. Într-adevăr, conform teoremei V.1, $K_\xi(t - s) = \overline{K_\xi(s - t)}$, $(\forall)\, s, t \in \mathcal{T}$ și în plus, pentru orice $x \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{x} = [x_1\, x_2 \ldots x_n]'$ și pentru orice

$t_1, t_2, \ldots, t_n \in \mathcal{T}$, avem

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} K_\xi(t_i - t_j)\, x_i \bar{x}_j = \operatorname{cov}(u, u) \geqslant 0, \text{ unde } u = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_{t_i}.$$

II. Transformata Fourier $F(\omega)$ a unui semnal deterministic real $f \in L_1(\mathbb{R})$, cu valori pozitive. Într-adevăr, pentru orice $\omega_1, \ldots, \omega_n \in \mathbb{R}$ și pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$,

$$F(\omega_k - \omega_l) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-jt(\omega_k - \omega_l)}\, dt$$

și

$$\sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} F(\omega_k - \omega_l)\, x_k \bar{x}_l = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Big(\sum_{1 \leqslant k,l \leqslant n} e^{-jt(\omega_k - \omega_l)}\, x_k \bar{x}_l \Big)\, dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)[u(t)\,\bar{u}(t)]\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, |u(t)|^2\, dt \geqslant 0,$$

unde $u(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{-jt\omega_k} x_k$; în plus, este evident că $F(\omega_k - \omega_l) = \overline{F(\omega_l - \omega_k)}$.

Un rezultat fundamental îl constituie următoarea caracterizare a funcțiilor de tip pozitiv și de reprezentare integrală a acestora.

Teorema V.6. (1) *Varianta discretă* (Herglotz): *Un șir* $\{K(n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ *este o funcție de tip pozitiv* $\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ *dacă și numai dacă există o funcție mărginită și monoton crescătoare* $F : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ *astfel încît*

$$K(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\lambda}\, dF(\lambda), \quad (\forall)\, n \in \mathbb{Z}. \tag{5.24}$$

(2) *Varianta continuă* (Bochner-Hincin): *O funcție continuă* $K : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *este de tip pozitiv dacă și numai dacă există o funcție mărginită și monoton crescătoare* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *astfel încît*

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\lambda}\, dF(\lambda), \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}. \tag{5.25}$$

În fiecare caz, măsura dF este unic determinată și se numește *măsura spectrală asociată funcției* K.

Demonstrația acestei teoreme poate fi găsită în multe tratate de analiză sau teoria probabilităților [3, 10, 19].

5.3. **Densitate spectrală a unui semnal staționar.** Fixăm un semnal aleator staționar $\xi = \{\xi_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ din S_a, cu funcția de covarianță $K(t)$. Presupunem $\mathcal{T} = \mathbb{R}$ (cazul $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$ se tratează similar). Am văzut la punctul 5.2, exemplul I, că funcția $K(t)$ este de tip pozitiv, deci conform teremei V.6, varianta continuă, rezultă că există o funcție mărginită și monoton crescătoare $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ astfel încît să aibă loc formula (5.25). Funcția F se numește *funcție spectrală a lui* ξ, valoarea $F(\lambda)$ se numește *intensitate spectrală a lui* ξ *în intervalul* $(-\infty, \lambda)$, iar derivata ei $f(\lambda) = F'(\lambda)$ există a.p. (F fiind monotonă) și se numește *densitatea spectrală* (sau *spectrul de putere*) pentru ξ. În ipoteza că $f \in L_1$, ceea ce se întîmplă în multe din cazurile importante, F este absolut continuă și pentru orice $a, x \in \mathbb{R}$, are loc formula

$$\int_a^x f(\lambda)\, d\lambda = F(x) - F(a) \qquad \text{(v. anexa 2)}$$

Formula (5.25) arată că funcția de covarianță $K(t)$ este transformata Fourier inversă a densității spectrale $f(\lambda)$, adică

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{j t\lambda}\, d\lambda, \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R} \text{ și prin inversare,}$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) e^{-j t\lambda}\, dt, \quad (\forall) \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.26}$$

Conform corolarului teoremei V.2 avem $K(-t) = \overline{K(t)}$, deci

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(t) \cdot (\cos t\lambda - j \sin t\lambda)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} [K(t)(\cos t\lambda - j \sin t\lambda) + \overline{K(t)}(\cos t\lambda + j \sin t\lambda)] dt$$

iar dacă ξ are valori reale, se obține formula

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} K(t) \cos t\lambda\, dt, \quad (\forall)\, \lambda \in \mathbb{R}. \tag{5.27}$$

Din formula (5.26) rezultă următoarea formulă pentru dispersie:

$$D\xi = K(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\lambda. \tag{5.28}$$

De exemplu, dacă un semnal staționar ξ_t are densitatea spectrală

$$f(\lambda) = \begin{cases} c, & \text{dacă } 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0,\ \lambda_0 \text{ fixat,} \\ 0 & \text{în rest,} \end{cases}$$

atunci funcția sa de covarianță va fi

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{j t\lambda}\, d\lambda = c \int_0^{\lambda_0} e^{j t\lambda}\, d\lambda = \frac{cj}{t} (1 - e^{j t\lambda_0}),$$

iar dispersia lui ξ este $D\xi = c\lambda_0$.

Faptul că densitatea spectrală și funcția de covarianță sînt legate prin transformarea Fourier este utilizat în probleme concrete. De asemenea trebuie subliniată următoarea interpretare, legată de „principiul indeterminismului" probat în exemplul 1.4, b). Anume, presupunînd pentru comoditate că $f(0) = 1$, $K(0) = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda)\, d\lambda = 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} t\, K(t)\, dt = 0$ și notînd

$$Df = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 f(\lambda)\, d\lambda, \quad DK = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 K(t)\, dt,$$

rezultă $Df \cdot DK \geqslant \frac{1}{4}$. Această relație de incertitudine arată că unui spectru mai îngust îi corespunde o corelație mai mare, iar unui spectru mai întins îi corespunde o corelație mai mică.

Există o bogată literatură consacrată problemei, de mare interes practic, a determinării densității spectrale a unui semnal aleator (sau funcției de covarianță) pe cale experimentală [6, 9, 11].

5.4. **Teorema de reprezentare spectrală.** O consecință importantă a teoremei V.6 este constituită de teorema care urmează și care utilizează lema stabilită în 5.1.

Teorema V.7 (de reprezentare spectrală). *Fie* $\xi \in S_a$ *un semnal staționar cu media nulă, cu funcția de covarianță* $K(t)$ *și având funcția spectrală* F *continuă la dreapta.*

(1) *Varianta discretă: dacă* $\mathscr{T} = \mathbb{Z}$ *și* $K(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\lambda} dF(\lambda)$, $n \in \mathbb{Z}$, *atunci există un semnal aleator* ζ_λ, $\lambda \in [-\pi, \pi]$, *cu media nulă, continuu în medie la dreapta și cu creșteri necorelate, astfel încît*

$$M|\zeta_{\lambda_2} - \zeta_{\lambda_1}|^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1) \text{ pentru } \lambda_1 < \lambda_2$$

și

$$\xi_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\lambda} d\zeta_\lambda, \quad (\forall) n \in \mathbb{Z}, \tag{5.29}$$

integrala fiind luată în sensul (5.23), *ca integrală stochastică a lui* $e^{jn\lambda}$ *în raport cu semnalul* ζ.

(2) *Varianta continuă: dacă* $\mathscr{T} = \mathbb{R}$ *și* $K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\lambda} dF(\lambda)$, $t \in \mathbb{R}$, *atunci există un semnal aleator* ζ_λ, $\lambda \in \mathbb{R}$, *cu media nulă, continuu în medie la dreapta, cu creșteri necorelate, astfel încît*

$$M|\zeta_{\lambda_2} - \zeta_{\lambda_1}|^2 = F(\lambda_2) - F(\lambda_1) \text{ pentru } \lambda_1 < \lambda_2$$

și

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\lambda} d\zeta_\lambda, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{5.30}$$

în sensul (5.23).

În plus, există un izomorfism de spații Hilbert

$$I : L_2(dF) \to H_\xi^0, \quad \varphi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, d\zeta_\lambda,$$

unde H_ξ^0 *este închiderea în* $L_2(\Omega)$ *a subspațiului liniar generat de toate eșantioanele* ξ_t, $t \in \mathbb{R}$, *adică închiderea mulțimii*

$$\{C_1\xi_{t_1} + C_2\xi_{t_2} + \ldots + C_p\xi_{t_p} | C_1, C_2, \ldots, C_p \in \mathbb{C}, t_1, t_2, \ldots, t_p \in \mathbb{R}\}.$$

Demonstrație. Vom da demonstrația în cazul continuu, cazul discret fiind absolut similar [19]. Fiecărei funcții φ de forma $\varphi(\lambda) = C_1 e^{j\lambda t_1} + \ldots + C_p e^{j\lambda t_p}$ cu $\lambda \in \mathbb{R}$, $t_1, \ldots, t_p \in \mathbb{R}$, $C_1, \ldots, C_p \in \mathbb{C}$ îi asociem variabila aleatoare $I(\lambda) = C_1\xi_{t_1} + \ldots + C_p\xi_{t_p}$. Evident, asocierea $\varphi \mapsto I(\varphi)$ astfel explicitată este bine definită, este $\mathbb{C}$-liniară și, în plus,

$$M|I(\varphi)|^2 = \sum_{1 \leq k,l \leq p} C_k \bar{C}_l K(t_k - t_l) = \sum_{1 \leq k,l \leq p} C_k \bar{C}_l \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt_k} e^{-jt_l} dF(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(\lambda)|^2 dF(\lambda),$$

deci asocierea I păstrează produsele scalare. Pe de altă parte, funcțiile de tipul φ formează o mulțime densă în $L_2(dF)$, iar $I(\varphi)$ corespunzătoare formează o mulțime densă în H_ξ^0; atunci prin continuitate se obține o aplicație $\mathbb{C}$-liniară care păstrează produsele scalare $I : L_2(dF) \to H_\xi^0$, adică un izomorfism de spații Hilbert.

Notăm $\zeta_\lambda = I(\varphi)$, unde φ este funcția caracteristică a intervalului $(-\infty, \lambda]$, $(\forall)\ \lambda \in \mathbb{R}$, adică

$$\varphi(u) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } u \leq \lambda, \\ 0, & \text{dacă } u > \lambda. \end{cases}$$

Semnalul ζ are media 0 deoarece $\zeta_\lambda \in H_\xi^0$ și $M\xi_t = 0$, are creșteri necorelate, iar dispersiile creșterilor sale sînt egale cu creșterile funcției F, deoarece

$$M(\zeta_{\lambda_3} - \zeta_{\lambda_1})\,\overline{(\zeta_{\lambda_4} - \zeta_{\lambda_3})} = M[I(\varphi)\,\overline{I(\psi)}] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\overline{\psi(\lambda)}\, dF(\lambda),$$

unde φ (respectiv ψ) este funcția caracteristică a intervalului $(\lambda_1, \lambda_2]$ (respectiv $(\lambda_3, \lambda_4]$). Dacă $\lambda_3 = \lambda_1$, $\lambda_4 = \lambda_2$, se obține $F(\lambda_2) - F(\lambda_1)$, iar dacă cele două intervale sînt disjuncte, această expresie este

nulă. Continuitatea la dreapta a lui ζ_λ rezultă din ipoteza de continuitate la dreapta a lui F, conform unei observații făcute la 5.1.

În sfîrșit, remarcăm că pentru orice φ în scară, $\varphi \in \Sigma$, avem

$$I(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \mathrm{d}\zeta_\lambda.$$

Această formulă se extinde la orice funcție $\varphi \in L_2(\mathrm{d}F)$, deoarece aplicația I și luarea integralei stochastice sînt aplicații $\mathbb{C}$-liniare $L_2(\mathrm{d}F) \to L_2(\Omega)$, păstrînd produsele scalare și coincizînd pe submulțimea densă Σ a lui $L_2(\mathrm{d}F)$.

Luînd $\varphi(\lambda) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t}$, avem $I(\varphi) = \xi_t$ deci

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t}\, \mathrm{d}\zeta_\lambda, \quad (\forall) t \in \mathbb{R},$$

adică (5.30). Teorema este complet demonstrată.

Trebuie remarcat că ipoteza că ξ are media nulă este neesențială, deoarece se poate înlocui ξ cu $\xi - M\xi$ [vezi exemplul 5.5, c) de mai jos].

Relația (5.30) poartă denumirea de *reprezentare spectrală a semnalului* ξ (presupus staționar și cu media nulă).

În cazul deterministic discret (respectiv continuu), o astfel de reprezentare a fost obținută în cadrul teoriei seriilor Fourier (respectiv a integralei Fourier), așa cum s-a arătat în cap. II, ambele cazuri putînd fi prezentate unitar în cadrul teoriei distribuțiilor. În cazul aleator, semnalele ξ_t care admit reprezentarea spectrală de forma (5.29) sau (5.30) se mai numesc *armonizabile* și ele au marele avantaj că fiind aplicate la intrarea unui sistem dinamic liniar (cu parametri constanți), este posibilă indicarea directă a ieșirii corespunzătoare η_t, anume

$$\eta_t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}t\lambda} H(\mathrm{j}\lambda)\, \mathrm{d}\zeta_\lambda,$$

unde H este funcția de sistem. Desigur, o altă modalitate de a determina ieșirea este aceea de a lucra în domeniul timp și a utiliza (5.17).

Reamintim că dacă un proces oscilatoriu este o sumă de armonice de diverse frecvențe, spectrul său dă repartiția amplitudinilor corespunzînd diferitelor componente armonice; în cazul aleator, amplitudinile oscilațiilor sînt v.a. și spectrul unui semnal staționar descrie repartiția dispersiilor lor corespunzînd diverselor componente armonice.

5.5. **Exemple.** a) Originea reprezentărilor spectrale a semnalelor se află în descompunerea acestora în semnale sinusoidale cu frecvențe, amplitudini și faze aleatoare, de forma

$$\zeta_t = M\zeta_t + \sum_{j=1}^{N} (A_j \cos \omega_j t + B_j \sin \omega_j t).$$

Dealtfel pentru un semnal de această formă reprezentarea spectrală este imediată. Astfel, fie semnalul sinusoidal $\xi_t = A \sin(\alpha t + \varphi)$, studiat în exemplul 4.2, b). Scriind

$$\xi_t = \frac{A}{2\mathrm{j}} \left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\alpha t + \varphi)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\alpha t + \varphi)}\right] = A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha t} + A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha t},$$

unde $A_1 = \dfrac{A\mathrm{j}}{2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi}$, $A_2 = -\dfrac{A\mathrm{j}}{2} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$, și luînd

$$\zeta_\lambda = \begin{cases} 0, & \text{dacă} \quad \lambda < -\alpha, \\ A_1, & \text{dacă} \quad -\alpha \leqslant \lambda < \alpha, \\ A_1 + A_2, & \text{dacă} \quad \lambda \geqslant \alpha, \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

rezultă direct că

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t} \mathrm{d}\zeta_\lambda = A_1 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\alpha t} + A_2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha t} = \xi_t,$$

deci tocmai reprezentarea (5.30).

b) Fie $\xi = \{\xi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ un șir ortonormal din $L_2(\Omega)$, $M\xi_n = 0$. În acest caz,

$$K_\xi(n) = \langle \xi_{m+n}, \xi_m \rangle = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad n = 0, \\ 0, & \text{dacă} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

deci $K_\xi = \delta$. Atunci formula (5.24) se scrie

$$K(n) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}\lambda}{2\pi}, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

deci funcția spectrală a lui ξ este $F(\lambda) = \dfrac{\lambda}{2\pi}$.

Mai general, fie $\xi = \{\xi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un semnal staţionar discret cu reprezentarea spectrală (5.29) şi fie $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un şir constant. Atunci semnalul $\eta_n = \sum_{k=-N}^{N} c_k \xi_{n-k}$ are reprezentarea

$$\eta_n = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{j(n-k)\lambda}\, d\zeta_\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\lambda} c(\lambda)\, d\zeta_\lambda,$$

unde $c(\lambda) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{-jk\lambda}$. Deci pentru măsurile spectrale dG (pentru η_n) şi dF (pentru ξ_n) are loc relaţia $dG(\lambda) = |c(\lambda)|^2\, dF(\lambda)$. Pentru ξ considerat ca la început se obţine

$$K_\eta(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\lambda}\, dG(\lambda) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\lambda} |c(\lambda)|^2 \frac{d\lambda}{2\pi} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} e^{jn\lambda} \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{-jk\lambda}\right)\left(\sum_{l=-N}^{N} \bar{c}_l e^{jl\lambda}\right)\frac{d\lambda}{2\pi} = \sum_{k=-N}^{N} c_k \bar{c}_{k-n}.$$

c) Folosind rezultatele şi notaţiile de la 4.2, indicăm unele proprietăţi legate de reprezentarea spectrală a semnalelor analitice. Fie $\xi_t = X_t + jY_t$ un semnal analitic staţionar, unde X_t, Y_t au reprezentări de forma

$$X_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda t}\, d\zeta_\lambda, \quad Y_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda t}\, d\eta_\lambda, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Deoarece $Y_t = H_X(t)$ iar transformata Hilbert a funcţiei $e^{j\lambda t}$ este $-je^{j\lambda t}\operatorname{sgn}\lambda$, rezultă $d\eta_\lambda = -j\operatorname{sgn}\lambda\, d\zeta_\lambda$. Atunci pentru semnalul analitic ξ_t rezultă reprezentarea spectrală

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda t}(1 + \operatorname{sgn}\lambda)\, d\zeta_\lambda = 2\int_0^{\infty} e^{j\lambda t}\, d\zeta_\lambda,$$

adică este suficientă integrarea după frecvenţele pozitive.

Reamintim că pentru funcţiile de covarianţă avem

$$K_X(t) = K_Y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{j\lambda t}\, d\lambda = 2\int_0^{\infty} f(\lambda)\cos\lambda t\, d\lambda,$$

conform cu (5.27). Deoarece $K_{XY}(t)$ este transformata Hilbert a lui K_X, rezultă

$$K_{XY} = -j\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) e^{j\lambda t}\operatorname{sgn} d\lambda = 2\int_0^{\infty} f(\lambda)\sin\lambda t\, d\lambda$$

şi, în final,

$$K_\xi(t) = 2[K_X(t) + jK_{XY}(t)] = 4\int_0^{\infty} f(\lambda) e^{j\lambda t} d\lambda,$$

deci densitatea spectrală a semnalului ξ_t este egală cu $4f(\lambda)$, dacă $\lambda > 0$ şi cu 0, dacă $\lambda < 0$, unde $f(\lambda)$ este densitatea spectrală a lui X_t. Pentru detalii trimitem la [12].

d) Fie $\xi \in S_a$ un semnal derivabil (în medie) definit pe $\mathcal{T} = \mathbb{R}$, cu reprezentarea (5.30). Atunci derivata ξ'_t este încă un semnal staţionar şi

$$\xi'_t = \lim_{h\to 0}\frac{\xi_{t+h} - \xi_t}{h} = \lim_{h\to 0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{j\lambda(t+h)} - e^{j\lambda t}}{h} d\zeta_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda t}\left(\lim_{h\to 0}\frac{e^{j\lambda h} - 1}{h}\right) d\zeta_\lambda.$$

În ipoteza suplimentară că $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2\, dF(\lambda) < \infty$, rezultă că $\lim_{h\to 0}\frac{e^{j\lambda h} - 1}{h} = j\lambda$ [în medie relativ la măsura $dF(\lambda)$], deci avem reprezentarea spectrală

$$\xi'_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda t} j\lambda\, d\zeta_\lambda. \tag{5.31}$$

care se obţine derivînd formal în raport cu t formula de reprezentare pentru ξ. Între densităţile spectrale ale lui ξ şi ξ' există legătura

$$f_{\xi'}(\lambda) = \lambda^2 f_\xi(\lambda),$$

care rezultă din formula (5.25) şi din relaţia $K_{\xi'}(t) = -K''_\xi(t)$.

Mai general, dacă se consideră un operator diferenţial de ordin $n \geqslant 1$ cu coeficienţi constanţi $D : \xi_t \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k \xi_t^{(n-k)}$, atunci reprezentarea spectrală a semnalului $D\xi_t$ este

$$D\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\lambda t}[a_0(j\lambda)^n + a_1(j\lambda)^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(j\lambda) + a_n]\, d\zeta_\lambda, \tag{5.32}$$

dacă ξ are reprezentarea (5.30). Notînd cu $g(\lambda)$ expresia din paranteza mare, se poate formula

Teorema V.8. *Fie ecuația diferențială* $\mathrm{D}y_t = \xi_t$, *unde* ξ_t *este un semnal aleator avînd reprezentarea spectrală* (5.30) *și cu funcția spectrală* $F(\lambda)$. *Dacă integrala*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|g(\lambda)|^2}\,\mathrm{d}F(\lambda)$$

este convergentă, atunci ecuația diferențială respectivă are o soluție semnal aleator staționar și anume

$$y_t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}t\lambda}\frac{1}{g(\lambda)}\,\mathrm{d}\zeta_\lambda\,. \tag{5.33}$$

Demonstrație. Într-adevăr, pentru y_t dat de relația (5.33) avem onform cu (5.32)

$$\mathrm{D}y_t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}t\lambda}\frac{1}{g(\lambda)}\,g(\lambda)\,\mathrm{d}\zeta_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}t\lambda}\,\mathrm{d}\zeta_\lambda,$$

deci conform cu (5.30) va rezulta $\mathrm{D}y_t = \xi_t$.

Dacă $a_n = 0$, atunci la soluția y_t se poate adăuga o v.a. oarecare θ, necorelată cu semnalul ζ_λ. De exemplu, ecuația $y'_t = \xi_t$ are soluția

$$y_t = \theta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{j}t\lambda}}{\mathrm{j}\lambda}\,\mathrm{d}\zeta_\lambda, \text{ în ipoteza că } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda^2}\,\mathrm{d}F(\lambda) < \infty.$$

Remarcăm de asemenea că densitatea spectrală a lui y_t este

$$f_y(\lambda) = \frac{1}{|g(\lambda)|^2} f_\xi(\lambda). \tag{5.34}$$

Ca o aplicație, să considerăm o schemă electrică în paralel constînd dintr-o sursă de curent, o capacitate C și o rezistență R, în care curentul i_t este identificat cu un semnal aleator staționar cu media I și ne propunem să determinăm media și dispersia tensiunii E_t în condensator, în regim staționar (adică presupunînd că E_t este de asemenea un semnal staționar). Ecuația care descrie matematic dinamica schemei respective este

$$CE'_t + \frac{1}{R}E_t = i_t\,.$$

Deoarece $M(E'_t) = 0$, rezultă că $M(E_t) = RI$. Dezvoltările teoretice anterioare au fost făcute pentru semnale centrate (cu media nulă) și de aceea notăm $i_t^0 = i_t - I$, $E_t^0 = R_t - RI$. Considerînd reprezentarea spectrală

$$i_t^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t}\,\mathrm{d}\zeta_\lambda$$

și aplicînd formula (5.33) pentru ecuația diferențială $Cy'_t + \frac{1}{R}y_t = i_t$, rezultă

$$E_t^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t}\frac{1}{C\mathrm{j}\lambda + \frac{1}{R}}\,\mathrm{d}\zeta_\lambda\,.$$

Presupunem că i_t are funcția de covarianță $K_i(t) = \mathrm{e}^{-a|t|}$, $a > 0$ constant. Atunci conform formulei (5.26), densitatea spectrală a curentului i_t este

$$f_i(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|t| - \mathrm{j}t\lambda}\,\mathrm{d}t,$$

adică este transformata Fourier inversă a funcției $\mathrm{e}^{-a|t|}$, deci $f_i(\lambda) = \frac{a}{\pi(a^2 + \lambda^2)}$ (prin calcul direct sau folosind tabelul dat în cap. II, § 7). Atunci aplicînd (5.34), se obține

$$f_E(\lambda) = \frac{1}{\left|C\mathrm{j}\lambda + \frac{1}{R}\right|^2}\cdot f_i(\lambda) = \frac{R^2 a}{\pi(C^2R^2\lambda^2 + 1)(\lambda^2 + a^2)}\cdot$$

Dispersia semnalului E_t va fi dată de formula (5.28), deci

$$\mathrm{D}E_t = \int_{-\infty}^{\infty} f_E(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \frac{aR^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\lambda}{(C^2R^2\lambda^2+1)(\lambda^2+a^2)}$$

și după un calcul simplu, rezultă $DE_t = \dfrac{R^2}{1+RCa}$.

Multe alte exemple pot fi tratate în mod similar.

5.6. **Semnale aleatoare distribuționale.** Se numește *semnal aleator distribuțional* orice aplicație liniară și continuă $\mathscr{D} \to \mathrm{L}_2(\Omega)$, unde $\mathscr{D}$ este spațiul de funcții-test definit în cap. II, 1.1.

Orice semnal aleator în sensul paragrafelor anterioare $\xi : \mathbb{R} \to \mathrm{L}_2(\Omega)$ se poate asimila cu un semnal distribuțional, anume $\underline{\xi} : \mathscr{D} \to \mathrm{L}_2(\Omega)$, punînd

$$\underline{\xi}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}\xi_t, \quad (\forall)\,\varphi \in \mathscr{D},$$

în sensul formulei (5.23). În mod similar, orice semnal aleator discret $\xi : \mathbb{Z} \to \mathrm{L}_2(\Omega)$, adică un șir $\xi = \{\xi_n\}_n$ de v.a. din $\mathrm{L}_2(\Omega)$ se identifică prin semnalul distribuțional $\underline{\xi}$ definit prin $\underline{\xi}(\varphi) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(n)\cdot\xi_n$, $(\forall)\varphi \in \mathscr{D}$.

Dacă ξ este un semnal aleator distribuțional fixat, se poate defini *media lui* ξ ca fiind funcționala liniară

$$M_\xi : \mathscr{D} \mapsto \mathbb{C}, \quad \varphi \mapsto M(\xi(\varphi))$$

și *covarianța lui* ξ ca fiind funcționala biliniară

$$K_\xi : \mathscr{D}\times\mathscr{D} \to \mathbb{C}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto \langle \xi(\varphi), \xi(\psi)\rangle.$$

În analogie cu definiția 4.1, semnalul distribuțional ξ se numește *staționar* dacă $(\forall)\varphi, \psi \in \mathscr{D}$, $(\forall)\tau \in \mathbb{R}$,

$$M_\xi(T_\tau\varphi) = M_\xi(\varphi), \quad K_\xi(T_\tau\varphi,\ T_\tau\psi) = K_\xi(\varphi, \psi),$$

unde $T_\tau\varphi$ este translatata cu τ a funcției φ (cap. II, 5.5).

Unele din rezultatele probate anterior, inclusiv teorema V.7 de reprezentare spectrală, pot fi extinse la semnale aleatoare distribuționale. Astfel de considerații depășesc cadrul lucrării de față. Subliniem doar faptul că noțiunea de semnal aleator distribuțional permite definirea riguroasă a conceptului de zgomot alb.

§ 6. Zgomot alb

În aces paragraf vor fi prezentate principalele proprietăți legate de conceptul de zgomot alb, reducînd la minimum utilizarea distribuțiilor.

6.1. **Definiție.** Fixăm o mulțime timp $\mathscr{T}$. Se numește *zgomot alb pe* $\mathscr{T}$, cu intensitatea $I(t)$, orice semnal aleator $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathscr{T}}$ avînd funcția de covarianță K_ξ definită prin

$$K_\xi(t, s) = I(t)\cdot\delta(t-s), \quad (\forall)t, s \in \mathscr{T}.$$

Un caz particular important este acela în care ξ este un semnal staționar, cu media nulă și cu densitatea spectrală constantă, $f(\lambda) = c$. Atunci

$$K_\xi(t) = c\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda = c\,F[1](t) = 2\pi c\delta(t),$$

conform formulei (2.68). În acest caz se spune că ξ este un zgomot alb staționar cu intensitatea $I = 2\pi c$; așadar

$$K_\xi = 2\pi c\delta. \tag{5.35}$$

Terminologia provine dintr-o analogie forțată cu cazul „luminii albe", ca sumă de componente spectrale necorelate avînd aceeași intensitate, corespunzînd frecvențelor oscilațiilor electromagnetice.

Din formula (5.35) rezultă că $(\forall)\,t \neq s$, $\mathrm{cov}\,(\xi_t, \xi_s) = 0$, deci oricare două eșantioane distincte ale unui zgomot alb sînt necorelate. Desigur, noțiunea de zgomot alb este ideală din punct de vedere fizic, deoarece în natură nu pot exista procese sau entități complet haotice, lipsite de inerție și de memorie, astfel încît valorile lor la un moment să nu fie în corelație cu valorile la momentele vecine. Teoretic însă noțiunea este viabilă și are o importanță principială. După cum distribuția δ poate fi aproximată oricît de bine, în sensul conver-

gentei slabe, prin șiruri reprezentative de funcții uzuale (conform capitolului II, § 4), tot astfel există realizări oricît de bune ale zgomotului alb.

6.2. **Exemple.** a) Fie un semnal aleator staționar ξ cu funcția de covarianță $K_\xi(t) = Ae^{-a|t|}$, A și a fiind constante reale pozitive. Constanta A este tocmai dispersia lui ξ, deoarece $A = K_\xi(0)$ și aplicăm formula (5.28). Aplicînd teorema II.1, se observă că funcțiile $\frac{a}{2} e^{-a|t|}$ constituie o familie reprezentativă pentru δ (pentru $a \to \infty$) și rezultă că pentru a tinzînd la $+\infty$ semnalul ξ tinde către un zgomot alb. Practic, pentru a suficient de mare densitatea spectrală poate fi considerată constantă într-o bandă largă de frecvențe.

b) Considerăm un circuit format dintr-o capacitate C și o rezistență R și presupunem că funcția de covarianță a curentului i_t este $K_i(t) = \frac{k}{RC} e^{-\frac{|t|}{RC}}$, $k > 0$ fiind o constantă. Notînd $u = \frac{1}{RC}$, rezultă $K_i(t) = kue^{-u|t|}$, deci pentru $u \to \infty$, $K_i(t)$ constituie un șir reprezentativ pentru distribuția $2k\delta$, deci curentul în circuit tinde către un zgomot alb cu intensitatea $2k$ (dacă de exemplu rezistența tinde către zero).

c) Fie un semnal staționar ξ din $S^{(2)}$ (notațiile sînt cele de la 4.8), cu funcția de covarianță

$$K_\xi(t) = Ae^{-a|t|}\left(\cos \omega_0 t + \frac{a}{\omega_0} \sin \omega_0 |t|\right),$$

A, a, ω_0 fiind constante pozitive. Considerînd semnalul $z = \{z_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, $z_t = \xi_t'' + 2a\xi_t' + (a^2 + \omega_0^2)\xi_t$, se arată printr-un calcul ușor, folosind teorema V.5, că are loc relația $K_z(t) = 2Aa(a^2 + \omega_0^2)\delta(t)$, deci z este un zgomot alb cu intensitatea $2Aa(a^2 + \omega_0^2)$. Folosind formula (5.17), rezultă reprezentarea integrală

$$\xi_t = \frac{1}{\omega_0}\int_{-\infty}^{t} z_\lambda e^{-a(t-\lambda)} \sin \omega_0(t - \lambda)\, d\lambda.$$

d) În condițiile de la punctul 4.10, I, să presupunem că η este un zgomot alb cu funcția de covarianță $K_\eta(t, s) = I\,\delta(t - s)$. În acest caz

$$\int_0^t K_\eta(t, s)\, ds = \frac{1}{2} I$$

și formula (5.16) devine

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -A(t)\frac{\partial}{\partial x}(xp) + \frac{1}{2} I \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial}{\partial x}(xp)\right].$$

Această ecuație cu derivate parțiale de ordinul al doilea are ca soluție densitatea de probabilitate $p(x, t)$ a semnalului ξ_t verificînd ecuația diferențială stochastică (5.15). Din ecuația precedentă se poate deduce că semnalul ξ_t este markovian [12].

6.3. **Observații.** Pentru a indica limitarea benzii de frecvență în care densitatea spectrală este constantă, se introduce noțiunea de *zgomot alb de bandă*; acesta este un semnal aleator staționar $\{\xi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ cu densitatea spectrală

$$f(\lambda) = c\,[\sigma(\lambda + \lambda_0) - \sigma(\lambda - \lambda_0)] = \begin{cases} c, \text{ dacă } |\lambda| \leqslant \lambda_0, \\ 0, \text{ dacă } |\lambda| > \lambda_0, \end{cases}$$

unde c și λ_0 sînt constante pozitive. În acest caz, funcția de covarianță este

$$K_\xi(t) = c\int_{-\lambda_0}^{\lambda} e^{j\lambda t} d\lambda = c \cdot \frac{e^{j\lambda_0 t} - e^{-j\lambda_0 t}}{jt} = \frac{2c}{t} \cdot \sin \lambda_0 t,$$

deci orice două eșantioane luate la intervale de timp multiplii întregi de $\frac{\pi}{\lambda_0}$ sînt necorelate.

Dispersia lui ξ este $D\xi = K_\xi(0) = 2c\lambda_0$, deci este finită. Totuși zgomotul alb de bandă este o noțiune ideală, pentru că o funcție de tipul $f(\lambda)$, cu discontinuități exact în punctele $\pm\lambda_0$, nu poate fi realizată efectiv. Un avantaj al considerării zgomotului alb de bandă constă în faptul că el poate fi discretizat, deci este determinabil cu precizie prescrisă printr-un număr finit de eșantioane ale lui.

6.4. **Cîteva tipuri de zgomote.** Sistemele mecanice se află totdeauna sub acțiunea unor forțe sau momente aleatoare, sistemele electronice sub acțiunea unor curenți sau tensiuni aleatoare; există în orice mediu fizic nenumărate surse de zgomote interne sau externe. O ipoteză care simplifică considerațiile teoretice (și care se confirmă în practică adeseori) este cea de normalitate a semnalelor aleatoare respective, deoarece repartiția gaussiană este caracterizată prin medie și prin funcția de covarianță (pentru semnale staționare se consideră de asemenea densitatea spectrală.)

Zgomotul termic este datorit mișcării electronilor în rețeaua cristalină a substanței și poate fi asimilat cu un semnal aleator gaussian și ergodic, care în plus este zgomot alb într-o bandă de frecvență foarte largă în raport cu frecvențele uzuale. Se poate arăta că o rezistență R în echilibru termodinamic, cu temperatura absolută T, este echivalentă cu un generator avînd f.e.m. un zgomot termic e_t cu funcția de covarianță $K_e(t) = 2kRT\delta(t)$, unde k este constanta lui Boltzmann; densitatea spectrală a lui e_t este egală cu $\frac{kRT}{\pi}$, exprimată în V^2/Hz. Proprietatea de ergodicitate a zgomotului

termic permite ca realizările vizualizate pe ecranele osciloscoapelor să reprezinte suficient de bine proprietățile statistice, așa cum am subliniat la 4.5.

Un alt zgomot aleator este fluctuația intensității datorită naturii discrete a purtătorului de sarcină electrică în lămpile electronice și care are de asemenea o densitate spectrală constantă într-o bandă largă de frecvență, ceea ce îl asimilează cu un zgomot alb. În semiconductori apare un zgomot similar, datorit fluctuației numărului de purtători de sarcină în cadrul fenomenelor de generare și recombinare. Densitatea spectrală a acestui zgomot (numit de *generare-recombinare*) este de forma $\frac{D}{k} \cdot \frac{t_0}{1+\lambda^2 t_0^2}$, unde D este dispersia curentului respectiv, iar t_0 este timpul mediu de viață al purtătorului de sarcină (se poate considera $t_0 \simeq 10^{-8}$s). Funcția de covariață este $D\,e^{-t_0|t|}$. Pentru frecvențe λ astfel încît $10^{-8}\lambda \ll 1$ zgomotul de generare-recombinare poate fi asimilat cu un zgomot alb.

Fluctuațiile amplitudinii unui semnal primit de un radiolocator, datorită în special reflexiei undelor electromagnetice de suprafețe avînd o configurație complexă, conduc la apariția *fadingului f*, asimilabil cu un semnal aleator staționar a cărui funcție de covariață este forma $K_f(t) = D\,e^{-a|t|}\cos bt$ ($a > 0$ și b fiind constante și D dispersia amplitudinii f).

6.5. **Răspunsul sistemelor liniare la semnale aleatoare.** Fie un sistem liniar $x \overset{L}{\mapsto} y$ și presupunem că la orice moment s este aplicat un impuls δ, iar răspunsul la momentul t al sistemului este $L_t\delta(t-s)$ și se notează $G(t, s)$ (tocmai funcția de pondere). Formula de filtrare (2.14) din cap. II, § 3, $x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,\delta(t-s)\,ds$ implică relația

$$y(t) = Lx(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(s)\,L_t\delta(t-s)\,ds = \int_{-\infty}^{\infty} G(t, s)\,x(s)\,ds.$$

Dacă sistemul este aflat în repaus pînă la un moment t_0 și făcînd presupunerea că $G(t, s) = 0$ ori de cîte ori $t < s$, rezultă formula

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} G(t, s)\,x(s)\,ds, \tag{5.36}$$

similară cu formula (5.17); dacă x, y sînt semnale aleatoare, atunci din formula (5.36) se deduc formule de legătură între caracteristicile statistice ale lui x, y; de exemplu, pentru medie,

$$My(t) = \int_{t_0}^{t} G(t, s)\;Mx(s)\;ds$$

și pentru funcția de covariață,

$$K_y(t, s) = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t} G(t, u)\;G(s, v)\;K_x(u, v)\,du\,dv. \tag{5.37}$$

Dacă x este de forma $x_t = \sum_{0 \leqslant s_k \leqslant t} a_k\,\delta(t-s_k)$ cu a_k constante și s_k momente aleatoare, atunci formula (5.36) pentru $t_0 = 0$ arată că răspunsul corespunzător este $y_t = \sum_{0 \leqslant s_k \leqslant t} a_k\,G(t-s_k)$.

Dacă semnalul x este un zgomot alb de intensitate I, atunci $K_x(u, v) = I\,\delta(u-v)$ și rezultă

$$K_y(t, s) = I\int_{t_0}^{t} G(t, u)\,G(s, u)\,du. \tag{5.38}$$

Dăm cîteva exemple de sisteme-standard ($k > 0$ este o constantă și luăm $t_0 = 0$).

a) *Amplificator.* Presupunem $L: x(t) \mapsto kx(t) = y(t)$. În acest caz $G(t, s) = k\delta(t-s)$ și dacă x este un zgomot alb de intensitate I, atunci conform cu (5.38) rezultă $K_y(t, s) = Ik^2\delta(t-s)$, deci y este tot un zgomot alb cu intensitate de k^2 ori mai mare.

b) *Integrator.* Fie $L: x \mapsto y$, unde $y'(t) = kx(t)$. În acest caz $G(t, s) = k\sigma(t-s)$. Reacția sistemului la un zgomot alb de intensitate I este, conform cu (5.38), un semnal aleator y cu funcția de covariață $K_y(t, s) = k^2\,I\min(t, s)$; se observă că y este un semnal nestaționar.

c) *Derivator.* Fie $L: x(t) \mapsto kx'(t) = y(t)$. Se verifică imediat că $G(t, s) = k\delta_t'(t-s)$ și că $K_y(t, s) = k^2 I\delta_t'(t-s)$, dacă $K_x(t, s) = I\delta(t-s)$.

d) *Intîrzietor cu* τ, $\tau > 0$. În acest caz, $L: x(t) \to y(t) = kx(t-\tau)$ și $G(t, s) = k\delta(t-s-\tau)$. Conform cu (5.38) avem

$$K_y(t, s) = \begin{cases} k^2 I\delta(t-s), & \text{dacă } t > \tau,\ s > \tau, \\ 0 & \text{altfel.} \end{cases}$$

e) *Sistem aperiodic.* Presupunem $L: x(t) \mapsto y(t)$, unde $Ty'(t) + y(t) = kx(t)$, $T > 0$ fixat. În acest caz, $G(t, s) = ke^{-\frac{t-s}{T}}$ și un calcul simplu arată că reacția la un zgomot alb de intensitate I este un semnal y avînd funcția de covariață

$$K_y(t, s) = \frac{k^2 I}{2T}\left[e^{-\frac{|t-s|}{T}} - e^{-\frac{t+s}{T}}\right].$$

f) Fie un sistem dinamic liniar $x \overset{\mathscr{L}}{\mapsto} y$, unde $P(p)\cdot y(t) = Q(p)\cdot x(t)$, $p = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, P, Q fiind polinoame cu coeficienți constanți. Dacă semnalul de intrare x este o funcție elementară, pentru determinarea răspunsului trebuie integrată ecuația diferențială respectivă ; în particular, dacă $x(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, atunci evident $y(t) = H(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, unde $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{Q(\mathrm{j}\omega)}{P(\mathrm{j}\omega)}$ este răspunsul-frecvență al sistemului. Dacă x_t este semnal aleator staționar cu media nulă (altfel se consideră $x_t - Mx_t$), avînd o descompunere spectrală de forma $x_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t}$, cu a_k variabile aleatoare necorelate, cu media nulă, atunci răspunsul sistemului va fi conform principiului suprapunerii efectelor, $y_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k H(\mathrm{j}\lambda_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k t}$. Pentru densitățile spectrale f_x, f_y ale lui x, y are loc relația $f_y(\lambda) = |H(\mathrm{j}\lambda)|^2 \cdot f_x(\lambda)$.

Pentru a rezuma, dacă x_t este un semnal aleator staționar cu media m_x și funcția de covarianță K_x, atunci pentru a determina caracteristicile statistice m_y, K_y ale ieșirii corespunzătoare se aplică succesiv formulele următoare : $m_y = \dfrac{Q(0)}{P(0)}\, m_x$, $f_x(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K_x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\lambda t}\,\mathrm{d}t$, $f_y(\lambda) = |H(\mathrm{j}\lambda)|^2 f_x(\lambda)$, $K_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t}\,\mathrm{d}\lambda$, și pentru dispersie, $D_y = K_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f_y(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$.

De exemplu, fie sistemul dinamic $x \mapsto y$ descris prin $y' + ay = x$, unde a este o constantă reală ; așadar $H(\mathrm{j}\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega + a}$ și $m_y = \dfrac{1}{a}\, m_x$. Dacă x este un semnal avînd media nulă și densitatea spectrală $f_x(\lambda) = \dfrac{\mathrm{D}_x\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}$, atunci $f_y(\lambda) = \dfrac{\mathrm{D}_x\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)(a^2+\lambda^2)}$ și se poate calcula $K_y(t)$. În particular se obține imediat $\mathrm{D}_y = \mathrm{D}_x \cdot \dfrac{1}{a\alpha + a^2}$.

C. FILTRARE ȘI PREDICȚIE

În cele ce urmează, indicăm succint cîteva aspecte matematice ale filtrării și predicției semnalelor aleatoare ; în multe cazuri, problema revine la a găsi cea mai bună aproximare (relativ la norma dintr-un anumit spațiu Hilbert) a unei v.a. necunoscute, cunoscînd eșantioanele unui semnal aleator observabil într-un anumit interval de timp. O atenție specială va fi acordată cazului liniar, în care se aplică criterii de optimalitate bazate pe metoda celor mai mici pătrate. În practică, filtrarea și predicția liniară sînt mai ușor de realizat tehnic și, în plus, în cazul des întîlnit al semnalelor gaussiene, optimalitatea neliniară și cea liniară sînt esențialmente echivalente.

§ 7. Problema de optimalitate

7.1. **Preliminarii.** Fie $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ un cîmp de probabilitate fixat. Pentru orice semnal aleator $\xi \in \mathrm{S}_a$ vom nota $\mathscr{K}_\xi$ σ-algebra generată de ξ, adică cea mai mică σ-algebră care conține toate evenimentele de forma $\{\xi_t \in B\}$, cu $t \in \mathscr{T}$, $B \subset \mathbb{R}$ boreliană.

Fie L_ξ^2 spațiul v.a. de pătrat integrabil relativ la cîmpul $(\Omega, \mathscr{K}_\xi, P)$; acesta este un subspațiu Hilbert al lui $\mathrm{L}_2(\Omega)$. Fie H_ξ închiderea în $\mathrm{L}_2(\Omega)$ a subspațiului tuturor combinațiilor liniare finite de eșantioane a lui ξ la care se adaugă constanta 1. Așadar, notînd $F_\xi = \{c_0 + c_1\xi_{t_1} + \ldots + c_n\xi_{t_n} \mid c_i \in \mathbb{R}, t_i \in \mathscr{T}\}$, rezultă $H_\xi = \bar{F}_\xi$; evident $H_\xi \subset \mathrm{L}_\xi^2$, deoarece v.a. $c_0 + c_1\xi_{t_1} + \ldots + c_n\xi_{t_n}$ aparțin lui L_ξ^2, iar limite în medie de șiruri de astfel de v.a. aparțin de asemenea lui L_ξ^2. Se mai spune că H_ξ este *subspațiul liniar al lui* L_ξ^2 *generat de* ξ și fiind închis, H_ξ este de asemenea spațiu Hilbert relativ la produsul scalar din $\mathrm{L}_2(\Omega)$.

Dacă mulțimea timp $\mathscr{T}$ este un interval, atunci se pot considera și alte σ-algebre remarcabile asociate unui semnal aleator fixat ξ și unui moment fixat t ; de exemplu, *trecutul lui* t, $K_{\xi,\leqslant t}$ (respectiv *viitorul lui* t, $K_{\xi,\geqslant t}$) este σ-algebra generată de evenimentele de forma $\{\xi_s \in \mathrm{B}\}$ cu $s \in \mathscr{T}$, $s \leqslant t$ (respectiv $s \geqslant t$) și $B \subset \mathbb{R}$ boreliană. Similar , σ-algebra generată de evenimentele de forma $\{\xi_t \in B\}$ cu $t \in \mathscr{T}$ fixat și $B \subset \mathbb{R}$ boreliană se numește *prezentul* t. Acestora li se pot asocia ca mai sus $\mathrm{L}^2_{\leqslant t}$, $H_{\leqslant t}$, $\mathrm{L}^2_{\geqslant t}$, $H_{\geqslant t}$ etc.

7.2. **Punerea problemei de optimalitate.** O problemă de mare importanță în teoria semnalelor este cea formulată în continuare, numită uneori *problema de optimalitate*.

Fie $\eta \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ o v.a. și un semnal $\xi \in \mathrm{S}_a$, $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathscr{T}}$; problema constă în a găsi o evaluare optimală $\hat{\eta} \in \mathrm{L}_\xi^2$ a lui η, care să aparțină spațiului L_ξ^2 asociat evenimentelor legate de observarea semnalului ξ, deci care să depindă de eșantioanele ξ_t, $t \in \mathscr{T}$, și astfel încît expresia $\|\eta - \hat{\eta}\|^2 = M|\eta - \hat{\eta}|^2$ să fie minimă, adică

$$\|\eta - \hat{\eta}\|^2 \leqslant \|\eta - \tilde{\eta}\|^2, \quad (\forall)\ \tilde{\eta} \in \mathrm{L}_\xi^2.$$

Variabila aleatoare $\hat{\eta}$ se numește *cea mai bună evaluare a lui* η *în raport cu* ξ.

Reamintim următoarea teoremă binecunoscută a lui F. Riesz : Dacă H este un spațiu Hilbert și $F \subset H$ este un subspațiu vectorial închis, atunci pentru orice vector $x \in H$ există și este unic $\hat{x} \in F$

astfel încît $\|x - \hat{x}\| \leqslant \|x - \tilde{x}\|$, $(\forall)\, \tilde{x} \in F$; aplicația $\mathrm{pr}_F : H \to F$, $x \mapsto \hat{x}$ se numește *proiecția ortogonală pe* F [deoarece $\hat{x}$ este de fapt unicul element din F astfel încît $x - \hat{x}$ să fie ortogonal pe F, adică $x - \hat{x} \in F^{\perp}$, iar egalitatea $x = \hat{x} + (x - \hat{x})$, $(\forall) x \in H$, arată că $H = F \oplus F^{\perp}$].

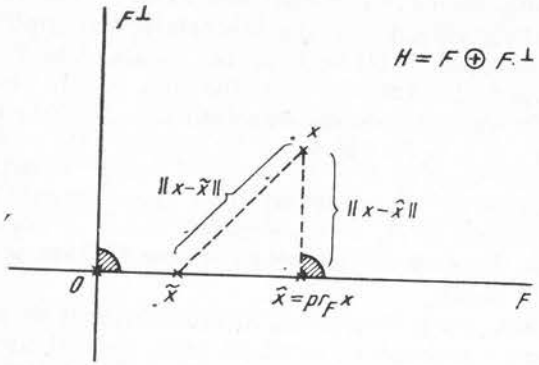


Fig. 5.4. Ilustrarea grafică a teoremei lui F. Riesz.

Problema formulată anterior primește atunci un răspuns teoretic afirmativ: este suficient de aplicat teorema lui Riesz pentru $H = \mathrm{L}_2(\Omega)$, $F = \mathrm{L}_\xi^2$, $\eta \in H$ dat și răspunsul va fi $\hat{\eta} = \mathrm{pr}_F \eta$. Așadar $\hat{\eta} \in \mathrm{L}_\xi^2$ și pentru orice $\zeta \in \mathrm{L}_\xi^2$ avem $\eta - \hat{\eta} \perp \zeta$, adică

$$M(\eta - \hat{\eta}) \cdot \zeta = 0. \tag{5.39}$$

Deci $\hat{\eta}$ este valoarea medie a lui η condiționată de σ-algebra $\mathscr{K}_\xi$. Determinarea efectivă a lui $\hat{\eta}$ din cunoașterea sau observarea lui η și ξ este mai dificilă și dăm un răspuns parțial în cele ce urmează.

Lema 1. *Fie* $\xi \in \mathrm{S}_a$ *fixat. Atunci mulțimea tuturor v.a. de forma* $f(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$, *unde funcția* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *este boreliană și* $t_1, \ldots, t_n \in \mathscr{T}$, *este densă în* L_ξ^2.

Demonstrație. Fie $\mathscr{A}_0$ algebra evenimentelor de forma $\{(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n}) \in B\}$ cu $B \subset \mathbb{R}^n$ boreliană, $t_1, \ldots, t_n \in \mathscr{T}$ și fie $\mathscr{A}$ σ-algebra generată de $\mathscr{A}_0$, adică $\mathscr{A} = \mathscr{K}_\xi$. Se știe că mulțimea tuturor funcțiilor de forma $\sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{B_k}$ cu $B_k \in \mathscr{A}$ și c_k constante este densă în L_ξ^2 și același lucru are loc dacă B_k parcurge doar $\mathscr{A}_0$.

Conform lemei 1 orice element din L_ξ^2 este limita în medie a unui șir de variabile aleatoare de forma $f(\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$ cu $t_1, \ldots, t_n \in \mathscr{T}$.

Atunci un mod de calcul al lui $\hat{\eta}$ constă în a fixa convenabil pentru fiecare număr natural k, cîte un număr natural $n(k)$, o funcție boreliană f_k de $n(k)$ variabile și cîte un șir de momente $t_1(k), \ldots, t_{n(k)}(k)$ din $\mathscr{T}$ și a lua

$$\hat{\eta} \simeq \lim_{k \to \infty} f_k(\xi_{t_1(k)}, \ldots, \xi_{t_{n(k)}(k)}).$$

Dacă $\mathscr{T}$ este o mulțime finită, $\mathscr{T} = \{t_1, \ldots, t_p\}$, atunci conform cu (5.39), $\hat{\eta}$ este egală cu media lui η condiționată de v.a. $\xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_p}$, care se poate calcula experimental.

Dacă $\mathscr{T}$ este o mulțime numărabilă, $\mathscr{T} = \{t_1, t_2, \ldots\}$, atunci revenim la cazul precedent utilizînd

Lema 2. *Fie* $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ *un șir ascendent de subspații închise ale unui spațiu Hilbert* H *și* F_∞ *închiderea subspațiului liniar* $\bigcup_{n \geqslant 1} F_n$. *Atunci pentru orice* $\eta \in H$ *avem* $\lim_{n \to \infty} \mathrm{pr}_{F_n} \eta = \mathrm{pr}_{F_\infty} \eta$.

Demonstrația lemei 2 este imediată: fie $\eta_n = \mathrm{pr}_{F_n} \eta$, $n \geqslant 1$; evident șirul $\{\eta_n\}$ are creșteri ortogonale $[\eta_{k+1} - \eta_k \perp \eta_k - \eta_{k-1}$, $(\forall)\, k \geqslant 1]$ și $\|\eta_n\| \leqslant \|\eta\|$. Atunci există $\eta_\infty = \lim_{n \to \infty} \eta_n$ și cum $\eta_n \in \mathrm{F}_n \subset \mathrm{F}_\infty$, rezultă $\eta_\infty \in F_\infty$. Rămîne de arătat că $\eta_\infty = \mathrm{pr}_{F_\infty} \eta$, adică $\langle \eta - \eta_\infty, y \rangle = 0$ pentru orice $y \in F_\infty$. Dar pentru $m \geqslant n$ avem $\langle \eta - \eta_m, y \rangle = 0$ pentru $y \in F_n$ și făcînd $m \to \infty$, rezultă $\langle \eta - \eta_\infty, y \rangle = 0$ pentru $y \in F_n$, adică $\langle \eta - \eta_\infty, y \rangle = 0$ pentru orice $y \in \bigcup_{n \geqslant 1} F_n$ și din continuitatea produsului scalar, același lucru are loc și pentru $y \in F_\infty$.

Aplicăm această lemă pentru $F_n = \mathrm{L}_n^2$, unde L_n^2 reprezintă spațiul L_ξ^2 dar pentru semnalul aleator $\{\xi_{t_1}, \xi_{t_2}, \ldots, \xi_{t_n}\}$, deci $F_\infty = \mathrm{L}_\xi^2$. Atunci $\hat{\eta} = \lim_{n \to \infty} \hat{\eta}_n$, iar $\hat{\eta}_n$ este calculată ca în cazul mulțimii timp finite.

În cazul $\mathscr{T}$ general se poate considera o submulțime numărabilă densă a lui $\mathscr{T}$ și calculul lui $\hat{\eta}$ se reduce la cazul precedent [19].

7.3. **Optimalitate liniară.** *Problema de optimalitate liniară* este o variantă a celei precedente: se fixează ca mai înainte $\eta \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ și $\xi \in \mathrm{S}_a$ și se cere să se determine v.a. $\hat{\eta} \in H_\xi$ astfel încît $M|\eta - \hat{\eta}|^2$ să fie minimă. În acest caz, soluția este $\hat{\eta} = \mathrm{pr}_{H_\xi} \eta$ și revine la a găsi ca mai sus acel $\hat{\eta} \in H_\xi$ astfel încît $M(\eta - \hat{\eta})\, \zeta = 0$, oricare ar fi $\zeta \in H_\xi$, adică $\mathrm{cov}\,(\eta - \hat{\eta}, \zeta) = 0$. Dacă se cunosc $M\eta$, $M\xi_t$, $D\eta$, $\mathrm{cov}\,(\eta, \xi_t)$ și $K_\xi(t, s)$, atunci calculul lui η în funcție de ξ_t, $t \in \mathscr{T}$ se poate da explicit. Acest lucru se poate face în practică în bune condiții și arată că problema de optimalitate liniară este mult mai simplă decît problema generală.

Rolul special al semnalelor gaussiene constă tocmai în aceea că problema generală de optimalitate se reduce atunci la cea liniară, mai precis are loc

Teorema V.9. *Fie η o variabilă aleatoare din $L_2(\Omega)$ și $\xi \in S_a$ un semnal aleator astfel încît toate repartițiile comune de probabilitate $P_{\eta\xi_{t_1,\ldots,t_p}}$, pentru orice $t_1, \ldots, t_p \in \mathcal{T}$ să fie gaussiene. Atunci soluția problemei liniare de optimalitate coincide cu soluția problemei generale de optimalitate.*

Demonstrație. Alegînd convenabil șirul de momente $t_1, t_2, \ldots$, rezultă că soluția problemei generale este $\hat{\eta} = \lim\limits_{n\to\infty} M(\eta \mid \xi_{t_1}, \ldots, \xi_{t_n})$. Dar media unei v.a. condiționate de v.a. normale este funcție liniară de acestea, deci $\hat{\eta} \in H_\xi$.

§8. Soluții ale problemelor filtrării și predicției

8.1. **Problema filtrării optimale și problema predicției.** Fie y, ξ două semnale aleatoare care diferă între ele printr-un zgomot aleator $\eta = \xi - y$, independent de y; presupunem că sînt studiate valorile lui y (necunoscut) cu ajutorul unor observații asupra lui ξ, cu scopul de a filtra, de a izola zgomotul η. Aceasta este *problema filtrării* pentru perechea (y, ξ). Un alt caz special al problemei de optimalitate îl constituie *problema predicției* (sau *prognozei*): dacă ξ este un semnal aleator din S_a și $t_0 < t_1$ sînt două momente de timp astfel încît să poată fi observate toate eșantioanele ξ_t, $t \leqslant t_0$ (trecutul lui t_0), și dacă vrem să obținem o predicție a lui $\eta = \xi_{t_1}$, un candidat poate fi $\hat{\eta}$, determinat ca în problema de optimalitate, cu deosebirea ca în locul spațiului L^2_ξ se consideră $L^2_{\leqslant t_0}$; așadar se efectuează o extrapolare a eșantioanelor semnalului ξ în afara intervalului $(-\infty, t_0]$. Se poate formula în mod similar o problemă duală de estimare a istoriei unui semnal, referitor la situația cînd $t_1 < t_0$ și se cere o extrapolare în afara intervalului $[t_0, \infty)$, pentru t_0 fixat.

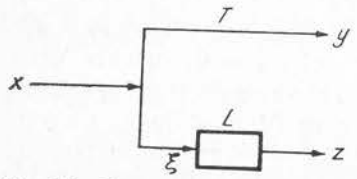


Fig. 5.5. Reprezentarea unui canal real și a unui canal ideal de transmisie.

Se pot imagina, sau se impun din considerente practice, variante ale problemelor precedente, inclusiv cazul mixt al filtrării cu predicție. În aplicații se utilizează curent filtrarea și predicția liniară (aceasta din urmă revenind la proiecția ortogonală pe subspațiul $H_{\leqslant t_0}$), în special în cazul cînd semnalele sînt asimilate cu semnale gaussiene.

Indicăm acum o interpretare sistemică pentru problemele în discuție. Presupunem că trebuie transmis un semnal $x(t)$ și fie ξ semnalul primit la capătul unui canal real de transmisie iar $y = Tx$ semnalul obținut din x după transmiterea acestuia prinr-un canal ideal. Fie $z = L\xi$ semnalul obținut din ξ după trecerea acestuia printr-un sistem liniar L, numit uneori *filtru*. Problema pusă revine în acest context la a determina L astfel încît aproximarea $z \approx y$ să fie cît mai bună (de exemplu, norma $\|y - z\|$ să fie minimă, în cazul cînd L și T sînt asimilați cu operatori liniari între spații convenabile de semnale, de tipul L_2).

Dacă sistemul liniar L are răspunsul-impuls h, atunci $z = \xi \cdot h$, adică $z_t = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, s)\, \xi_s\, ds$, $t \in \mathbb{R}$. Dacă sistemul L este invariant în timp, iar ξ este un semnal staționar de medie m, atunci $Mz_t = m \int_{-\infty}^{\infty} h(u)\, du$. Dacă h este funcție din L_1, evident filtrul este stabil și notînd cu $H(\omega) = F_h(\omega)$ transformata sa Fourier, adică funcția de transfer a filtrului, rezultă $Mz_t = m \cdot H(0)$. Remarcăm de asemenea că

$$M(z_t z_s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\, h(s-v)\, M(\xi_u \xi_v)\, du\, dv.$$

Presupunînd că ξ este staționar cu media nulă, rezultă pentru funcțiile de covarianță relația

$$K_z(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(t-u)\, h(s-v)\, K_\xi(u-v)\, du\, dv$$

și punînd $t - u = x$, $s - v = y$, rezultă

$$K_z(t, s) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, h(y)\, K_\xi(x+t-y-s)\, dx\, dy$$

și notînd $u = y - x$, rezultă

$$K_z(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, h(x+u)\, K_\xi(t-u)\, dx\, du.$$

Notînd $\rho = h * \check{h}$, adică

$$\rho(u) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, h(x+u)\, dx$$

(funcția ρ fiind uneori numită *funcția de autocorelație a filtrului* L), rezultă în final că între funcțiile de covarianță ale semnalelor ξ și z există legătura

$$K_z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(u)\, K_\xi(t-u)\, \mathrm{d}u,$$

adică $K_z = \rho * K_\xi$.

Așadar, proprietățile energetice ale semnalului de ieșire z sînt determinate prin această formulă și depind de proprietățile energetice ale intrării ξ; proprietățile statistice (funcție de repartiție, densitate de probabilitate etc.) ale lui z sînt însă mult mai dificil de exprimat în funcție de cele ale lui ξ, în afara cazului cînd ξ (deci și z) sînt gaussiene. Considerînd transformata Fourier în formula precedentă, rezultă $FK_z(\omega) = F_\rho(\omega) FK_\xi(\omega)$ și cum $F_\rho(\omega) = H(f)\overline{H(f)} = |H(f)|^2$, rezultă relația fundamentală

$$FK_z(\omega) = |H(f)|^2 FK_\xi(\omega).$$

Dacă ξ este un zgomot alb, atunci $FK_\xi(\omega)$ este o constantă și deci spectrul de putere al semnalului de ieșire corespunzător este proporțional cu pătratul modulului funcției de transfer a filtrului. Exemple importante de operatori T. L în teoria semnalelor sînt date în lucrarea [4].

8.2. **Predicția semnalelor aleatoare staționare.** Fie ξ_t un semnal aleator staționar avînd o reprezentare spectrală de forma (5.30)

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}t\lambda}\, \mathrm{d}\zeta_\lambda,$$

avînd densitatea spectrală $f(\lambda)$. Facem ipoteza că funcția $f(\lambda)$ este o funcție rațională care se poate pune sub forma

$$f(\lambda) = \left| \frac{P(\mathrm{j}\lambda)}{Q(\mathrm{j}\lambda)} \right|^2, \qquad (\forall)\lambda \in \mathbb{R}, \tag{5.40}$$

unde P, Q sînt polinoame cu coeficienți reali, stabile (cu rădăcinile situate în semiplanul $\mathrm{Re}\, z < 0$), $\mathrm{gr}\, P < \mathrm{gr}\, Q$, iar Q are toate rădăcinile simple.

Vom da soluția completă a următoarei probleme de predicție liniară: determinarea celei mai bune aproximări $\hat{\eta}$ a valorii viitorului $\eta = \xi_\tau$ ($\tau > 0$ fixat) din observarea eșantioanelor ξ_t, $t \leqslant 0$, considerînd că prezentul este $t = 0$.

Condiția (5.39) devine în acest caz $M(\xi_\tau - \hat{\eta}) \cdot w = 0$, $(\forall)\, w \in H_{\leqslant 0}$. Aceasta este echivalentă cu faptul că

$$M(\xi_\tau - \hat{\eta}) \cdot \xi_t = 0, \quad (\forall) t \leqslant 0, \tag{5.41}$$

deoarece din (5.41) rezultă relația anterioară pentru toate combinațiile liniare finite de forma $w = \sum_k c_k \xi_{t_k}$ și prin continuitate, pentru orice $w \in H_{\leqslant 0}$.

Pentru determinarea lui $\hat{\eta}$ este suficient să aflăm funcția $g(\mathrm{j}\lambda) \in L_2(\mathrm{d}F)$ astfel încît

$$\hat{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\mathrm{j}\lambda)\, \mathrm{d}\zeta_\lambda,$$

în sensul relației (5.23). Relația (5.41) devine

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t} [\mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda\tau} - g(\mathrm{j}\lambda)] f(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda = 0, \quad (\forall) t \leqslant 0.$$

Notînd

$$\varphi(\lambda) = [\mathrm{e}^{\mathrm{j}\tau\lambda} - g(\mathrm{j}\lambda)] \cdot f(\lambda), \tag{5.42}$$

se obține

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}\lambda t}\, \mathrm{d}\lambda = 0, \quad (\forall) t \leqslant 0. \tag{5.43}$$

Căutăm funcția g printre funcțiile de forma

$$g(\mathrm{j}\lambda) = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} a_k (\mathrm{j}\lambda)^k}{P(\mathrm{j}\lambda)}, \tag{5.44}$$

unde n este gradul polinomului Q și impunem coeficienților a_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, condiția ca funcția $\varphi(\lambda)$ să poată fi prelungită olomorf în semiplanul superior Im $\lambda \geqslant 0$. Din relațiile (5.42) și (5.44) rezultă

$$\varphi(\lambda) = \frac{e^{j\lambda\tau}P(j\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(j\lambda)^k}{P(j\lambda)} \cdot \left| \frac{P(j\lambda)}{Q(j\lambda)} \right|^2 =$$

$$= \frac{\left[e^{j\lambda\tau} \cdot P(j\lambda) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k(j\lambda)^k \right] \cdot P(-j\lambda)}{Q(j\lambda)\, Q(-j\lambda)} .$$

Dacă $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sînt rădăcinile lui Q (presupuse distincte) și dacă se determină coeficienții a_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, astfel încît să fie verificat sistemul Vandermonde

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k (r_p)^k = e^{r_j\tau}\ P(r_p), \quad 1 \leqslant p \leqslant n, \tag{5.45}$$

rezultă într-adevăr că $\varphi(\lambda)$ este olomorfă în semiplanul Im $\lambda > 0$, deoarece atît numărătorul cît și numitorul se anulează pentru $\lambda = -jr_p$, iar polinomul Q este presupus stabil. O majorare convenabilă arată că funcția φ verifică condiția (5.43). Într-adevăr, considerînd conturul constînd din segmentul $[-R, R]$, $R > 0$, al dreptei reale și semicercul $\gamma : |z| = R$, Im $z > 0$, parcurs pozitiv, din teorema lui Cauchy rezultă

$$\int_{-R}^{R} \varphi(\lambda)\, e^{j\lambda t}\, d\lambda = -\int_{\gamma} \varphi(\lambda)\, e^{j\lambda t}\, d\lambda.$$

Dar

$$\left| \int_{\gamma} \varphi(\lambda)\, e^{j\lambda t}\, d\lambda \right| \leqslant \sup_{|\lambda|=R} |\varphi(\lambda)| \cdot \pi R$$

și cum $|\varphi(\lambda)|$ descrește pentru $|\lambda| \to \infty$ ca $\frac{1}{|\lambda|^{n-m+1}}$, unde m este gradul lui P, iar n gradul lui Q, rezultă că pentru orice $t \leqslant 0$ avem

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, e^{j\lambda t}\, d\lambda = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \varphi(\lambda) e^{j\lambda t}\, d\lambda = -\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma} \varphi(\lambda)\, e^{j\lambda t} d\lambda = 0.$$

Este de asemenea evident că funcția $g(j\lambda)$ definită prin (5.44) aparține lui $L_2(dF)$.

Rezumînd discuția precedentă, se poate formula

Teorema V.10 [13]. *În ipoteza* (5.40) *asupra semnalului aleator staționar* ξ_t, *predicția* $\hat{\eta}$ *a viitorului* $\eta = \xi_\tau$ ($\tau > 0$ *fixat*) *este dată prin*

$$\hat{\eta} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k I_k ,$$

unde coeficienții a_k, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, *sînt determinați prin rezolvarea sistemului* (5.45), $n = \mathrm{gr}Q$, *iar*

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(j\lambda)^k}{P(j\lambda)}\, d\zeta_\lambda , \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Vom da un corolar al acestei teoreme, de fapt o altă reprezentare a soluției $\hat{\eta}$ a problemei puse. Coeficienții a_k fiind determinați prin sistemul (5.45), împărțim polinomul $\sum_{k=0}^{n-1} a_k(j\lambda)^k$ prin $P(j\lambda)$ și fie $\sum_{p=0}^{n-m-1} b_p(j\lambda)^p$ cîtul obținut și $R(j\lambda)$ restul respectiv. Atunci conform cu (5.44) rezultă

$$g(j\lambda) = \sum_{p=0}^{n-m-1} b_p(j\lambda)^p + \frac{R(j\lambda)}{P(j\lambda)} . \tag{5.46}$$

Fracția $\frac{R(j\lambda)}{P(j\lambda)}$ poate fi descompusă în fracții simple de forma $\frac{1}{(j\lambda - u)^s}$, unde u este rădăcină a polinomului P, Re $u < 0$. Cum

$$\frac{1}{(j\lambda - u)^s} = \int_0^{\infty} \frac{(-1)^s x^{s-1}}{(s-1)!} e^{-(j\lambda - u)x}\, dx,$$

rezultă că fracția $\frac{R(j\lambda)}{P(j\lambda)}$ poată fi scrisă sub forma

$$\frac{R(j\lambda)}{P(j\lambda)} = \int_0^{\infty} e^{-j\lambda x} M(x)\, dx, \tag{5.47}$$

unde M este o combinație liniară de funcții de forma $x^{s-1} e^{ux}$, $x \geqslant 0$.

Corolarul 1. *Cu notațiile precedente, avem*

$$\hat{\eta} = \sum_{p=0}^{n-m-1} b_p \xi^{(p)}(0) + \int_{-\infty}^{0} M(-t)\, \xi_t \, dt. \tag{5.48}$$

Demonstrație. Avem conform cu (5.46), (5.47)

$$\hat{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} g(j\lambda)\, d\zeta_\lambda = \sum_{p=0}^{n-m-1} b_p \int_{-\infty}^{\infty} (j\lambda)^p d\zeta_\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-j\lambda x} M(x)\, dx \right) d\zeta_\lambda.$$

Din relația

$$\xi_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{jt\lambda} d\zeta_\lambda \quad \text{rezultă} \quad \xi^{(p)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} (j\lambda)^p \, d\zeta_\lambda$$

și, pe de altă parte,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-j\lambda x} M(x)\, dx \right) d\zeta_\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{j\lambda t} M(-t)\, dt \right) d\zeta_\lambda = \int_{-\infty}^{0} M(-t) \xi_t \, dt.$$

Rezultă atunci imediat formula din corolar.

Corolarul 2. *Cu notațiile precedente, dar înlocuind momentul $t = 0$ cu un moment t_0 arbitrar, are loc formula ($\tau > t_0$)*

$$\hat{\eta} = \sum_{p=0}^{n-m-1} b_k \xi^{(p)}(t_0) + \int_{-\infty}^{t_0} M(t_0 - s)\, \xi_s \, ds. \tag{5.49}$$

Demonstrația este absolut similară celei a corolarului 1.

Corolarul 3. *Asocierea $\xi \mapsto \hat{\eta}$ (pentru $\tau > t_0$ fixate) este liniară și poate fi realizată printr-un sistem dinamic liniar avînd funcția de ponderare M.*

Demonstrația rezultă direct din formula (5.49) și din cele spuse la 6.5.

Formulele precedente conduc cu ușurință la alcătuirea unui program de calcul al predicției optimale. Remarcăm de asemenea că acestea pot fi extinse la cazuri mai generale de densități spectrale $f(\lambda)$ [13].

8.3. **Filtrare liniară a unui zgomot aleator.** Fie $y(t)$ un semnal deterministic necunoscut și η_t un semnal aleator (zgomot) staționar cu media nulă astfel încît să se poată face observații asupra semnalului $\xi_t = y(t) + \eta_t$, $t \in \mathcal{T}$, cu scopul estimării funcției y pe intervalul de timp $\mathcal{T}$ și al posibilității de izolare a acesteia de zgomotul η.

În ipoteza că $\mathcal{T} = [a, b]$ și semnalul y este de forma $y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t)$, unde φ_k sînt funcții reale fixate, liniar independente peste $\mathbb{R}$, iar a_k sînt coeficienți reali $1 \leqslant k \leqslant n$, un criteriu de estimare a coeficienților $a_1, \ldots, a_n$ este acela de a determina v.a. $\eta_1, \ldots, \eta_n$ astfel încît

$$\int_a^b \left[\xi_t - \sum_{k=1}^{n} \eta_k \varphi_k(t) \right]^2 dt = \inf_{c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}} \int_a^b \left[\xi_t - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \right]^2 dt.$$

Din metoda celor mai mici pătrate este binecunoscut că minimul din dreapta este atins pentru valorile

$$\eta_k = c_k = \sum_{p=1}^{n} \lambda_{kp} \int_a^b \varphi_p(t)\, \xi_t dt, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{5.50}$$

unde $[\lambda_{kp}]_{1 \leqslant k,p \leqslant n}$ reprezintă matricea inversă a matricei

$$\left[\int_a^b \varphi_k(t) \varphi_p(t)\, dt \right]_{1 \leqslant k,p \leqslant n}.$$

Integralele $\int_a^b \varphi_p(t)\, \xi_t \, dt$ sînt considerate în sensul lui (5.23) și rezultă atunci că $\eta_k \in H_\xi$. În plus, $M\eta_k = \sum_{p=1}^{n} \lambda_{kp} \cdot \mu_p$, unde

$$\mu_p = M \int_a^b \varphi_p(t)\, \xi_t \, dt = \int_a^b \varphi_p(t)\, (M\xi_t)\, dt = \int_a^b \varphi_p(t)(My_t + M\eta_t) dt =$$

$$= \int_a^b \varphi_p(t)\, y(t)\, dt.$$

Se observă că valorile medii $M\eta_k$ se obțin după formula (5.50), cu deosebirea că se înlocuiește ξ_t prin $y(t)$; așadar aceste valori realizează minimul expresiei

$$\int_a^b |\, y(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(t) \,|^2 \, dt.$$

Dar pentru $y(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t)$ minimul respectiv este nul și este atins pentru $c_k = a_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$. Rezultă de aici că $M\eta_{ik} = a_k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, deci v.a. $\eta_{i1}, \ldots, \eta_{in}$ definite prin (5.50) sînt estimări liniare centrate ale coeficienților necunoscuți $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Acesta este un caz simplu de filtrare a semnalului y, deci de calcul al lui y după formula aproximativă $y \simeq \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(t)$.

BIBLIOGRAFIE

1. Cuculescu, I. *Procese Markov și funcții excesive.* București, Editura Academiei R.S.R, 1968.
2. Dupraz, J. *Théorie de la communication.* Paris, Eyrolles, 1973.
3. Feller, W. *An introduction to probability theory and its applications.* I, II. New York, J. Wiley, 1966.
4. Franks, L. E. *Signal theory.* New Jersey, Prentice Hall, 1969.
5. Gonorovski, I. S. *Radiotehniceskie țepi i signali.* Moscova, Izd. Sov. Radio, 1977.
6. Gribanov, Iu. I., Malkov, V. L. *Spectralnii analiz sluceainih professov.* Moscova, Energhia, 1974.
7. Iosifescu, M. *Lanțuri Markov finite și aplicații.* București, Editura tehnică, 1977.
8. Lamperti, I. *Stochastic processes.* Berlin, Springer Verlag, 1977.
9. Levin, B. R. *Teoreticeskie osnovi statisticeskoi radiotehniki.* I, II, III, Moscova, Izd. Sov. Radio. 1974–1976.
10. Onicescu, O., Mihoc Gh., Ionescu-Tulcea, C. *Calculul probabilităților și aplicații.* București, Editura Academiei R.S.R. 1956.
11. Pugachev, V. S. *Introduction a la Teoria de los Probabilidades.* Moscova, Mir, 1973.
12. Rîtov, S. M. *V vedenie v statisticeskuiu radiofiziku.* I. Moscova, Nauka, 1976.
13. Rozanov, Y. *Processus aléatoires.* Moscova, Mir, 1975.
14. Spătaru, Al. *Teoria transmiterii informației,* I, București, Editura tehnică, 1965.
15. Stanomir, D. *Méthodes mathematiques pour les processus aléatoires stationnaires.* Bul. IPB. Nr. 3, 1968, pp. 215–224.
16. Stănășilă, T. *Nivele extremale ale unor zgomote aléatoare,* Bul. IPB, Nr. 1, 1977, pp. 9–11.
17. Șilov, G. E. *Matematiceski analiz* (spețialnii kurs). Moscova, 1961.
18. Tutubalin, V. N. *Teoria veroeatnostei.* Moscova, Izd. Moskovskogo Universiteta, 1972.
19. Venței, A. D. *Kurs teorii sluceainih professov,* Moscova, Nauka, 1975.
20. Venței, H. *Theorie des probabilités.* Moscova, Mir, 1973.

Capitolul VI

TEHNICI DE PRELUCRARE ȘI ALGORITMI ÎN TEORIA SEMNALELOR

§ 1. Eșantionarea semnalelor

În general, un semnal continuu se consideră determinat dacă se cunosc valorile lui la toate momentele; există situații unde, în ipoteza că semnalul aparține unei anumite clase C, este suficient să fie cunoscute doar un număr restrîns de eșantioane ale semnalului. De exemplu, dacă C este clasa funcțiilor real-analitice (i.e. funcții local dezvoltabile în serii de puteri) și dacă se cunosc valorile unui semnal real-analitic într-un șir de momente avînd punct de acumulare, atunci conform principiului prelungirii analitice, semnalul este unic determinat în întreg domeniul său de definiție. De asemenea, dacă C este clasa semnalelor din L_2, cu banda mărginită de frecvență $(-f, f)$, atunci formula (3.53) din teorema III.6′ arată că un astfel de semnal este bine determinat prin eșantioanele sale luate la momentele $0, \pm T, \pm 2T, \ldots$, unde $T = \frac{1}{2f}$ (mărimea f este numită uneori frecvența lui Nyquist, este măsurată în Hz și poate fi determinată experimental). Formula (3.53) poate fi scrisă sub forma

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x\left(\frac{n}{2f}\right) \cdot \frac{\sin \pi(2ft - n)}{\pi(2ft - n)}, \quad (\forall)\, t \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

În aceleași ipoteze relativ la semnalul x (presupus din $L_1 \cap L_2$), funcția spectrală a semnalului x^2 va fi $F_{x^2}(\omega) = F_x(\omega) * F_x(\omega)$, conform teoremei II.20, și cum suportul produsului de convoluție

este conținut în suma suporturilor factorilor, rezultă că $F_{x^2}(\omega) = 0$ pentru $|\omega| \geqslant 2\pi f$. Se obține atunci formula de eșantionare a pătratului unui semnal, anume

$$x^2(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^2\left(\frac{n}{4f}\right) \cdot \mathrm{Sa}\,(\pi(4ft - n))$$

și, mai general,

$$x^k(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^k\left(\frac{n}{2kf}\right) \cdot \mathrm{Sa}\,(\pi\,(2kft - n)), \text{ pentru } k \geqslant 1.$$

Denumirea de funcție de fantă sau funcție de eșantionare dată funcției sa este pe deplin justificată prin formulele anterioare ; o proprietate importantă este aceea că șirul $\varphi_n(t) = \mathrm{Sa}\,(\pi(2ft - n))$, $n \in \mathbb{Z}$, este un șir ortogonal de funcții din L_2, așa cum am remarcat în cap. III, § 5, lema 7 (sau cum se probează direct ținînd seama de formula lui Parseval și de expresia transformatei Fourier a funcției Sa). Formula (6.1) se scrie atunci sub forma

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x\left(\frac{n}{2f}\right) \cdot \varphi_n(t)$$

și, ca o consecință, energia semnalului x este egală cu

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2\,\mathrm{d}t = \sum_{m,n} x\left(\frac{m}{2f}\right) x\left(\frac{n}{2f}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(t)\,\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \sum_{m,n} x\left(\frac{m}{2f}\right) \cdot x\left(\frac{n}{2f}\right) \langle \varphi_m, \varphi_n\rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^2\left(\frac{n}{2f}\right) \|\varphi_n\|^2 =$$

$$= \frac{1}{2f} \sum_{n\in\mathbb{Z}} x^2\left(\frac{n}{2f}\right),$$

deci este proporțională cu suma pătratelor eșantioanelor luate.

Formula (6.1) se restabilește fără dificultate dacă eșantioanele sînt luate la momentele $t_0 + nT_1$, deci cu o decalare de timp și pentru $T_1 \leqslant T$, anume

$$x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x\left(t_0 + \frac{n}{2f_1}\right) \frac{\sin 2\pi f_1\left(t - t_0 - \dfrac{n}{2f}\right)}{2\pi f_1\left(t - t_0 - \dfrac{n}{2f_1}\right)}, \quad (\forall) t \in \mathbb{R},$$

unde $f_1 = \dfrac{1}{2T_1}$.

Așa cum am remarcat deja în cap. III, § 6, se poate stabili o formulă de același tip pentru cazul cînd eșantioanele nu ar fi echidistante, caz întîlnit în telemetrie, în transmisii pe mai multe canale sau atunci cînd în anumite intervale de timp trebuie transmisă o informație mai densă etc. În fine, vom vedea că formula (6.1) se extinde fără dificultate la cazul semnalelor aleatoare.

Fără a da detalii, semnalăm că formule de eșantionare, în care apar dificultăți mari de natură geometrică, pot fi stabilite și în cazul semnalelor multidimensionale [16]. În această lucrare ne-am ocupat prin excelență de semnale unidimensionale.

1.1. **Eșantionare în domeniul frecvență.** Din teorema III.6′ privind eșantionarea în domeniul timp a unui semnal și din proprietățile transformării Fourier, se obține o teoremă duală, de eșantionare în frecvență a spectrului unui semnal, care arată că pentru un semnal de durată finită, valoarea spectrului pe orice frecvență este bine determinată dacă se cunosc valorile ei într-un șir de puncte discrete ; mai precis, are loc

Teorema VI.1. *Fie* $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un semnal din* L_1 *cu durată mărginită*, i.e. $x(t) = 0$, *pentru orice* $|t| \geqslant \dfrac{\tau}{2}$, $\tau > 0$ *fixat. Atunci spectrul lui* x *este bine determinat prin cunoașterea valorilor sale într-un șir de puncte echidistante* $\left(cu\ \dfrac{1}{\tau}\right)$, *anume are loc formula*

$$F_x(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} F_x\left(\frac{n}{\tau}\right) \cdot \mathrm{Sa}(\pi(\tau\omega - n)), \quad (\forall)\ \omega \in \mathbb{R}. \tag{6.2}$$

Demonstrație. În analogie cu relația (3.54) se demonstrează că

$$x(t) = \left[\sigma\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\tau}{2}\right)\right] \cdot \left[x(t) * \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t - n\tau)\right]$$

și aplicînd transformarea Fourier, se obține relația

$$F_x(\omega) = \frac{\sin \pi\omega\tau}{\pi\omega} * \left[F_x(\omega) \cdot \frac{1}{\tau} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{n}{\tau}\right)\right] =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{n}{\tau}\right) \cdot \left[\frac{\sin \pi\omega\tau}{\pi\omega\tau} * F_x(\omega)\right],$$

de unde rezultă formula din enunț.

1.2. **Observații.** În ceea ce privește modul de utilizare tehnică a formulei (6.1) și similar pentru (6.2), se poate observa că fiecare termen al seriei din membrul al doilea al formulei (6.1) este răspunsul unui filtru ideal trece-jos cu frecvența maximă $\alpha = \frac{\pi}{T}$, aplicînd la intrare cîte un impuls Dirac la fiecare moment nT, cu intensitate $x(nT)$. La intervale egale de timp de lungime T se consideră valorile instantanee $x(nT)$ și pe canalul de transmisie se transmit periodic impulsuri scurte cu aceeași lungime, cu amplitudini proporționale cu $x(nT)$. La recepție aceste impulsuri apar la intrarea unui fitru ideal trece-jos cu frecvența limită α, astfel încît la ieșire, ca răspuns la fiecare din impulsuri, să se obțină o mărime proporțională cu $\mathrm{Sa}(2\pi f(\tau - nT))$, τ fiind momentul t la care se adaugă o întîrziere depinzînd de filtru. Filtrele fiind liniare, la ieșire răspunsurile se adună și se obține valoarea $x(\tau)$ a semnalului. Am asimilat începutul transmisiei cu momentul $-\infty$ și valoarea $x(\tau)$ este cunoscută complet la momentul $+\infty$; în practică ne restrîngem la un interval $[A, B]$, pentru că nu pot fi transmise o infinitate de eșantioane și depinde de cercetător ca erorile posibile (de calcul, de prezență a diverselor zgomote etc.) să aibă efect cît mai redus. Dacă semnalul x este eșantionat pe un interval de timp $[0, A]$, cu valorile măsurate $a_n = x(nT)$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$, unde $N = [A/T]$ (aici $[\ ]$ înseamnă partea întreagă) și dacă se presupune că toate celelalte eșantioane sînt nule, atunci formula (6.1) se scrie

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{T}(t - nT)\right).$$

Este de notat că N este o rată minimală de eșantionare dacă vrem să păstrăm informația cuprinsă în semnalul $x(t)$. Desigur, faptul că eșantioanele din afara intervalului $(0, A)$ sînt nule nu înseamnă că semnalul x este identic nul acolo.

În orice caz, trebuie reținut că într-un interval de timp de lungime A, semnalul cu bandă de frecvență $(-f, f)$ este practic determinat prin $[2fA]$ eșantioane.

1.3. **Eșantionare ideală și eșantionare analogică.** Fixăm un pas de eșantionare $T > 0$. Pentru orice semnal continual $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se poate considera semnalul discret $\varepsilon(x) = \{x(nT)\}_{n\in\mathbb{Z}}$, numit *T-eșantionarea lui x*. Invers, pentru orice semnal discret $a = \{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ se poate defini semnalul continual $x = \rho(a)$, punînd $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = a_n \text{ dacă } t \in [nT,\ (n+1)T),\ n \in \mathbb{Z},$$

numit *T-reținerea* (sau *blocarea*) lui a. Operatorii de reținere și de eșantionare nu sînt inverși unul altuia; mai precis, au loc relațiile

$$\varepsilon\rho(a) = a,\ \rho\varepsilon(x) \neq x \text{ etc.}$$

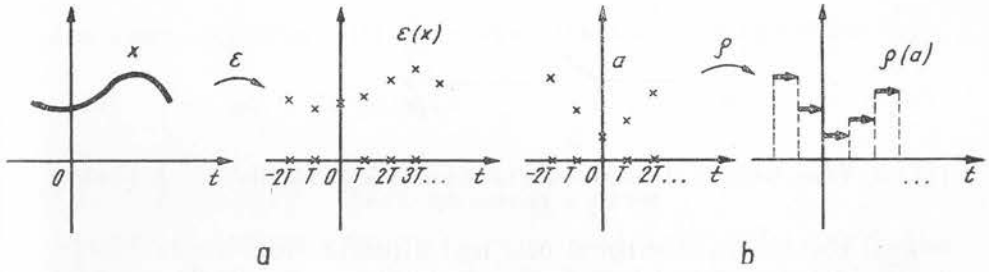
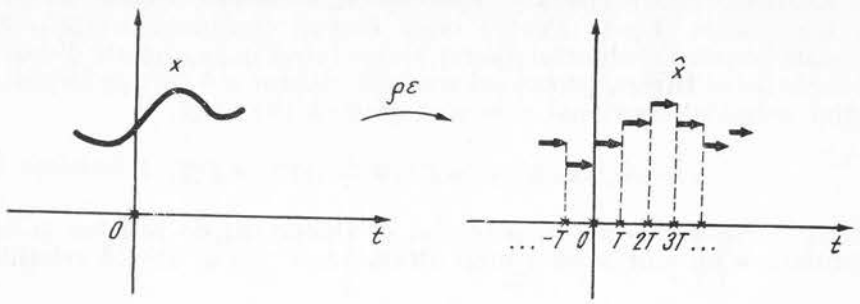


Fig. 6.1. Reprezentarea: a) operatorului ε de T-eșantionare; b) operatorul ρ de T-reținere.

Pentru orice semnal continual $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ vom utiliza în cele ce urmează notația $\hat{x}$ pentru semnalul $\rho\varepsilon(x)$. Evident, $\hat{x}$ este o aproximare în scară a lui x. Dacă x este o funcție continuă și T este ales suficient de mic, atunci $\hat{x}$ este o aproximare oricît de bună a lui x. Realizarea tehnică a operatorului $x \mapsto \hat{x}$ este lesnicioasă (închiderea „rețelei" la fiecare T unități de timp).

Formula (6.1) dă condiții ca un semnal să fie determinat prin eșantionare discretă de pas $T = \frac{1}{2f}$; această proprietate este utilizată curent în transmisia informației și revine în esență la înlocuirea semnalului continual x inițial prin semnalul discret $\varepsilon(x)$, folosind multiplicatorii $\mathrm{Sa}(\pi(2ft - n))$. Pentru a determina lărgimea canalului de transmisie, ca și pentru prelucrarea convenabilă a semnalului, este util să fie cunoscut spectrul semnalului eșantionat și, în acest sens, indicăm cîteva metode de calcul al spectrului unui



a

b

Fig. 6.2. Reprezentarea : a) semnalului $\tilde{x}$ asociat unui semnal continual x ; b) realizare tehnică a operatorului $x \mapsto \tilde{x}$.

semnal eşantionat, distingînd cele mai utilizate procedee de eşantionare. Introducem mai întîi două distribuţii remarcabile de ordin 0 :

a) *Distribuţia de eşantionare ideală* $\Delta = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta_{kT}$ [sau indicînd variabila independentă în funcţiile test, $\Delta(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta(t - kT)$].

b) *Distribuţia de eşantionare analogică*

$$\Delta_{\text{an}} = \left[\sigma\left(t + \frac{\alpha}{2} \right) - \sigma\left(t - \frac{\alpha}{2} \right) \right] * \Delta, \quad \alpha < T.$$

Pentru orice semnal continuu $x \in \mathrm{C}^0(\mathbb{R})$ *eşantionarea ideală* a sa este prin definiţie distribuţia $\tilde{x} = x\Delta$, adică $\tilde{x}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT)\, \delta(t - nT)$ şi apare ca un şir de impulsuri Dirac astfel încît la fiecare moment nT intensitatea să fie $x(nT)$.

Spectrul lui $\tilde{x} = x\Delta$ este

$$F_{\tilde{x}}(\omega) = F_x(\omega) * F_\Delta = F_x(\omega) * \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{T} \right) =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_x\left(\omega - \frac{2\pi n}{T} \right),$$

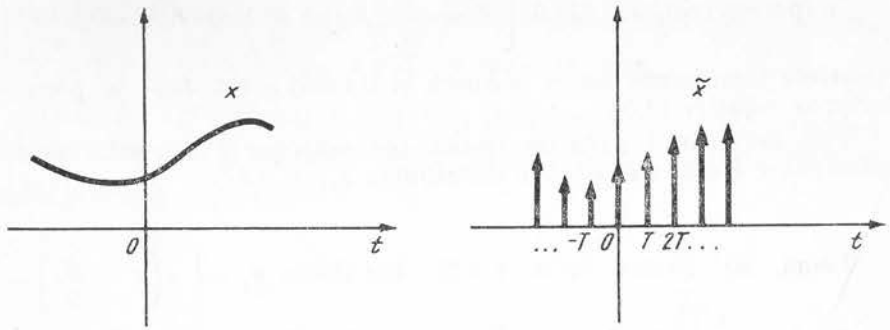


Fig. 6.3. Reprezentarea eşantionării ideale $\tilde{x}$ a unui semnal continuu x.

deci apare ca produsul lui $\frac{1}{T}$ cu suma translatatelor spectrului $F_x(\omega)$ al lui x (cu pasul de translaţie $\frac{1}{T}$, deci egal cu frecvenţa de eşantionare), deci spectrul semnalului eşantionat ocupă o bandă infinită : se spune că porţiunea centrală $\left(-\frac{1}{T}, \frac{1}{T} \right)$ a spectrului corespunde semnalului de bază, iar celelalte porţiuni corespund unui semnal auxiliar şi recuperarea semnalului de bază din eşantioanele sale constă tocmai în separarea de semnalul auxiliar ; acest lucru se realizează printr-un filtru ideal trece-jos, iar practic aceasta se face numai cu aproximaţie, prin mărirea frecvenţei de eşantionare şi prin utilizarea unor filtre convenabile.

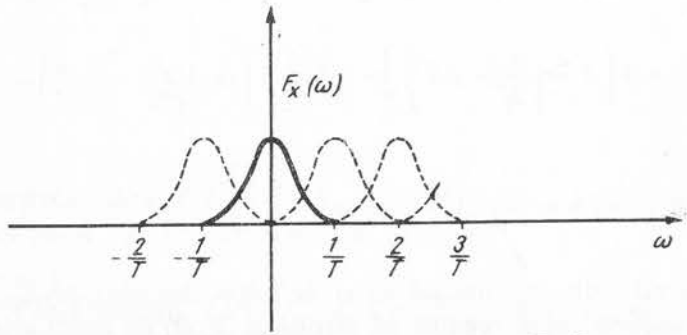


Fig. 6.4. Ilustrarea grafică a spectrelor F_x, $F_{\tilde{x}}$.

În ipoteza teoremei III.6′ $\left[T = \frac{1}{2f},\ F_x(\omega) = 0 \ \text{pentru} \ |\omega| \geqslant 2\pi f \right]$ spectrele translatate nu se acoperă și tocmai acest fapt a permis scrierea relației (3.54).

Prin definiție, pentru un semnal continuu $x \in C^0(\mathbb{R})$, se numește *eșantionare analogică* a lui x distribuția $\tilde{x}_{an} = x\Delta_{an}$.

Lemă. a) *Pentru orice* $k \in \mathbb{Z}$ *distribuția* $\underline{y}_k = \left[\sigma\left(t + \frac{\alpha}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\alpha}{2}\right) \right] * \delta_{kT}$, $\alpha < T$, *este o distribuție regulată, asociată funcției*

$$y_k(t) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } t \in \left[-\frac{\alpha}{2} + kT, \frac{\alpha}{2} + kT \right), \\ 0 & \text{în rest.} \end{cases}$$

b) *Are loc relația* $\Delta_{an} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underline{y}_k$.

Demonstrație. a) Avem $\left[\sigma\left(t + \frac{\alpha}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\alpha}{2}\right) \right] * \delta_{kT} =$

$$= \left[\sigma\left(t + \frac{\alpha}{2}\right) - \sigma\left(t - \frac{\alpha}{2}\right) \right] * \delta(t - kT) = \left[\sigma\left(t + \frac{\alpha}{2} - kT\right) - \right.$$

$$\left. - \sigma\left(t - \frac{\alpha}{2} - kT\right) \right] * \delta = \left[\sigma\left(t + \frac{\alpha}{2} - kT\right) - \right.$$

$$\left. - \sigma\left(t - \frac{\alpha}{2} - kT\right) \right]_- = \underline{y}_k.$$

b) rezultă direct folosind a) și definiția distribuției Δ_{an}.

Din această lemă rezultă că semnalul $\tilde{x}_{an}(t)$ de eșantionare analogică a lui x este suma unei serii, convergente în sensul teoriei distribuțiilor, de semnale, egale cu semnalul inițial x pe fiecare interval $\left[-\frac{\alpha}{2} + kT, \frac{\alpha}{2} + kT \right)$, $k \in \mathbb{Z}$, și nule în rest.

Dacă $x \in L_1^{loc}$, atunci $\tilde{x}_{an} \in L_1^{loc}$ și distribuția $\tilde{x}_{an} = x\Delta_{an}$ se identifică cu funcția $\sum_{k \in \mathbb{Z}} x(t)\, y_k(t)$, care se notează tot cu $\tilde{x}_{an}$ și este reprezentată grafic în fig. 6.5.

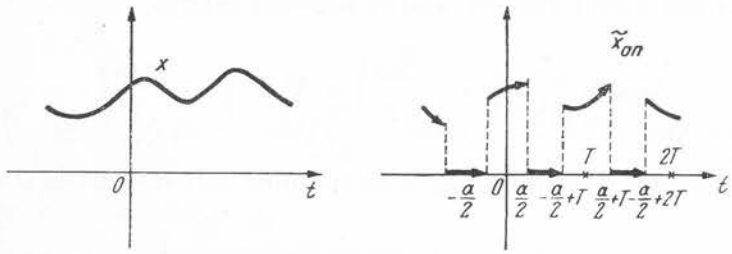


Fig. 6.5. Reprezentarea eșantionării analogice $\tilde{x}_{an}$ a unui semnal continuu x.

Așadar pe intervalele de timp de lungime α, condiția $\alpha < T$ fiind esențială (altfel impulsurile s-ar acoperi), vîrfurile impulsurilor reproduc semnalul x. Realizarea tehnică a lui $\tilde{x}_{an}$ se face printr-un întreruptor comandat de un semnal orologiu, care decupează semnalul $x(t)$, fiind închis în timpul impulsurilor și deschis altminteri.

Teorema VI.2. *Spectrul semnalului eșantionat analogic* $\tilde{x}_{an}$ *este egal cu*

$$\frac{\alpha}{T} \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\sin n\pi \frac{\alpha}{T}}{n\pi \frac{\alpha}{T}} \cdot F_x\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right).$$

Demonstrație. Avem $\tilde{x}_{an} = x\,\Delta_{an}$, deci $F_{\tilde{x}_{an}}(\omega) = F_x(\omega) * F_{\Delta_{an}}(\omega)$. Pe de altă parte, pentru un semnalul orologiu

$$s(t) = \begin{cases} A \ \text{pentru} \ t \in \left[-\frac{\alpha}{2} + kT, \frac{\alpha}{2} + kT \right), \ k \in \mathbb{Z}, \\ 0 \qquad\qquad \text{în rest,} \end{cases}$$

avem

$$F_s(\omega) = A\,\frac{\alpha}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\sin\, n\pi\,\dfrac{\alpha}{T}}{n\pi\,\dfrac{\alpha}{T}}\,\delta\left(\omega-\frac{2\pi n}{T}\right).$$

Formula din enunț rezultă atunci folosind relația

$$F_x(\omega) * \sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta\left(\omega-\frac{2\pi n}{T}\right)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}F_x\left(\omega-\frac{2\pi n}{T}\right).$$

Așadar, spectrul semnalului $\tilde{x}_{\mathrm{an}}$ este compus dintr-o sumă de translatate ale spectrului x, cu multiplicatorii $\dfrac{\sin\, n\pi\,\dfrac{\alpha}{T}}{n\pi\,\dfrac{\alpha}{T}}$, nedepinzînd de ω. Din nou, în ipoteza teoremei III.6′, aceste translatate nu se acoperă. Lărgimea spectrului lui $\tilde{x}_{\mathrm{an}}$ are ordinul de mărime $\dfrac{1}{\alpha}$, ceea ce rezultă luînd înfășurătoarea translatatelor în jurul frecvenței $\omega = 0$, ținînd seama de variația funcției $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$. Așadar această lărgime depinde numai de durata impulsurilor de eșantionare și este mai slabă decît în cazul precedent al eșantionării ideale.

Un alt tip utilizat de eșantionare este cel *cu reținere*, în care semnalul $x(t)$ este eșantionat cu impulsuri de formă oarecare, dar cu amplitudini proporționale cu eșantioanele $x(nT)$. De regulă, se consideră cazul impulsurilor dreptunghiulare. Fie

$$u(t) = \begin{cases}1, \text{ dacă } t\in[0,\,T),\\ 0 \quad \text{în rest.}\end{cases}$$

În analogie cu distribuțiile Δ, Δ_{an} introduse mai sus, se poate introduce *distribuția de eșantionare cu reținere* $\Delta_r = u * \Delta$. Pentru orice semnal continuu x eșantionarea sa cu reținere este prin definiție distribuția $\hat{x} = x\,\Delta_r$.

Teorema VI.3. *Fie un semnal oarecare continuu* $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$.
(a) *Pentru orice* $k\in\mathbb{Z}$ *distribuția* $\underset{\sim}{y}_k = u * x\delta_{kT}$ *este regulată, asociată funcției*

$$y_k(t) = \begin{cases}x(kT), \text{ dacă } t\in[kT,\,(k+1)T),\ k\in\mathbb{Z},\\ 0 \qquad\qquad \text{în rest.}\end{cases}$$

(b) *Are loc formula* $\hat{x} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\underset{\sim}{y}_k$.

Demonstrație. (a) Pentru orice $\varphi\in\mathscr{D}$ avem

$$\langle \underset{\sim}{y}_k,\ \varphi\rangle =$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} y_k(t)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t = x(kT)\int_{kT}^{(k+1)T}\varphi(t)\,\mathrm{d}t = x(kT)\int_0^T\varphi(p+kT)\,\mathrm{d}p$$

și, pe de altă parte,

$$\langle u * x\delta_{kT},\ \varphi\rangle = x(kT)\cdot\langle u*\delta_{kT},\ \varphi\rangle = x(kT)\int_{-\infty}^{\infty}u(t-kT)\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$= x(kT)\int_0^T\varphi(p+kT)\,\mathrm{d}p.$$

(b) rezultă direct din definiții.

În ipoteza că $x\in\mathrm{L}_1^{\mathrm{loc}}$, rezultă că distribuția $\hat{x}$ se identifică cu funcția $\hat{x} = \rho'\varepsilon(x)$ definită anterior.

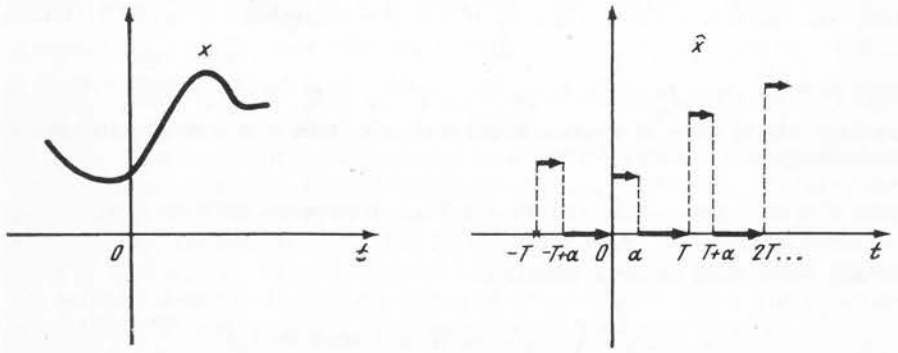


Fig. 6.6. Reprezentarea eșantionării cu reținere, menținînd semnalul pe durata impulsurilor, anulat în restul timpului.

Se poate generaliza eșantionarea cu reținere, menținînd de exemplu constant nivelul semnalului în timpul duratei impulsurilor și anulîndu-l în rest.

Dacă eșantioanele sînt realizate printr-un impuls $p(t)$, atunci semnalul eșantionat va avea expresia

$$\hat{x}(t) = p(t) * \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \cdot \delta(t - nT), \tag{6.3}$$

iar spectrul corespunzător va fi $F_{\hat{x}}(\omega) = \frac{1}{T} F_p(\omega) \sum_{n \in \mathbb{Z}} F_x\left(\omega - \frac{2\pi n}{T}\right)$. Așadar, acesta este suma spectrelor translatate ale semnalului inițial, multiplicată cu $\frac{1}{T}$ și cu spectrul impulsului de eșantionare, deci forma spectrelor translatate este distorsionată. În cazul impulsurilor dreptunghiulare de eșantionare avînd durata α, se poate considera că lărgimea spectrului $F_{\hat{x}}$ are ordinul de mărime $\frac{1}{\alpha}$. Se menține și de această dată observația că, în ipoteza teoremei de eșantionare, spectrele translatate nu se acoperă.

1.4. **Observații.** Am prezentat succint cîteva procedee de eșantionare, unde în locul unui semnal analogic dat $x(t)$ este transmis un semnal de tipul $\tilde{x}$, $\tilde{x}_{an}$, $\hat{x}$ etc. După recepție este necesară restabilirea cît mai precisă a semnalului inițial, ceea ce se face de regulă printr-un procedeu de interpolare, conducînd la un semnal pe care îl notăm $x_i(t)$. Reamintim aici că dacă x este un semnal de clasă C^2 și dacă se cunosc eșantioanele $x_k = x(kT)$, $k \in \mathbb{Z}$, atunci se poate recupera x cu aproximație pe intervalele $I_n = [nT, (n+1)T)$ folosind formule aproximative de tipul $x(t) \approx x_n + x'_n(t - nT)$ — interpolare de gradul întîi, sau $x(t) \approx x_n + x'_n(t - nT) + \frac{x''_n}{2}(t - nT)^2$ — interpolare de gradul al doilea, unde $x'_n \approx \frac{1}{T}(x_n - x_{n-1})$, $x''_n \approx \frac{1}{T^2}(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)$ etc.; există toate motivele ca semnalul $x_i(t)$ să difere de semnalul inițial și apare ca utilă evaluarea erorii de eșantionare, fie sub forma erorii absolute

$$\| x - x_i \| \overset{\Delta}{=} \sup_t |x(t) - x_i(t)| \qquad \text{(norma sup, uniformă)}$$

fie sub forma erorii în medie pătratică

$$\| x - x_i \|_2 \overset{\Delta}{=} \int [x(t) - x_i(t)]^2 \, dt \text{ (norma din } L_2).$$

Schema generală de mai sus este deci cea din fig. 6.7.

În condițiile teoremei III. 6′, spectrele translatate ale semnalului inițial nu se acoperă și teoretic este posibilă recuperarea fără eroare a semnalului, izolînd printr-un filtru liniar spectrul centrat pe frecvența $\omega = 0$. De exemplu, în cazul eșantionării analogice, filtrul de interpolare este un filtru ideal avînd funcția de transfer $H(\omega) = [\sigma(\omega + f) - \sigma(\omega - f)]\ e^{-j\omega\tau}$; într-adevăr, din teorema VI.2 rezultă $F_{x_i}(\omega) = F_{\tilde{x}_{an}}(\omega)\, H(\omega) =$

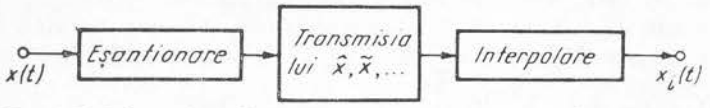


Fig. 6.7. Schema-bloc de transmisie a unui semnal x și de obținere a semnalului x_i prin interpolarea eșantioanelor.

$= \frac{\alpha}{T} F_x(\omega)\, e^{-j\omega\tau}$, deci $x_i(t) = \frac{\alpha}{T} x(t - \tau)$, adică semnalul de ieșire după interpolare apare cu întîrziere, direct proporțional cu semnalul inițial. Similar se tratează cazul eșantionării cu reținere; dacă se utilizează un filtru ca mai sus, atunci se obține un semnal $x_i(t)$ distinct de $x(t)$, deoarece $F_{\hat{x}}(\omega)\, H(\omega) = \frac{1}{T} F_x(\omega)\, e^{-j\omega\tau} F_p(\omega)$, iar înmulțirea cu $F_p(\omega)$ introduce o distorsionare, evitabilă prin utilizarea unui filtru corector suplimentar avînd în banda de frecvență ocupată de $F_x(\omega)$ o funcție de transfer proporțională cu $\frac{1}{F_p(\omega)}$. În acest caz, avem $x_i(t) = \frac{1}{T} x(t - \tau)$ și din nou recuperarea semnalului x se face fără eroare.

În situațiile reale, semnalele nu satisfac condițiile ideale din teorema de eșantionare, spectrele semnalelor de transmis au frecvența de eșantionare f la rîndul ei aleatoare și este imposibil de restituit, prin schema anterioară, semnalul fără eroare.

1.4. **Eșantionarea semnalelor aleatoare.** Cel mai adesea, semnalele reale au caracter aleator; în prelucrarea și în reprezentarea semnalelor aleatoare ideea principală constă în extinderea cazului deterministic. Cele mai simple și mai utilizate reprezentări pentru semnale aleatoare ξ_t, $t \in \mathbb{R}$, sînt cele de forma $\xi_t = \sum_{k=1}^{n} a_k(\omega)\, \varphi_k(t)$ (v. V.3.2, a)), cu φ_k funcții $\mathcal{T} \to \mathbb{R}$ și a_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, variabile aleatoare cu valori reale; exemple tipice sînt $\varphi_k(t) = \sin \alpha_k t$, $\varphi_k(t) = \exp(j\alpha_k t)$, $\varphi_k(t) = f(t - t_k)$ etc., utilizate în special în sistemele liniare, în legătură cu aplicarea principiului suprapunerii efectelor; astfel de reprezentări se extind la serii sau la reprezentări integrale și ele permit exprimarea caracteristicilor statistice ale lui ξ_t în funcție de cele ale termenilor.

Fie $\xi_t \in S_a$ un semnal aleator staționar; se poate atunci asocia un semnal aleator discret cu reținere, asociat unui pas de eșantionare fixat $T > 0$, avînd o reprezentare ca mai sus, anume

$$\hat{\xi}_t = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \xi_{kT}\, u(t - kT), \text{ unde } u(t) = \sigma(t) - \sigma(t - T);$$

dacă $Ma_k = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, rezultă $K_\eta(t, s) = M_\eta(t, s)$. Cazul cel mai important este cel în care $f(t) = \mathrm{Sa}\,\frac{\pi t}{T}$; în acest caz avem $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t - kT) = 1$ și $\sum_{p\in\mathbb{Z}} f(t - pT)\, f(s - pT - mT) = f(t - s + mT)$, așa cum se vede aplicînd transformarea Fourier și folosind formula Poisson din II.7.2. Dacă $Ma_k = a = \text{const}$, atunci rezultă în acest caz $M\eta_t = a$ și $M_\eta(t, s) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} M(a_p a_{p+m})\, f(t - s + mT)$, deci $K_\eta(t, s) = M_\eta(t, s) - a^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} M(a_p a_{p+m})\, f(t - s + mT) - a^2$ și η este acum un semnal staționar.

Teorema VI.4. *Fie* $\xi \in \mathrm{S}_a$ *un semnal staționar cu media nulă și cu bandă mărginită de frecvență* $\left[\text{în sensul că } f_\xi(\omega) = 0 \text{ pentru } |\omega| > \frac{1}{2T}\right]$. *Atunci*

$$\xi_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \xi_{kT}\ \mathrm{Sa}\left(\frac{\pi t}{T} - k\pi\right) \text{a.p.} \tag{6.5}$$

Demonstrație. Luăm $a_k = \xi_{kT}$, $k \in \mathbb{Z}$; în acest caz $M(a_p a_{p+m}) = K_\xi(kT)$ și notînd $\eta_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\, \mathrm{Sa}\left(\frac{\pi t}{T} - k\pi\right)$, atunci conform celor spuse anterior rezultă că η este staționar cu media nulă și, în plus,

$$K_\eta(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} K_\xi(mT)\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi t}{T} + mT\right).$$

Deci pentru densități spectrale, aplicînd transformarea Fourier, va rezulta că $f_\eta(\omega) = f_\xi(\omega)$. Atunci pentru norma din L_2, avem

$$\|\xi - \eta\|^2 = M(\xi - \eta)^2 = M(\xi^2) + M(\eta^2) - 2M(\xi\eta) =$$
$$= K_\xi(0) + K_\eta(0) - 2\sum_{k\in\mathbb{Z}} K_\xi(t - kT)\cdot \mathrm{Sa}\left(\frac{\pi t}{T} - k\pi\right);$$

ultima sumă se calculează folosind formula lui Poisson

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(t - kT) = \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}} F_f\left(\frac{2\pi n}{T}\right) \exp\,(2\pi\, \mathrm{j} nt/T)$$

în acest caz,

$$M\hat{\xi}_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} M\,\xi_{kT}\,u(t-kT) = (M\xi)\sum_{k\in\mathbb{Z}} u(t-kT) = M\xi$$

și dacă media lui este nulă, rezultă pentru funcția de covarianță,

$$K_{\hat{\xi}}(t,s) = M(\hat{\xi}_t\,\hat{\xi}_s) = \sum_{p\in\mathbb{Z}}\sum_{q\in\mathbb{Z}} M(\xi_{pT}\,\xi_{qT})\,u(t-pT)\,u(s-qT)$$

și punînd $q = p+m$,

$$K_{\hat{\xi}}(t,s) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} K_\xi(mT)\sum_{p\in\mathbb{Z}} u(t-pT)\,u(s-pT-mT) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} K_\xi(mT)\,U_m(t,s),$$

unde am notat $U_m(t,s) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} u(t-pT)\cdot u(s-pT-mT)$. Se observă că $U_m(t,s) = U(t+T,\ s+T)$ și că $U_m(t,s) = 0$ pentru $|t-s| > T$.

Așadar $K_{\hat{\xi}}(t,s) = K_{\hat{\xi}}(t+T, s+T)$, dar semnalul $\hat{\xi}$ nu este staționar în sensul definiției V.4.1 (căci T nu este arbitrar!), deși ξ a fost presupus staționar. Așadar, prin eșantionare cu reținere se poate pierde caracterul de staționaritate.

Mai general, să considerăm un semnal aleator de forma

$$\eta_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\,f(t-kT) \text{ cu toți } a_k \in \mathrm{L}_2(\Omega),\ T>0 \text{ fixat}$$

(impulsuri sincronizate modulate în amplitudine). Așadar, am înlocuit impulsul dreptunghiular u printr-unul oarecare f, iar amplitudinile impulsurilor corespund unui semnal discret $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, nu neapărat obținut prin eșantionarea ideală a unui semnal continual. În acest caz, pot fi refăcute calculele anterioare și se obține

$$M\eta_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (Ma_k)\cdot f(t-kT) \text{ și } M_\eta(t,s) \overset{\Delta}{=} M(\eta_t\cdot\eta_s) =$$

$$= \sum_{m\in\mathbb{Z}} M(a_p a_{p+m})\sum_{p\in\mathbb{Z}} f(t-pT)\,f(s-pT-mT);$$

și ținînd seama de mărginirea în bandă a lui $K_x(\omega)$, anume notînd $f(t) = \mathrm{Sa}\,\frac{\pi t}{T}$, avem

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} K_\xi(t - kT)\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi t}{T} - k\pi\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} K_\xi(t - kT)\,f(t - kT) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k\in\mathbb{Z}}\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(\omega)\cdot F_f\left(\frac{k}{T} - \omega\right)\mathrm{d}\omega\cdot\exp\left(2\pi\mathrm{j}kt/T\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(\omega)\,F_f(-\omega)\,\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(\omega)\,\mathrm{d}\omega = K_\xi(0).$$

Atunci

$$\|\xi - \eta\|^2 = K_\xi(0) + K_\eta(0) - 2K_\xi(0) = K_\eta(0) - K_\xi(0)$$

și cum $f_\eta(\omega) = f_\xi(\omega)$, se obține $K_\xi(0) = K_\eta(0)$; astfel $\|\xi - \eta\|^2 = 0$, deci $\xi = \eta$ a.p., de unde rezultă teorema.

Reformulăm acum teorema anterioară, cu notații schimbate

Corolar. *Dacă $\xi \in \mathrm{S}_a$ este un semnal aleator staționar cu densitatea spectrală nulă în afara unui interval $(-f, f)$,* atunci

$$\xi_t(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \xi_{\frac{n}{2f}}(\omega)\,\mathrm{Sa}(\pi(2ft - n)). \tag{6.6}$$

Ca exemplu, presupunem că ξ_t este un zgomot alb de bandă (conform cu V.6.3), cu densitatea spectrală nulă în afara unui interval $(-\lambda_0, \lambda_0)$; în acest caz funcția de covarianță este $K_\xi(t) = \frac{2c}{t}\sin\lambda_0 t = 2c\lambda_0\,\mathrm{Sa}(\lambda_0 t)$. Luînd pasul de eșantionare $T = \frac{1}{2\lambda_0}$, rezultă că $K_\xi(t) = \frac{c}{T}\mathrm{Sa}\frac{t}{2T}$ și orice eșantioane luate la intervale de timp de lungime $2\pi T$ sînt necorelate [căci dacă $s - t = 2\pi T$, atunci $K_\xi(t-s) = \frac{c}{T}\,\mathrm{Sa}\left(\frac{t-s}{2T}\right) = \frac{c}{T}\,\mathrm{Sa}(\pi) = 0$, deci $\mathrm{cov}(\xi_t, \xi_s) = 0$]. Reamintim că în cazul cînd ξ_t este gaussian, necorelarea revine la indepen-

dență ; numărul λ_0 este frecvența de eșantionare și în același timp, este cel mai mic număr pozitiv astfel că orice eșantioane luate la distanța $\frac{\pi}{\lambda_0}$ sînt independente.

§ 2. Cuantizarea semnalelor

Un alt procedeu de prelucrare prin discretizare a semnalelor îl constituie *cuantizarea*, sau așezarea pe nivele de valori fixate. De această dată discretizarea nu se realizează în domeniul timp ca în cazul eșantionării, ci pe axa ordonatelor, în domeniul de valori ale semnalului.

Fie $q > 0$ un număr real fixat (numit *cuantă* sau *pas de cuantizare*).

2.1. **Definiție.** Pentru orice semnal continual (cu valori reale) $x : \mathcal{T} \to \mathbb{R}$ se numește *q-cuantizatul lui* x semnalul $y = {}^q x$ definit în modul următor : se consideră mulțimile

$$I_k = \left\{ t \in \mathcal{T} \mid \left(k - \frac{1}{2} \right) q \leqslant x(t) < \left(k + \frac{1}{2} \right) q \right\}, \quad (\forall)\, k \in \mathbb{Z},$$

și se notează $y = \sum_{k \in \mathbb{Z}} y_k$, unde

$$y_k(t) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } t \notin I_k, \\ kq, \text{ dacă } t \in I_k. \end{cases}$$

Evident, mulțimile I_k sînt disjuncte două cîte două și reuniunea lor este $\mathcal{T}$, deci ele constituie o partiție a mulțimii timp $\mathcal{T}$. În cele ce urmează, vom presupune că $\mathcal{T} = \mathbb{R}$.

Prin însăși definiția dată, semnalul ${}^q x$ are un număr finit sau numărabil de valori reale, multipli întregi ai cuantei q.

2.2. **Exemple.** a) Fie $x(t) = t$, $q = 1$. În acest caz,

$$I_k = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid k - \frac{1}{2} \leqslant t < k + \frac{1}{2} \right\} = \left[k - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right), \; k \in \mathbb{Z},$$

și pe fiecare interval I_k cuantizatul lui x este o constantă egală cu k. Graficele lui x și ${}^2 x$ sînt indicate în fig. 6.8, a, b.

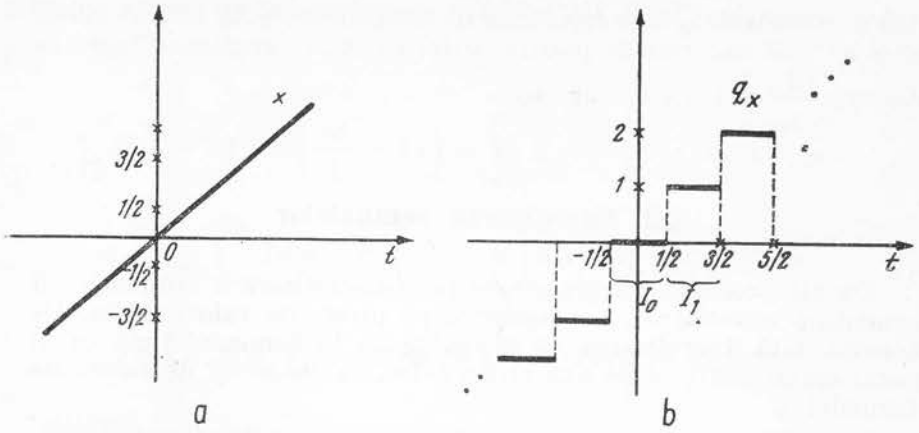


Fig. 6.8. Reprezentarea graficelor semnalelor $x(t) = t$, ${}^q x(t)$ pentru pasul de cuantizare $q = 1$.

b) Pentru semnalul sinusoidal $x(t) = \sin t$, luînd $q = 1$, avem

$$I_k = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid k - \frac{1}{2} \leqslant \sin t < k + \frac{1}{2} \right\}, \text{ deci } I_{-1} = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \sin t < -\frac{1}{2} \right\},$$

$$I_0 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant \sin t < \frac{1}{2} \right\}, \quad I_1 = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \sin t \geqslant \frac{1}{2} \right\}$$

și restul mulțimilor I_k sînt vide. Cuantizatul lui x este semnalul constant pe fiecare I_k, cu valoarea k; graficul lui este indicat îngroșat în fig. 6.9.

2.3. **Observații.** 1) Diferența $\varepsilon_q = {}^q x - x$ este numită *zgomot de cuantizare*; el este un semnal deterministic și evident, ${}^q x = x + \varepsilon_q$, $|\varepsilon_q(t)| \leqslant q$ pentru orice t. Dacă funcția reală x este mărginită și alegem $N \geqslant 1$ întreg astfel încît $-Nq \leqslant x(t) \leqslant Nq$, pentru orice t, atunci funcția ${}^q x$ are cel mult $2N + 1$ valori. În exemplul 2.2, b) am luat $N = 1$ și cuantizatul respectiv avea trei valori.

2) Funcțiile Walsh studiate în cap. III sînt strîns legate de procedeul de cuantizare pe două nivele; reamintim că pentru funcțiile Walsh are loc o teoremă de eșantionare, enunțată în III 9.5, 3, probată în [8].

3) Dacă x este un semnal aleator, atunci caracteristicile statistice ale lui x și ${}^q x$ pot să difere mult; teorema care urmează stabilește o legătură între caracteristicile statistice ale semnalelor x și ${}^q x$.

2.4. **Cuantizarea semnalelor aleatoare.** Fie $\xi \in S_a$ un semnal aleator; pentru fiecare moment $t \in \mathcal{T}$ se poate considera o variabilă aleatoare ξ_t din $L_2(\Omega)$ și în același timp, o variabilă aleatoare discretă ${}^q\xi_t$, avînd ca valori posibile $0, \pm q, \pm 2q, \ldots$; se poate atunci defini un semnal aleator ${}^q\xi$, numit *q-cuantizatul lui* ξ. Fixăm în

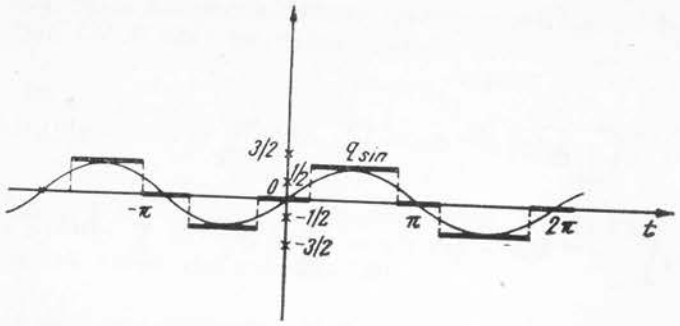


Fig. 6.9. Reprezentarea cuantizatului semnalului sinusoidal $t \to \sin t$, pentru $q = 1$.

cele ce urmează un moment t_0 și fie $p(x)$ densitatea de probabilitate a v.a. ξ_{t_0}, $F(x)$ funcția de repartiție corespunzătoare și $\eta = {}^q\xi_{t_0}$. Pentru orice $k \in \mathbb{Z}$ notăm $c_k = P\{\eta = qk\}$. Așadar densitatea de probabilitate p_η a v.a. η va fi, conform cu V.1.1,

$$p_\eta(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \, \delta(x - qk). \tag{6.7}$$

Avem

$$c_k = P\{\eta = qk\} = P\left\{\left(k - \frac{1}{2}\right) q \leqslant \xi < \left(k + \frac{1}{2}\right) q\right\} =$$

$$= F(x)\Bigg|_{\left(k-\frac{1}{2}\right) q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right) q} = \int_{\left(k-\frac{1}{2}\right) q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right) q} p(x)\,\mathrm{d}x.$$

Așadar, notînd $u(x) = \sigma\left(x + \frac{q}{2}\right) - \sigma\left(x - \frac{q}{2}\right)$, rezultă

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(kq - x)\, u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{q}{2}}^{\frac{q}{2}} p(kq - x)\,\mathrm{d}x = \int_{\left(k-\frac{1}{2}\right) q}^{\left(k+\frac{1}{2}\right) q} p(y)\,\mathrm{d}y = c_k,$$

deci

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} p(kq - x)\, u(x)\,\mathrm{d}x = (p * u)\,(kq). \tag{6.8}$$

Notînd cu φ_ξ (respectiv φ_η) funcțiile caracteristice ale lui $\xi = \xi_{t_0}$, $\eta = {}^q\xi_{t_0}$, atunci, conform definiției date în V.1.1 și folosind (6.7), (6.8), rezultă relația

$$\varphi_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(x)\, e^{j\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, \delta(x - qk)\right) dx =$$

$$= \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega x}\, \delta(x - qk)\, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\, e^{j\omega qk} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{j\omega qk}\, (p * u)\, (kq).$$

Ținînd seama că $2\pi p(x - kq)$ este transformata Fourier a lui $e^{-j\omega qk}\varphi_\xi(\omega)$ și $u(\omega)$ este transformata Fourier a lui $\frac{q}{2\pi}\,\mathrm{Sa}\frac{qx}{2}$, rezultă

$$\varphi_\eta(\omega) = \frac{q}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{j\omega qk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jkqz}\, \varphi_\xi(z)\, \mathrm{Sa}\left(\frac{qz}{2}\right) dz =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{jkq(\omega - z)}\, \varphi_\xi(z)\, \mathrm{Sa}\left(\frac{qz}{2}\right) dz$$

și cum $\frac{q}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{jkq\omega} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \delta\left(\omega - k \cdot \frac{2\pi}{q}\right)$, rezultă în final

$$\varphi_\eta(\omega) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi_\xi\left(\omega - k^2 \frac{\pi}{q}\right) \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega q}{2} - k\pi\right). \tag{6.9}$$

Se poate atunci enunța

Teorema VI.5 [9]. *Fie* $\xi \in \mathrm{S}_a$ *un semnal aleator astfel încît funcția caracteristică* $\varphi_\xi(\omega)$ *a unei realizări a semnalului să fie nulă pentru* $|\omega| \geqslant \frac{2\pi}{q} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ *fiind fixat. Notînd cu* η *q-cuantizatul realizării* ξ, *funcția caracteristică a lui* η *va fi*

$$\varphi_\eta(\omega) = \varphi_\xi(\omega)\, \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega q}{2}\right) \textit{pentru } |\omega| < \varepsilon. \tag{6.10}$$

Demonstrație. Deoarece pentru orice $|\omega| < \varepsilon$ și pentru orice $k \neq 0$ avem

$$\left| \omega - k \frac{2\pi}{q} \right| = \left| k \frac{2\pi}{q} - \omega \right| \geqslant \frac{2\pi}{q} |k| - |\omega| \geqslant \frac{2\pi}{q} - |\omega| \geqslant \frac{2\pi}{q} - \varepsilon,$$

rezultă că $\varphi_\xi \left(\omega - k \frac{2\pi}{q} \right) = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, și relația (6.10) rezultă direct din relația (6.9).

Corolarul 1. *În ipotezele anterioare asupra lui* ξ, *semnalul* ξ *este bine determinat statistic în funcție de* ${}^q\xi$.

Demonstrație. Din relația (6.10) rezultă determinată univoc funcția caracteristică a lui ξ în termeni de φ_η, $\eta = {}^q\xi$.

Corolarul 2. *În ipotezele teoremei anterioare, între caracteristicile realizărilor lui* ξ *și* $\eta = {}^q\xi$ *au loc relațiile*

$$M\eta = M\xi \text{ și } D\eta = D\xi + \frac{q^2}{12}.$$

Demonstrație. Folosind dezvoltările în serie ale funcțiilor exp, Sa, se obține

$$\varphi_\eta(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(x)\, e^{j\omega x}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_\eta(x) \left(1 + \frac{j\omega}{1!} x - \frac{\omega^2}{2!} x^2 + \ldots \right) dx =$$

$$= 1 + j\omega\, M\eta - \frac{\omega^2}{2} M\eta^2 + \ldots,$$

$$\varphi_\xi(\omega) = 1 + j\omega M\xi - \frac{\omega^2}{2} M\xi^2 + \ldots$$

și

$$\mathrm{Sa}\frac{\omega q}{2} = 1 - \frac{\omega^2 q^2}{12} + \ldots$$

și din relația (6.10), se obține direct că $M\eta = M\xi$, $M\eta^2 = M\xi^2 + \frac{q^2}{12}$, de unde rezultă corolarul.

Teorema VI.6. *Fie* ξ *o realizare a unui semnal aleator* $\xi \in S_a$ *şi* η *q-cuantizata lui* ξ *iar* $\varepsilon_q = \eta - \xi$ *zgomotul de cuantizare corespunzător. Dacă* $\varphi_\xi(\omega) = 0$ *pentru* $|\omega| \geqslant \frac{2\pi}{q}$, *atunci*

$$\varphi_{\varepsilon_q}(\omega) = \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega q}{2}\right) \tag{6.11}$$

şi ε_q *este uniform repartizat în intervalul* $\left[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right)$.

Demonstraţie. Densitatea de probabilitate a lui ε_q este

$$p_{\varepsilon_q}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_\xi(x - kq)\, u(x),$$

unde $u(x) = \sigma\left(x + \frac{q}{2}\right) - \sigma\left(x - \frac{q}{2}\right)$. Dar $2\pi p_\xi(x - kq)$ este transformata Fourier a lui $e^{jk\omega q}\ \varphi_\xi(\omega)$, iar $2\pi u(x)$ este transformata Fourier a lui $q\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega q}{2}\right)$. Atunci

$$\varphi_{\varepsilon_q}(\omega) = \frac{q}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-jkqz}\ \varphi_\xi(z)\, \mathrm{Sa}(\omega - z)\, \frac{q}{2}\, dz =$$

$$= \frac{q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{-jkqz}\ \varphi_\xi(z)\, \mathrm{Sa}(\omega - z)\, \frac{q}{2}\, dz$$

şi folosind relaţia

$$\frac{q}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} e^{jk\omega q} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \delta\left(\omega - k\,\frac{2\pi}{q}\right),$$

rezultă în final

$$\varphi_{\varepsilon_q}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi_\xi\left(k\,\frac{2\pi}{q}\right)\ \mathrm{Sa}\left(\frac{\omega q}{2} - k\pi\right). \tag{6.12}$$

Dacă $|\omega| \geqslant \frac{2\pi}{q}$, rezultă că $\left|k\frac{2\pi}{q}\right| \geqslant \frac{2\pi}{q}$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$, deci $\varphi_\xi\left(k\frac{2\pi}{q}\right) = 0$ pentru toți acești k. Atunci formula (6.11) rezultă direct din (6.12).

Din relația (6.11) prin transformare Fourier, rezultă direct că densitatea de probabilitate a zgomotului de cuantizare ε_q este egală cu

$$p_{\varepsilon_q}(x) = \frac{1}{q}u(x) = \frac{1}{q}\left[\sigma\left(x + \frac{q}{2}\right) - \sigma\left(x - \frac{q}{2}\right)\right],$$

deci ε_q este [conform cu V.1.2, a)] o variabilă aleatoare repartizată uniform pe intervalul $\left[-\frac{q}{2}, \frac{q}{2}\right)$.

În particular, media și dispersia lui ε_q sînt

$$M\varepsilon_q = 0, \quad D\varepsilon_q = \frac{1}{12}q^2.$$

Rezultatele anterioare pot fi extinse la cazul vectorilor aleatori; de asemenea, se pot stabili legături între funcțiile de covarianță ale lui ξ și ${}^q\xi$.

2.5. **Eșantionare, cuantizare, conversie analog-digitală.** Studiul teoretic al transmisiilor digitale prin utilizarea modulației prin impulsuri a cunoscut o dezvoltare deosebită în urma progresului realizat în domeniul circuitelor logice. Considerăm o sursă continuă de informație care generează un semnal aleator ξ_t care satisface ipotezele teoremei VI.4; întreaga informație este concentrată, conform acestei teoreme, într-un șir de impulsuri modulate în amplitudine, $\{\xi_{kT}\}$. Presupunem că acest semnal discret este cuantizat pe r nivele de amplitudine, obținîndu-se un semnal discret notat ${}^q\xi$ ($q > 0$ fiind ales convenabil). Eșantioanele acestui ultim semnal pot fi convertite injectiv în cuvinte binare de lungime n dacă $r < 2^n$ și șirul de cuvinte astfel determinat poate fi numit *mesajul* m_t și este semnalul (aleator discret) transmis în locul semnalului aleator inițial ξ; o astfel de reprezentare este numită *modulare prin impulsuri codificate*. Desigur, este necesar de adăugat semnale (cuvinte) de sincronizare, care permit indicarea momentelor de separare a cuvintelor. Schema anterioară poate fi reprezentată astfel [5, 15]:

$\xi_t \to$ EŞANTIONARE $\to$ CUANTIZARE $\to$ CONVERSIE $\to m_t$. Operaţiile de cuantizare şi conversie în cuvinte binare a eşantioanelor analogice sînt reunite sub denumirea de *codificare*; evident, prin această schemă poate avea loc o pierdere irecuperabilă de informaţie şi problema este de a face minimă eroarea aproximării $\xi_t \approx m_t$ (într-un sens care trebuie precizat). Pentru a da un exemplu, presupunem că gama de amplitudine a semnalului $\{\xi_{kT}\}$ este intervalul $[-\alpha, \alpha]$; se poate alege $q = \frac{2\alpha}{r}$; presupunînd că $r = 6$, se alege $n = 3$ (deoarece $6 < 2^3$) şi cele şase nivele notate $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ pot fi reprezentate prin şase din următoarele opt numere binare de lungime 3 : 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Este indicat ca numărul de nivele să fie exact o putere a lui 2, pentru a simplifica conversia.

§ 3. Algoritmul de transformare Fourier rapidă (TFR)

3.1. **Generalităţi.** În utilizarea computerelor digitale în probleme de analiză Fourier continuă a semnalelor s-a dovedit esenţială prelucrarea unui set discret de eşantioane ale acestora peste un interval mărginit de timp.

Am văzut în 1.2 că dacă $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ este un semnal rapid descrescător la 0 spre ∞, practic nul în afara unui interval $(0, A)$ şi cu spectrul nul în afara unei benzi $(-f, f)$, atunci notînd $T = \frac{1}{2f}$ şi alegînd A astfel încît $N = \frac{A}{T}$ să fie un întreg, x poate fi reprezentat prin eşantioanele sale $x_m = x(mT)$, $0 \leqslant m \leqslant N-1$. Prin formula (3.13) am definit transformarea Fourier discretă (TFD) a unui semnal $x = \{x_m\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$ ca fiind semnalul discret $\{f_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$, unde $f_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{km}$, $W = \exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{j}}{N}\right)$.

Dacă se consideră distribuţia $\hat{x} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \, \delta(t - mT)$, atunci

$$F[\hat{x}](\omega) = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}mT\omega},$$

deci

$$F[\hat{x}]\left(\frac{2\pi k}{A}\right) = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \, \mathrm{e}^{-\mathrm{j}mT \frac{2\pi k}{NT}} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{km},$$

cu alte cuvinte f_k este tocmai valoarea spectrului Fourier (în sens uzual, nu TFD) al lui $\hat{x}$ pe frecvenţa $\frac{2\pi k}{NT}$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$. Aceste valori acoperă intervalul de frecvenţă $\left[0, \frac{2\pi}{T}\right]$, adică tocmai intervalul util ţinînd seama de periodicitatea de perioadă $\frac{2\pi}{T}$ a funcţiei $F[\hat{x}]$.

Aceste consideraţii pot fi o dovadă, pe lîngă alte argumente care au fost sau vor fi indicate, privind utilitatea calculului TFD al semnalelor discrete. Dacă se aplică direct definiţia II.1, adică formula (3.13), atunci numărul de operaţii aritmetice pentru calculul TFD al lui x este egal cu N^2. În cele ce urmează, vom descrie algoritmul TFR pentru calculul TFD, folosind [1, 3]. Numărul de operaţii va fi redus la aproximativ $N \cdot [\log_2 N] \ll N^2$. În treacăt fie zis, aplicarea acestui algoritm în cazul $N = 8192 = 2^{13}$ a dovedit că timpul de calcul explicit al eşantioanelor lui F_x a fost de 5 s, în timp ce aplicarea definiţiei a necesitat peste 30 min.

3.2. **Prezentarea algoritmului TFR** [2]. Fixăm $x = \{x_m\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$ un semnal discret, sau un şir de date, obţinut de regulă prin eşantionarea unui semnal cu bandă mărginită de frecvenţă. Ne propunem să descriem un algoritm „rapid" de calcul al expresiilor $f_k = \sum_{m=0}^{N-1} x_m W^{km}$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, unde $W = \exp\left(-\frac{2\pi \mathrm{j}}{N}\right)$. Vom face ipoteza că $N = 2^n$, cu n convenabil ales (de fapt dacă A este durata în timp a semnalului şi dacă B este lăţimea benzii de frecvenţă, atunci se alege A astfel încît produsul AB să fie de forma 2^n).

Ipoteza $N = 2^n$ nu este restrictivă (căci eventual se completează cu eşantioane nule); astfel orice număr întreg din intervalul $[0, N-1]$ poate fi scris sub formă binară (în baza 2), folosind exact n cifre binare. Pentru o prezentare mai clară a algoritmului TFR vom considera numai cazul particular $N = 8$, deci $n = 3$, dar extinderea la cazul general va fi evidentă.

Aşadar, $f_k = \sum_{m=0}^{7} x_m W^{km}$, $0 \leqslant k \leqslant 7$, unde $W = \exp\left(-\mathrm{j}\,\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}$.

Exprimăm m, k sub formă binară, cu cîte trei cifre :

$$m = m_2 \cdot 2^2 + m_1 \cdot 2 + m_0 = (m_2\, m_1\, m_0)$$

și

$$k = k_2 \cdot 2^2 + k_1 \cdot 2 + k_0 = (k_2\, k_1\, k_0)$$

cu toate m_i, k_j egale cu 0 sau 1. Eșantioanele semnalului x se reprezintă sub forma

$$x_m = X(m_2, m_1, m_0), \tag{6.13}$$

deci

$$f_k = \sum_{m_0} \sum_{m_1} \sum_{m_2} X(m_2, m_1, m_0) \cdot W^{k(4m_2+2m_1+m_0)}. \tag{6.14}$$

Calculăm suma interioară

$$\sum_{m_2} X(m_2, m_1, m_0) \cdot W^{4km_2} = \sum_{m_2} X(m_2, m_1, m_0) \cdot (-1)^{km_2} =$$

$$= \sum_{m_2} X(m_2, m_1, m_0) \cdot (-1)^{k_0 m_2} \overset{\text{not}}{=} X_1(k_0, m_1, m_0),$$

„not" fiind prescurtarea cuvîntului notație. Calculăm apoi suma

$$X_1(k_0, m_1, m_0) \cdot W^{2km_1} = \sum_{m_1} X_1(k_0, m_1, m_0) \cdot (-\mathrm{j})^{km_1} =$$

$$= \sum_{m_1} X_1(k_0, m_1, m_0) \cdot (-\mathrm{j})^{(4k_2+2k_1+k_0)m_1} = \sum_{m_1} X_1(k_0, m_1, m_0)(-\mathrm{j})^{(2k_1+k_0)} \overset{\text{not}}{=}$$

$$\overset{\text{not}}{=} X_2(k_0, k_1, m_0).$$

În fine, înlocuind aceasta în (6.14), se obține

$$f_k = \sum_{m_0} X_2(k_0, k_1, m_0) \cdot W^{km_0} = \sum_{m_0} X_2(k_0, k_1, m_0) \cdot \left(\frac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}}\right)^{(4k_2+2k_1+k_0)m_0} \overset{\text{not}}{=}$$

$$\overset{\text{not}}{=} X_3(k_0, k_1, k_2). \tag{6.15}$$

Vom nota $\xi_{2^r} = \exp\left(-\frac{2\pi j}{2^r}\right)$ pentru $r = 1, 2, \ldots, n$. Cum $\xi_2 = -1$, rezultă

$$X_1(k_0, m_1, m_0) = \sum_{m_2} X(m_2, m_1, m_0) \cdot \xi_2^{k_0 m_2} =$$

$$= X(0, m_1, m_0) + X(1, m_1, m_0)\, \xi_2^{k_0}, \tag{6.16}$$

deoarece m_2 este cifră binară. Ținem seama că și k_0 este cifră binară, deci $k_0 = 0$ sau 1.

În cazul $k_0 = 0$, rezultă, conform cu (6.16), relația

$$X_1(0, m_1, m_0) = X(0, m_1, m_0) + X(1, m_1, m_0) \tag{6.17}$$

și se pot distinge patru subcazuri :

$$\mathrm{I}_1 \begin{cases} m_1 = 0,\ m_0 = 0 \Rightarrow X_1(0,0,0) \overset{6.17}{=} X(0,0,0) + X(1,0,0) \overset{6.13}{=} x_0 + x_4 \overset{\text{not}}{=} x_1(0), \\ m_1 = 0,\ m_0 = 1 \Rightarrow X_1(0,0,1) = X(0,0,1) + X(1,0,1) = x_1 + x_5 \overset{\text{not}}{=} x_1(1), \\ m_1 = 1,\ m_0 = 0 \Rightarrow X_1(0,1,0) = X(0,1,0) + X(1,1,0) = x_2 + x_6 \overset{\text{not}}{=} x_1(2), \\ m_1 = 1,\ m_0 = 1 \Rightarrow X_1(0,1,1) = X(0,1,1) + X(1,1,1) = x_3 + x_7 \overset{\text{not}}{=} x_1(3). \end{cases}$$

În cazul $k_0 = 1$, rezultă conform cu (6.16),

$$X_1(1, m_1, m_0) = X(0, m_1, m_0) + X(1, m_1, m_0) \cdot \xi_2 =$$

$$= X(0, m_1, m_0) - X(1, m_1, m_0) \tag{6.18}$$

și se disting din nou patru subcazuri :

$$\mathrm{I}_2 \begin{cases} m_1 = 0,\ m_0 = 0 \Rightarrow X_1(1,0,0) \overset{6.18}{=} X(0,0,0) - X(1,0,0) \overset{6.13}{=} x_0 - x_4 \overset{\text{not}}{=} x_1(4), \\ m_1 = 0,\ m_0 = 1 \Rightarrow X_1(1,0,1) = X(0,0,1) - X(1,0,1) = x_1 - x_5 \overset{\text{not}}{=} x_1(5), \\ m_1 = 1,\ m_0 = 0 \Rightarrow X_1(1,1,0) = X(0,1,0) - X(1,1,0) = x_2 - x_6 \overset{\text{not}}{=} x_1(6), \\ m_1 = 1,\ m_0 = 1 \Rightarrow X_1(1,1,1) = X(0,1,1) - X(1,1,1) = x_3 - x_7 \overset{\text{not}}{=} x_1(7). \end{cases}$$

În acest mod, am realizat prima iterație a algoritmului TFR. Calculăm acum

$$X_2(k_0, k_1, m_0) = \sum_{m_1} X_1(k_0, m_1, m_0) \cdot (-\mathrm{j})^{(2k_1+k_0)m_1} =$$

$$= \sum_{m_1} X_1(k_0, m_1, m_0) \cdot \xi_4^{(2k_1+k_0)m_1} = X_1(k_0, 0, m_0) + X_1(k_0, 1, m_0) \cdot \xi_4^{2k_1+k_0}$$

și apar patru cazuri, fiecare cu cîte două subcazuri :

$$\Pi_1 \begin{cases} k_1 = 0, k_0 = 0 \Rightarrow X_2(0, 0, m_0) = X_1(0, 0, m_0) + X_1(0, 1, m_0), \\ \text{deci cum } m_0 = 0 \text{ sau 1 apar subcazurile :} \\ X_2(0, 0, 0) = X_1(0, 0, 0) + X_1(0, 1, 0) \overset{\mathrm{I}_1}{=} x_1(0) + x_1(2) \overset{\text{not}}{=} x_2(0), \\ X_2(0, 0, 1) = X_1(0, 0, 1) + X_1(0, 1, 1) = x_1(1) + x_1(3) \overset{\text{not}}{=} x_2(1), \end{cases}$$

$$\Pi_2 \begin{cases} k_1 = 0, k_0 = 1 \Rightarrow X_2(1, 0, m_0) = X_1(1, 0, m_0) + X_1(1, 1, m_0) \cdot \xi_4, \text{ deci} \\ X_2(1, 0, 0) = X_1(1, 0, 0) + X_1(1, 1, 0) \cdot \xi_4 \overset{\mathrm{I}_2}{=} x_1(4) + x_1(6) \cdot \xi_4 \overset{\text{not}}{=} x_2(4), \\ X_2(1, 0, 1) = X_1(1, 0, 1) + X_1(1, 1, 1) \cdot \xi_4 = x_1(5) + x_1(7) \cdot \xi_4 \overset{\text{not}}{=} x_2(5), \end{cases}$$

$$\Pi_3 \begin{cases} k_1 = 1, \ k_0 = 0 \Rightarrow X_2(0, 1, m_0) = X_1(0, 0, m_0) + X_1(0, 1, m_0) \cdot \xi_4^2 \\ \text{și cum } \xi_4^2 = -1 \text{ apar subcazurile :} \\ X_2(0, 1, 0) = X_1(0, 0, 0) + X_1(0, 1, 0) \cdot \xi_4^2 \overset{\mathrm{I}_1}{=} x_1(0) - x_1(2) \overset{\text{not}}{=} x_2(2) \\ X_2(0, 1, 1) = X_1(0, 0, 1) + X_1(0, 1, 1,) \cdot \xi_4^2 = x_1(1) - x_1(3) \overset{\text{not}}{=} x_2(3), \end{cases}$$

$$\Pi_4 \begin{cases} k_1 = 1, k_0 = 1 \Rightarrow X_2(1, 1, m_0) = X_1(1, 0, m_0) + X_1(1, 1, m_0) \cdot \xi_4^3 \\ \text{și cum } \xi_4^3 = -\xi_4 \text{ apar subcazurile :} \\ X_2(1, 1, 0) = X_1(1, 0, 0) + X_1(1, 1, 0) \cdot \xi_4^3 = x_1(4) - x_1(6) \cdot \xi_4 \overset{\text{not}}{=} x_2(6) \\ X_2(1, 1, 1) = X_1(1, 0, 1) + X_1(1, 1, 1) \cdot \xi_4^3 = x_1(5) - x_1(7) \cdot \xi_4 \overset{\text{not}}{=} x_2(7). \end{cases}$$

Astfel am realizat și cea de-a doua iterație a algoritmului. În sfîrșit, din relația (6.15) rezultă

$$X_3(k_0, k_1, k_2) = X_2(k_0, k_1, 0) + X_2(k_0, k_1, 1) \cdot \xi_8^{4k_2+2k_1+k_0},$$

deoarece $\frac{1-\mathrm{j}}{\sqrt{2}} = \xi_8$. Deoarece k_0, k_1, k_2 pot lua valorile 0 sau 1, apar în total opt posibilități :

$$k_2 = 0, \ k_1 = 0, \ k_0 = 0 \Rightarrow X_3(0, 0, 0) = X_2(0, 0, 0) + X_2(0, 0, 1) \overset{\mathrm{II}_1}{=}$$
$$= x_2(0) + x_2(1) \overset{\text{not}}{=} x_3(0),$$

$$k_2 = 0, \ k_1 = 0, \ k_0 = 1 \Rightarrow X_3(1, 0, 0) = X_2(1, 0, 0) + X_2(1, 0, 1) \cdot \xi_8 \overset{\mathrm{II}_2}{=}$$
$$= x_2(4) + x_2(5) \cdot \xi_8 \overset{\text{not}}{=} x_3(4),$$

$$k_2 = 0, \ k_1 = 1, \ k_0 = 0 \Rightarrow X_3(0, 1, 0) = X_2(0, 1, 0) + X_2(0, 1, 1) \cdot \xi_8^2 \overset{\mathrm{II}_3}{=}$$
$$= x_2(2) + x_2(3) \cdot \xi_8^2 \overset{\text{not}}{=} x_3(2),$$

$$k_2 = 0, \ k_1 = 1, \ k_0 = 1 \Rightarrow X_3(1, 1, 0) = X_2(1, 1, 0) + X_2(1, 1, 1) \cdot \xi_8^3 \overset{\mathrm{II}_4}{=}$$
$$= x_2(6) + x_2(7) \cdot \xi_8^3 \overset{\text{not}}{=} x_3(6),$$

$$k_2 = 1, \ k_1 = 0, \ k_0 = 0 \Rightarrow X_3(0, 0, 1) = X_2(0, 0, 0) + X_2(0, 0, 1) \cdot \xi_8^4 \overset{\mathrm{II}_1}{=}$$
$$= x_2(0) - x_2(1) \overset{\text{not}}{=} x_3(1)$$

și în mod similar, se obțin

$$x_3(2) = x_2(2) - \xi_8^2 x_2(3), \ x_3(5) = x_2(4) - \xi_8 x_2(5), \ x_3(7) = x_2(6) - \xi_8^3 x_2(7).$$

Din relația (6.15) se obțin coeficienții

$$f_k = X_3(k_0, k_1, k_2) \text{ pentru } k = (k_2 \, k_1 \, k_0). \tag{6.19}$$

În cazul cînd datele inițiale x_m sînt reale este suficient să fie calculate f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 [deoarece $f_5 = \bar{f}_3, f_6 = \bar{f}_2, f_7 = \bar{f}_1$, conform teoremei III.2, (c)] ; în cazul complex trebuie calculate explicit toate cele opt eșantioane f_k.

Din relația (6.19) rezultă că

$$f_0 = x_3(0), \ f_1 = x_3(4), \ f_2 = x_3(2), \ f_3 = x_3(6), \ f_4 = x_3(1) \tag{6.20}$$

și că indicele $k = (k_2 k_1 k_0)$ din relația (6.19) apare scris răsturnat în membrul al doilea. Am realizat astfel ultima iterație a algoritmului. Calculele anterioare pot fi sintetizate ca în fig. 6.10.

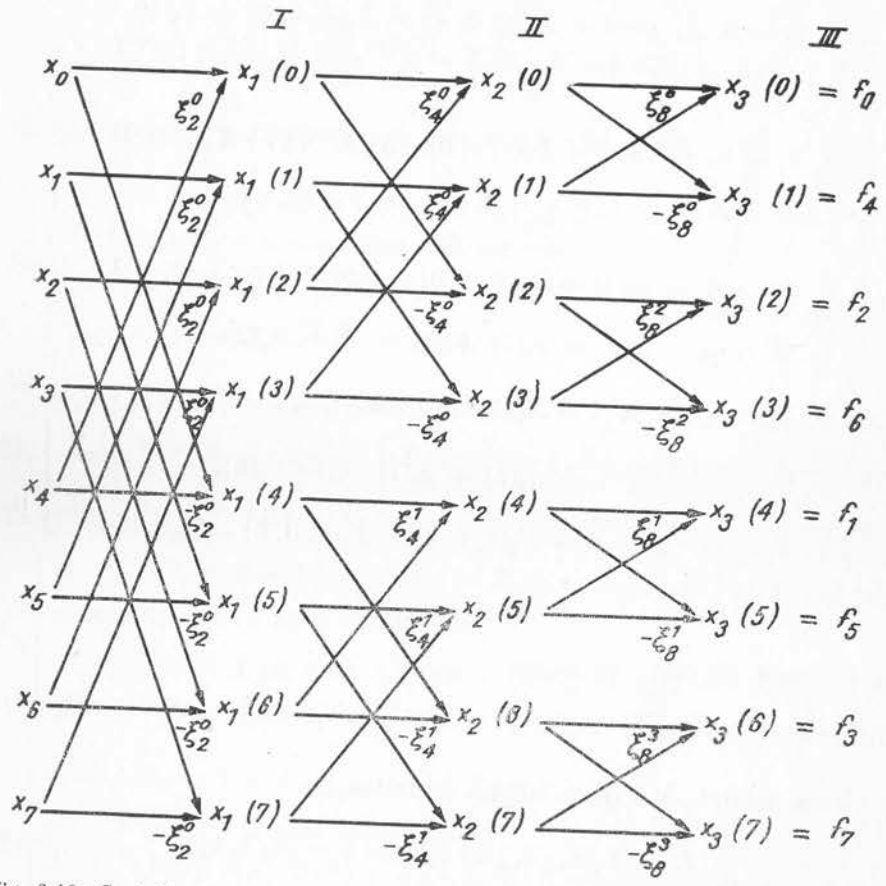


Fig. 6.10. Graf de fluență corespunzînd algoritmului transformării Fourier rapide în cazul $N = 8$.

Am adoptat convenția de reprezentare din cazul grafurilor de semnal; astfel, săgețile care intră în $x_1(0)$ au semnificația că $x_1(0)$ este suma lui x_0 cu x_4; numerele așezate pe săgeți semnifică multiplicatori, de exemplu $x_1(6) = x_2 + x_6\xi_2 = x_2 - x_6$. Formulele obținute în I_1, I_2 în număr de opt sînt sintetizate în săgețile din stînga

tabloului. Aceeași convenție este folosită pentru reprezentarea formulelor II_1, II_2, II_3, II_4 de la iterarea secundă, ca și în trecerea de la iterația II la iterația III etc.

3.3. **Cîteva observații generale.** Considerăm acum cazul general $N = 2^n$.

(a) Numărul total de iterații este n.

(b) În iterația r, $1 \leqslant r \leqslant n$, multiplicatorii de pe săgeți sînt puteri ale lui $\pm\xi_{2^r}$ cu exponenți $0, 1, \ldots, 2^{r-1} - 1$ reamintim că $\xi_{2^r} = \exp\left(-\frac{2\pi j}{2^r}\right)$. Astfel, pentru $r=1$, adică la iterația I se fac numai adunări sau scăderi ale datelor x_m. Pentru $r = 2$ se folosesc multiplicatorii $\pm\xi_4^0$ și $\pm\xi_4^1$ (desigur $\xi_4 = -j$) și pentru $r = 3$, multiplicatorii $\pm\xi_8^0$, $\pm\xi_8^1$, $\pm\xi_8^2$, $\pm\xi_8^3$ $\left(\text{unde } \xi_8 = \frac{1-j}{\sqrt{2}}\right)$ etc. Se poate observa că toți multiplicatorii utilizați sînt de fapt puteri ale lui W, deoarece $\xi_{2^r} = W^{N/2^r}$.

(c) La iterația r se separă 2^{r-1} grupe (subgrafuri) de cîte 2^{n-r+1} date finale $x_r(.)$; în fiecare grupă multiplicatorul este o putere fixată a lui $\pm\xi_{2^r}$, semnele fiind repartizate în mod egal (de exemplu, la iterația II s-au obținut două grupe, fiecare cu cîte patru date finale $x_2(.)$, cu multiplicatorii $\pm\xi_4^0 = \pm 1$ și respectiv $\pm\xi_4^1 = \pm j$). Fiecare din cele 2^{r-1} grupe are un prim element $x_r(.)$ spre care vine o săgeată cu un multiplicator $\xi_{2^r}^p$ cu $p = 0, 1, \ldots, 2^{r-1} - 1$. Pentru a determina acel element, pentru p fixat, se scrie p sub formă binară $p = (p_{n-1} \ldots p_1 p_0)$, se răstoarnă cifrele și elementul cerut va fi $x_r(q)$ cu $q = \mathcal{I}p$, unde $\mathcal{I}$ este operatorul de răsturnare; de exemplu, la iterația II, pentru $p = 3$, pentru a determina primul element $x_3(.)$ cu multiplicatorul ξ_8^3, se consideră scrierea binară $p = (0\,1\,1)$, deci $q = (1\,1\,0) = 6$ și elementul căutat este $x_3(6)$.

(d) La ultima iterație se obțin datele $x_n(0)$, $x_n(1)$, ..., $x_n(N-1)$. Dacă se notează cu $\mathcal{I}$ operatorul de răsturnare a cifrelor din scrierea binară, $\mathcal{I}: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$, atunci are loc formula finală a algoritmului TFR

$$f_k = x_n(\mathcal{I}(k)) \text{ pentru orice } k,\ 0 \leqslant k \leqslant N-1. \tag{6.21}$$

Operatorul $\mathcal{I}$ poate fi descris în modul următor: fie $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$; pentru orice $k \in \mathcal{T}$ se consideră scrierea binară care are exact n cifre (deoarece $N = 2^n$), anume $k = (k_{n-1} k_{n-2} \ldots k_1 k_0)$. Atunci $\mathcal{I}(k) = (k_0 k_1 \ldots k_{n-1}) = k_0 \cdot 2^{n-1} + k_1 \cdot 2^{n-2} + \ldots + k_{n-1}$.

O regulă ușor de aplicat pentru a calcula $\mathcal{I}(k)$ se obține considerînd numerele $r_1 = \frac{N}{2}$, $r_2 = \frac{N}{2^2}, \ldots, r_n = \frac{N}{2^n}$ și formînd tabloul

0

r_1

$r_2,\ r_2 + r_1$

$r_3,\ r_3 + r_1,\ r_3 + r_2,\ r_3 + r_2 + r_1$

$r_4,\ r_4 + r_1,\ r_4 + r_2,\ r_4 + r_1 + r_2,\ r_4 + r_3,\ r_4 + r_3 + r_1,\ r_4 + r_3 + r_2,\ r_4 + r_3 + r_2 + r_1$

. . . . . .

$r_n,\ r_n + r_1,\ r_n + r_2,\ \ldots,\ r_n + r_{n-1} + \ldots + r_2 + r_1.$

Atunci șirul de N elemente obținut scriind la rînd elementele acestui tablou $\{0, r_1, r_2, r_2 + r_1, r_3, r_3 + r_1, \ldots, r_n + r_{n-1} + \ldots + r_2 + r_1\}$ coincide termen cu termen cu șirul $\{\mathcal{I}(0), \mathcal{I}(1), \mathcal{I}(2), \ldots, \mathcal{I}(N-1)\}$, așa cum se probează cu ușurință.

De exemplu, pentru $N = 4$ avem $r_1 = 2$, $r_2 = 1$, deci tabloul corespunzător este

0
2
1 3

deci șirul $\{0, 2, 1, 3\}$ va fi tocmai șirul $\{\mathcal{I}(0), \mathcal{I}(1), \mathcal{I}(2), \mathcal{I}(3)\}$. Pentru $N = 8$ avem $r_1 = 4$, $r_2 = 2$, $r_3 = 1$ și tabelul este

0
4
2 6
1 5 3 7

deci $\mathcal{I}(0) = 0$, $\mathcal{I}(1) = 4$, $\mathcal{I}(2) = 2$, $\mathcal{I}(3) = 6$, $\mathcal{I}(4) = 1$, $\mathcal{I}(5) = 5$, $\mathcal{I}(6) = 3$, $\mathcal{I}(7) = 7$.

Formula (6.21) este o generalizare a formulelor (6.20).

(e) Semnalul de ieșire după fiecare iterație poate fi stocat în același loc cu intrarea care l-a generat. De exemplu, considerăm componentele $x(0)$, $x(4)$ ale iterației I, ele pot fi stocate în două locații temporare t_1, t_2 calculînd $t_1 = x_0 + x_4$, $t_2 = x_0 - x_4$. Deoarece x_0, x_4 nu mai sînt utilizate la nici un calcul al vreunei alte componente a iterației I, atunci conținutul locațiilor t_1, t_2 poate fi stocat unde se aflau x_0, x_4. Similar $x_1(m)$ pot fi stocate în locațiile lui x_m pentru $m = 1$ sau 5, respectiv 2 sau 6, 3 sau 7. Același procedeu se aplică la toate iterațiile.

Un avantaj considerabil al algoritmului TFR este tocmai faptul că nu sînt necesare noi locații de stocare în procesul de prelucrare a datelor și se poate vorbi de caracterul markovian al procesului iterativ respectiv. Considerînd că numerele complexe ocupă două celule de memorie, numărul total de locații de stocare este $2N$; alte $2N$ locații sînt necesare în final după aplicarea operatorului $\mathcal{I}$. În acest mod, algoritmul TFR necesită cel mult $4N$ locații, în timp ce metoda directă de calcul al TFD necesită cel puțin $2N^2$ locații (dintre care N^2 pentru puterile lui W).

(f) Algoritmul TFR poate fi utilizat cu mici modificări și pentru calculul TFD inverse, anume înlocuind W cu $\overline{W}$ și împărțind cu $\frac{1}{N}$ la ultimul pas (după ultima iterație).

(g) Numărul total de operații aritmetice (înmulțiri, adunări, scăderi) pentru calculul lui f_k, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, este $nN = N \log_2 N$. Prin însăși definiția TFD, se vede că matricea $[f_0 f_1 \ldots f_{N-1}]'$ apare ca produsul unei matrice pătrare $N \times N$, formate numai cu puteri ale lui W, cu matricea coloană a datelor $[x_0 x_1 \ldots x_{N-1}]'$, deci numărul de operații aritmetice de calcul direct al TFD este N^2; desigur, $N \log_2 N \ll N^2$, ceea ce face ca pe lîngă economie de memorie, erorile de calcul să fie reduse în aplicarea algoritmului TFR.

Toate aceste avantaje justifică adjectivul „rapid", asociat algoritmului descris anterior. Remarcăm de asemenea faptul că algortimul TFR poate fi cu ușurință programat [2, 3].

3.4. **Cîteva aplicații ale algoritmului TFR.** (a) *Calculul amplitudinii și fazei spectrului unui semnal.* Fie un semnal $x(t)$ cu valori reale, practic nul în afara unui interval $(0, A)$, cu spectrul nul în afara unei benzi de frecvență $(-f, f)$; presupunem că numărul

$N = 2fA$ este întreg, de forma 2^n; atunci x poate fi identificat cu semnalul discret $x = \{x_m\}_{0 \leqslant m \leqslant N-1}$, $x_m = x(mT)$. Cu ajutorul algoritmului TFR poate fi calculat spectrul TFD al lui x, $F_x = \{f_k\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$. Mărimile $a_k = |f_k|$, $\varphi_k = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} f_k}{\operatorname{Re} f_k}$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$, poartă denumirea de *amplitudinea* și *faza* spectrului F_x; așadar $f_k = a_k \exp(j\varphi_k)$. Eșantioanele x_m fiind reale, este suficient, conform teoremei III.2, (c), de calculat f_0, $f_1, \ldots, f_{\frac{N}{2}}$, deoarece $f_{\frac{N}{2}+r} = \bar{f}_{\frac{N}{2}-r}$ pentru $0 \leqslant r \leqslant \frac{N}{2}$. Atunci graficul funcției $k \mapsto \varphi_k$ este simetric față de punctul $\left(\frac{N}{2}, 0\right)$, iar graficul funcției $k \mapsto a_k$ este simetric față de dreapta $k = \frac{N}{2}$; variabila k este numită uneori număr-frecvență. Conform celor spuse la punctul 3.1, fiecare f_k este valoarea spectrului uzual al semnalului $\hat{x} = \sum_{m=0}^{N-1} x_m \, \delta(t - mT)$ în punctele $\frac{2\pi k}{A}$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$.

Pentru a da un exemplu concret, fie $x = e^{-t}\,\sigma(t)$, $A = 4$ ms și $f = 2000$ Hz $= 2$ ms^{-1}, deci $N = 2fA = 16$. În fig. 6.11 este indicată reprezentarea variației după k a amplitudinii a_k (prin puncte .) și fazei φ_k (prin puncte ×), ținînd seama de simetriile precizate.

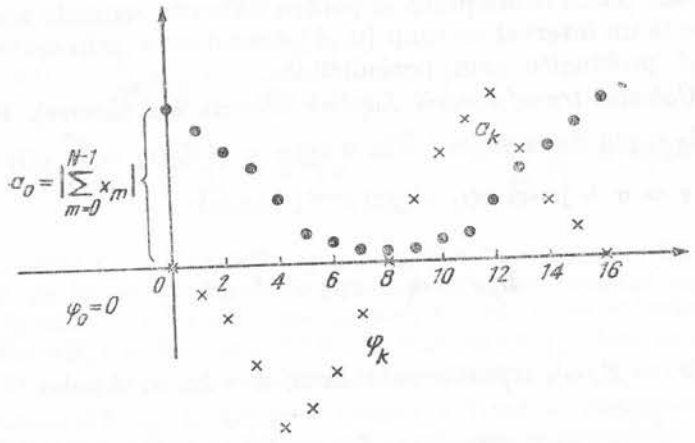


Fig. 6.11. Reprezentarea variației amplitudinii a_k și fazei φ_k în funcție de k.

Este posibilă și rezolvarea inversă a problemei anterioare tot prin utilizarea TFR, anume recuperarea semnalului x, cunoscînd valorile spectrului $\hat{x}$ în punctele $\frac{2\pi k}{A}$, deoarece aceasta revine la a cunoaște $\{f_k\}_{0\leqslant k\leqslant N-1}$ și apoi prin TFD inversă, se determină x.

(b) *Calculul convoluției și corelației semnalelor discrete.* Fie $x = \{x_m\}_{0\leqslant m\leqslant N-1}$, $y = \{y_m\}_{0\leqslant m\leqslant N-1}$ două semnale discrete cu valori reale, periodice de perioadă N; am definit în cap. III, la punctul 3.3 convoluția z și corelația $\hat{z}$ ale lui x și y, ca fiind semnalele z, $\hat{z}$ respectiv, cu eșantioanele $z_m = \sum_{p=0}^{N-1} x_p y_{m-p}$, $\hat{z}_m = \frac{1}{N}\sum_{p=0}^{N-1} x_p y_{m+p}$. Conform teoremei III.3, (a), (b), au loc relațiile $F_z = F_x F_y$ și $F_{\hat{z}} = \frac{1}{N}\overline{F}_x F_y$ și atunci $z = F^{-1}(F_z)$, $\hat{z} = F^{-1}F_{\hat{z}}$; în fiecare caz, operațiile se pot executa cu ajutorul algoritmului TFR, aplicat de cîte trei ori, după schema:

$$\begin{matrix} x \to F_x \searrow \\ y \to F_y \nearrow \end{matrix} \otimes \to F_z \xrightarrow{F^{-1}} z; \qquad \begin{matrix} x \to F_x \to \frac{1}{N}\overline{F}_x \searrow \\ y \longrightarrow F_y \nearrow \end{matrix} \otimes \to F_{\hat{z}} \xrightarrow{F^{-1}} \hat{z}.$$

Metoda poate fi adaptată și pentru anumite semnale aperiodice, restrînse la un interval de timp $[0, A]$, discretizate (prin eșantioane în timp) și prelungite prin periodicitate.

(c) *Calculul transformării Laplace (directe sau inverse).* Fie $g \in \Omega$ o funcție rapid descrescătoare la 0 spre ∞ și $L_g(s) = \int_0^\infty g(t)\ e^{-st}\ dt$. Notăm $s = \sigma + j\omega$ și $x(t) = g(t)\ e^{-\sigma t}$; atunci

$$L_g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\ e^{-j\omega t}\ dt,$$

deci $L_g(s) = F_x(\omega)$, transformata Fourier a lui x. Așadar

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega)\ e^{j\omega t}\ d\omega$$

și fixînd $T > 0$ (un pas de eșantionare în timp), avem pentru orice $m \in \mathbb{Z}$,

$$x_m \overset{\Delta}{=} x(mT) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_x(\omega)\, e^{j\omega mT}\, d\omega = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\frac{k}{T}}^{\frac{k+2\pi}{T}} F_x(\omega)\, e^{j\omega mT}\, d\omega =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{T}} \tilde{F}_x(\omega)\, e^{j\omega mT}\, d\omega, \text{ unde } \tilde{F}_x(\omega) \overset{\Delta}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_x\left(\omega + \frac{2\pi k}{T}\right);$$

cum $\tilde{F}_x(\omega)$ este funcție periodică de perioadă $\frac{2\pi}{T}$, rezultă direct că

$$\tilde{F}_x(\omega) = T\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_m\, e^{-j\omega mT}.$$

Fixăm $F > 0$ (un pas de eșantionare în frecvență) astfel încît $N \overset{\Delta}{=} \frac{1}{T\cdot F}$ să fie întreg; rezultă pentru orice $k \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{F}_x(2\pi kF) = T\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_m\, e^{-2\pi jkmTF} = T\sum_{m\in\mathbb{Z}} x_m\, e^{-\frac{2\pi jkm}{N}}$$

Notînd $\tilde{x}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x\left(t + \frac{k}{2\pi F}\right)$, se obține

$$\tilde{F}_x(2\pi kF) = T\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(mT)\, e^{-\frac{2\pi jkm}{N}} = T\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}(mT)\, W^{km}.$$

Așadar, șirul $f_k = \tilde{F}_x(2\pi kF)$ apare ca TFD a șirului $\{T\tilde{x}(mT)\}$ și trecerea de la un șir la altul se poate executa folosind algoritmul TFR. Așadar, fiind dată funcția g și fixînd σ, se calculează $x(t)$, deci $\{T\tilde{x}(mT)\}$ și folosind TFR, se calculează f_k, deci se cunoaște $\tilde{F}_x(2\pi kF)$, care este tocmai periodizata lui $F_x(\omega) = L_g(s)$. Reciproc, fiind cunoscută $L_g(s)$, din nou pentru σ fixat se determină $\tilde{F}_x(\omega)$, apoi $\{T\tilde{x}(mT)\}$, adică se determină eșantioane convenabile ale funcției $\tilde{x}$, care este tocmai periodizata lui x, de unde se determină eșantioane convenabile ale funcției căutate g.

Calculul transformatei Laplace directe și inverse se face de obicei pe cale analitică, utilizînd eventual integrale cu reziduuri; metoda indicată anterior, care ar putea fi denumită *transformarea Laplace rapidă*, utilizează procedee tipice de discretizare și algoritmul TFR; ca o particularitate, metoda permite calculul lui $L_g(s)$ pe diversele paralele la axa imaginară $O\omega$ și, reciproc, recuperarea lui $g(t)$ dacă se cunoaște $L_g(s)$ pe o singură astfel de paralelă [3].

(d) *Transformarea Fourier-Walsh rapidă.* În cap. III am definit operatorul de transformare Fourier directă (și respectiv inversă) relativ la o bază standard $\mathscr{B} = \{E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}\}$ fixată. În scriere matriceală, pentru orice semnal $x \in S_d$, asimilat cu un vector coloană N-dimensional, am notat $F_x = \mathbf{E} \cdot x$ și respectiv $F_x^{-1} = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{E}} \cdot x$, unde $\mathbf{E}$ este matricea avînd drept coloane componentele vectorilor $E_0, E_1, \ldots, E_{N-1}$.

De exemplu, dacă $N = 8$, $q = 2$, $\mathscr{B}$ este baza standard Walsh (conform teoremei III.12) și dacă se consideră semnalul discret $x = [0, 4, 1, 0, -1, 2, 0, -3]'$, atunci transformarea Fourier-Walsh a lui x va fi semnalul $F_x = \mathbf{W}x = [3, 7, -1, 7, -11, 1, -3, -3]'$, calculat prin înmulțirea matricei $\mathbf{W}$, explicitate în exemplul 9.2 din cap. III, cu vectorul coloană x. Se observă că în acest calcul intervin numai adunări și scăderi ale eșantioanelor lui x, deoarece matricea $\mathbf{W}$ este formată numai cu elementele $+1$ și -1. Numărul total al acestor operații este 64.

În continuare, vom considera exclusiv cazul $q = 2$; în cazul N general, numărul acestor operații este N^2. Pentru N de forma $N = 2^n$, vom dezvolta un algoritm rapid de calcul al transformatei Fourier-Walsh, în care numărul de operații aritmetice necesare este $Nn = N \log_2 N \ll N^2$. Ca și în cazul algoritmului TFR, rămînem la cazul $N = 8$, printr-o prezentare care să cuprindă toți germenii generalizării.

Fie $x = \{x_0, x_1, \ldots, x_7\} = [x_0\, x_1 \ldots x_7]'$ fixat; notînd $\mathscr{T} = \{0, 1, \ldots, 7\}$, semnalul x poate fi identificat cu funcția $\mathscr{T} \to \mathbb{C}$, $m \mapsto x_m$. Dacă $\mathscr{I} : \mathscr{T} \to \mathscr{T}$ este operatorul de inversare binară, definit la 3.3 și dacă notăm $\hat{x} = \{\hat{x}_m\}_{0 \leqslant m \leqslant 7}$, unde $\hat{x}_m = x_{\mathscr{I}(m)}$, rezultă $\hat{x} = \{x_0, x_4, x_2, x_6, x_1, x_5, x_3, x_7\}$.

Vom arăta că calculul lui $F_x = \mathbf{W} \cdot x$ revine la trei iterații

$$\hat{x} \overset{\text{I}}{\mapsto} \{x_1(k)\}_{0 \leqslant k \leqslant 7} \overset{\text{II}}{\mapsto} \{x_2(k)\}_{0 \leqslant k \leqslant 7} \overset{\text{III}}{\mapsto} \{x_3(k)\}_{0 \leqslant k \leqslant 7} = F_x,$$

sau, echivalent, la descompunerea matricei $\mathbf{W}$ în produsul a trei matrice care vor fi explicitate. Definim mai întîi

$$x_1(k) = \begin{cases} \hat{x}_k + \hat{x}_{k+4}, & \text{dacă } 0 \leqslant k \leqslant 3, \\ \hat{x}_{k-4} - \hat{x}_k, & \text{dacă } 4 \leqslant k \leqslant 7. \end{cases} \tag{6.22}$$

Matriceal, aceste relații se scriu evident sub forma

$$[x_1(0)\, x_1(1) \ldots x_1(7)]' = \mathbf{M}_1[\hat{x}_0\, \hat{x}_1 \ldots \hat{x}_7]', \tag{6.23}$$

în care

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_4 \\ \mathbf{U}_4 & -\mathbf{U}_4 \end{bmatrix},$$

unde am notat $\mathbf{U}_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, matricea unitate de ordin patru.

La cea de-a doua iterație II se calculează componentele $x_2(k)$, $0 \leqslant k \leqslant 7$, după formulele

$$x_2(k) = \begin{cases} x_1(k) + x_1(k+2), & \text{dacă } k = 0 \text{ sau } 1, \\ x_1(k-2) - x_1(k), & \text{dacă } k = 2 \text{ sau } 3, \\ x_1(k) - x_1(k+2), & \text{dacă } k = 4 \text{ sau } 5, \\ x_1(k-2) + x_1(k), & \text{dacă } k = 6 \text{ sau } 7. \end{cases} \tag{6.24}$$

Matriceal, aceste relații se scriu

$$[x_2(0)\, x_2(1) \ldots x_2(7)]' = \mathbf{M}_2[x_1(0)\, x_1(1) \ldots x_1(7)]', \tag{6.25}$$

unde

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_2 & 0 & 0 \\ \mathbf{U}_2 & -\mathbf{U}_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_2 & -\mathbf{U}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

În cazul $N = 8$, algoritmul se încheie după $n = 3$ iterații, anume ultima iterație III este definită prin

$$x_3(k) = \begin{cases} x_2(k) + x_2(k+1), & \text{dacă } k = 0 \text{ sau } 4, \\ x_2(k-1) - x_2(k), & \text{dacă } k = 1 \text{ sau } 5, \\ x_2(k) - x_2(k+1), & \text{dacă } k = 2 \text{ sau } 6, \\ x_2(k-1) + x_2(k), & \text{dacă } k = 3 \text{ sau } 7, \end{cases} \tag{6.26}$$

și atunci $F_x = \{x_3(k)\}_{0 \leqslant k \leqslant 7}$. Aceste relații se scriu evident sub formă matriceală, anume

$$[x_3(0)\ x_3(1) \ldots x_3(7)]' = \mathbf{M}_3[x_2(0)\ x_2(0) \ldots x_2(7)]',$$

unde am notat

$$\mathbf{M}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{U}_1 & -\mathbf{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_1 & -\mathbf{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{U}_1 & -\mathbf{U}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{U}_1 & -\mathbf{U}_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{B} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{A} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{B} \end{bmatrix},$$

unde $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_1 & -\mathbf{U}_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 & -\mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_1 & \mathbf{U}_1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{U}_1 = [1]$.

Se verifică ușor că $F_x = \mathbf{M}_3\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\hat{x}$, adică notînd cu $\mathbf{J}$ matricea operatorului de inversare $x \mapsto \hat{x}$, avem $\mathbf{W} = \mathbf{M}_3\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{J}$ și tocmai această verificare este demonstrarea valabilității algoritmului. Calculele anterioare pot fi sintetizate în graful de fluență din fig. 6.12.

Pentru $N = 16$, formulele de trecere de la o iterație la alta sînt

$$x_1(k) = \begin{cases} \hat{x}_k + \hat{x}_{k+8}, & \text{dacă } 0 \leqslant k \leqslant 7, \\ \hat{x}_{k-8} - \hat{x}_k, & \text{dacă } 8 \leqslant k \leqslant 15, \end{cases}$$

$$x_2(k) = \begin{cases} x_1(k) + x_1(k+4), & \text{dacă } 0 \leqslant k \leqslant 3, \\ x_1(k-4) - x_1(k), & \text{dacă } 4 \leqslant k \leqslant 7, \\ x_1(k) - x_1(k+4), & \text{dacă } 8 \leqslant k \leqslant 11, \\ x_1(k-4) - x_1(k), & \text{dacă } 12 \leqslant k \leqslant 15, \end{cases}$$

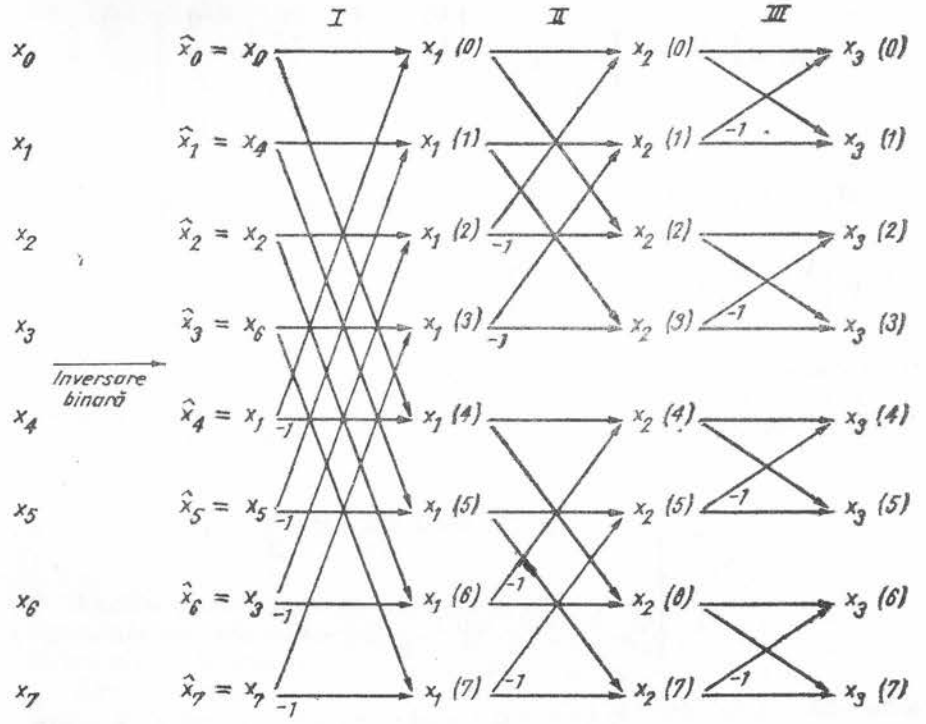


Fig. 6.12. Graf de fluență pentru algortimul de transformare Fourier-Walsh rapidă în cazul $N = 8$.

$$x_3(k) = \begin{cases} x_2(k) + x_2(k+2), & \text{dacă } k = 0, 1, 8 \text{ sau } 9, \\ x_2(k-2) - x_2(k), & \text{dacă } k = 2, 3, 10 \text{ sau } 11, \\ x_2(k) - x_2(k+2), & \text{dacă } k = 4, 5, 12 \text{ sau } 13, \\ x_2(k-2) + x_2(k), & \text{dacă } k = 6, 7, 14 \text{ sau } 15, \end{cases}$$

$$x_4(k) = \begin{cases} x_3(k) + x_3(k+1), & \text{dacă } k = 0, 4, 8 \text{ sau } 12, \\ x_3(k-1) - x_3(k), & \text{dacă } k = 1, 5, 9 \text{ sau } 13, \\ x_3(k) - x_3(k+1), & \text{dacă } k = 2, 6, 10 \text{ sau } 14, \\ x_3(k-1) + x_3(k), & \text{dacă } k = 3, 7, 11 \text{ sau } 15, \end{cases}$$

și $F_x = \{x_4(k)\}_{0 \leqslant k \leqslant 15}$ (am notat $\hat{x}_k = x_{s(k)}$, $0 \leqslant k \leqslant 15$). Matriceal, aceste treceri se exprimă prin relația $F_x = \mathbf{M}_4\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\hat{x}$, unde

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_8 & \mathbf{U}_8 \\ \mathbf{U}_8 & -\mathbf{U}_8 \end{bmatrix}, \mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_4 & 0 & 0 \\ \mathbf{U}_4 & -\mathbf{U}_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_4 & -\mathbf{U}_4 \\ 0 & 0 & \mathbf{U}_4 & \mathbf{U}_4 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{M}_3 = \text{diag}\,(\mathbf{C}, \mathbf{D}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$, $\mathbf{M}_4 = \text{diag}\,(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ și

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2 & -\mathbf{U}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_2 & -\mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_2 & \mathbf{U}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se formează și în acest caz graful de fluență asociat. În cazul general ($N = 2^n$) sînt necesare n iterații, după ce s-a realizat inversarea binară a eșantioanelor. La prima iterație există un singur bloc,

$$x_1(k) = \begin{cases} \hat{x}_k + \hat{x}_{k+\frac{N}{2}}, & \text{dacă } 0 \leqslant k \leqslant \dfrac{N}{2} - 1, \\ \hat{x}_{k-\frac{N}{2}} - \hat{x}_k, & \text{dacă } \dfrac{N}{2} \leqslant k \leqslant N-1; \end{cases}$$

la cea de-a doua iterație există două blocuri, iar la iterația de ordin k se pun în evidență 2^{k-1} astfel de blocuri $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots$ Blocul $\mathbf{B}_2$ diferă de $\mathbf{B}_1$ prin intervertirea adunărilor și scăderilor, similar $\mathbf{B}_3$ de $\mathbf{B}_2$ etc.; în fiecare bloc jumătate din operații sînt adunări și jumătate scăderi. Algoritmul poate fi programat fără dificultate și este aplicabil la cazul semnalelor discrete multidimensionale.

Indicăm o aplicație directă a algoritmului anterior. În analogie cu cazul reprezentărilor exponențiale, pentru orice semnal discret x (cu $N = 2^n$ eșantioane) se poate considera reprezentarea Walsh, de forma $x = \sum_{k=0}^{N-1} c_k w_k$; coeficienții c_k se calculează aplicînd observația III.8.2, anume $[c_0\, c_1 \ldots c_{N-1}]' = \frac{1}{N}\overline{\mathbf{W}}x = \frac{1}{N}\mathbf{W}x = \frac{1}{N}F_x$ și dacă $F_x = \{x_n(k)\}_{0 \leqslant k \leqslant N-1}$ rezultă $c_k = \frac{1}{N}x_n(k)$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$. Se pot atunci exprima spectrele Walsh de putere $\{p_x(k)\}_{0 \leqslant k \leqslant \frac{N}{2}}$ [respectiv

de fază $\{\varphi_x(k)\}_{0 \leqslant k \leqslant \frac{N}{2}}$], definite prin

$$p_x(k) = \begin{cases} c_0^2, & \text{dacă } k = 0, \\ c_{N-1}^2, & \text{dacă } k = \dfrac{N}{2}, \\ c_{2k-1}^2 + c_{2k}^2, & \text{dacă } 1 \leqslant k \leqslant \dfrac{N}{2} - 1, \end{cases}$$

$$\varphi_x(k) = \begin{cases} 0 \text{ sau } \pi, & \text{dacă } k = 0, \\ \pm\dfrac{\pi}{2}, & \text{dacă } k = \dfrac{N}{2}, \\ \operatorname{arctg}\dfrac{c_{2k-1}}{c_{2k}}, & \text{dacă } 1 \leqslant k \leqslant \dfrac{N}{2} - 1. \end{cases}$$

Pentru unele tipuri de semnale uzuale, de exemplu pentru unde apropiate de cele rectangulare, analiza spectrală Walsh are aplicații importante, în special privind implementarea pe calculator.

Aplicații legate de prelucrări de semnale, adaptate unor sisteme fizice și tehnice dintre cele mai diverse, pot fi găsite în [1, 2, 5, 6, 7, 12,13, 15 — 19].

BIBLIOGRAFIE

1. Agîrbiceanu, I., Popescu, I. *Optical methods in radio-frequency spectroscopy*. București, Editura Academiei R.S.R., 1973; Adam Hilger, 1976.
2. Ahmed, N., Rao, K. R. *Orthogonal transforms for digital signal processing*. Berlin, Springer Verlag, 1975.
3. Cooley, J. W., Tukey, J. W. *An algorithm for machine computation of complex Fourier series*, Math. of computation, 19, 1965, pp. 297—301.
4. Cooley, J. W., Lewis, P. A., Welch, P. D. *The fast Fourier transform algorithm; programming considerations in the calculation of sine, cosine and Laplace teansforms*. J. Sound, Vib., July 1970, pp. 315—337.
5. Dupraz, J. *Theorie de la communication*. Paris, Eyrolles, 1973.
6. Eykhoff, P. *Identificarea sistemelor*. București, Editura tehnică, 1977.
7. Florea, S., Dumitrache, I. *Fluidic devices with treshold logic*. Automatica, The Journal of IFAC, vol. 9, Nr. 1, 1973, pp. 47—52.
8. Guiașu, S. *Information theory with applications*. New York, McGraw Hill, 1977

9. Ionescu, V., Lupaş, L. *Tehnici de calcul în teoria sistemelor.* I, II, Bucureşti, Editura tehnică, 1974.
10. Kak, S. C. *Sampling theorem in Walsh-Fourier analysis.* Electronics letters, vol. 6, 1970, pp. 447–448.
11. Korn, G. A. *Simularea şi măsurarea proceselor aleatoare,* Bucureşti, Editura tehnică, 1969.
12. Murgan, A. I. *A general method for function synthesis,* Int. J. Control, vol. 10, Nr. 2, 1971.
13. Penescu, C. ş. a. *Identificarea experimentală a proceselor automatizate.* Bucureşti Editura tehnică, 1971.
14. Racoveanu, N. *Automatică.* Lit. IPB, 1976.
15. Spătaru, A. *Teoria transmiterii informaţiei,* Bucureşti, Editura tenică, vol. I, 1965; vol. II, 1971.
16. Vlad, V. ş.a. *Prelucrarea optică a informaţiei.* Bucureşti, Editura Academiei, R.S.R., 1976.
17. Gîrlaşu, Şt. *Prelucrarea în timp real a semnalelor fizice.* Craiova, Scrisul românesc, 1978.
18. Marghescu, I., Bădescu, Gh. *Transmiterea directă a semnalelor.* Bucureşti, Editura tehnică, 1978.
19. Mikou, N., Tucci, S. *Analyse et optimisation dans un système de gestion.* Pisa, Note scientifiche, 1979.
20. Marozan, T., *Stabilitatea sistemelor cu parametri aleatori.* Bucureşti, Editura Academiei R.S.R., 1969.
21. Petrovici, B., Gajic, Z. *On bilinear system analysis,* Beograd, Referat, 1978

Anexa 1

APLICAŢII LINIARE ŞI MATRICE

Conceptul de mulţime, împreună cu cel de structură, a permis fundamentarea logică a construcţiilor matematice. Printr-o convenţie de terminologie, orice mulţime avînd o structură (algebrică, topologică, de ordine etc.) se numeşte *spaţiu*. Pentru descrierea matematică a fenomenelor liniare (de exemplu suprapunerea efectelor din fizică, studiul ecuaţiilor şi sistemelor algebrice de gradul întîi, al sistemelor diferenţiale liniare etc.), noţiunea de spaţiu vectorial s-a dovedit a fi extrem de utilă, în special prin degajarea noţiunii de aplicaţie liniară.

Într-un spaţiu vectorial real E disponibilităţile uzuale sînt: existenţa vectorului nul 0 şi pentru orice $x, y \in E$ se pot considera $-x$, $x+y$, $\alpha x + \beta y$ (α, β fiind scalari reali), şi mai general, combinaţii liniare finite de vectori, cu proprietăţile uzuale de calcul.

Este binecunoscută lista axiomelor care definesc structura de spaţiu vectorial.

Exemple de spaţii vectoriale. 1. Fie mulţimea $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$ fixat) a sistemelor ordonate de n numere reale; pentru orice $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$, se pune $x = y \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} x_1 = y_1, \ldots, x_n = y_n$; $x + y \overset{\Delta}{=} (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, $\alpha x \overset{\Delta}{=} (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $0 = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{n})$, $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$. Se verifică în mod evident proprietăţile definitorii ale unui spaţiu vectorial.

2) Mulţimea $M_{m,n}(\mathbb{R})$ a matricelor $m \times n$ cu coeficienţi reali este spaţiu vectorial real relativ la operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu scalari; reamintim că un element $\mathbf{A} \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ este o aplicaţie $\{1, 2, \ldots, m\} \times (1, 2, \ldots, n) \to \mathbb{R}$ prin care oricărei perechi (i, j) se asociază un număr real a_{ij} şi se scrie $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, cu interpretarea uzuală de tablou dreptunghiular cu m linii şi n coloane. În loc de $M_{n,n}(\mathbb{R})$ se va scrie $M_n(\mathbb{R})$, pentru mulţimea matricelor pătrate de ordin n cu coeficienţi reali.

3. Mulţimea tuturor funcţiilor $M \to \mathbb{R}$ (M fiind o mulţime oarecare) constituie un spaţiu vectorial relativ la adunarea $f + g$ şi înmulţirea cu scalari reali αf,

$$f + g : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + g(x),\ \alpha f : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto \alpha f(x)$$

(pentru orice funcţii $f, g : M \to \mathbb{R}$ fixate).

Multe alte exemple de spaţii vectoriale se întîlnesc în matematică şi în aplicaţiile ei. Se pot considera de asemenea spaţii vectoriale complexe, în care scalarii admişi sînt numere complexe (de exemplu $\mathbb{C}^n$, $M_{m,n}(\mathbb{C})$ etc.).

Fie E și F două spații vectoriale reale ; o aplicație $f: E \to F$ se numește *liniară* dacă $f(x+y) = f(x) + f(y)$, $f(\alpha x) = \alpha f(x)$, $(\forall)\, x, y \in E$, $(\forall)\alpha \in \mathbb{R}$. Dacă f este în plus bijectivă, ea se numește *izomorfism liniar* (între spațiile vectoriale E și F) ; în acest caz se poate defini inversul lui f, $f^{-1}: F \to E$, $y \mapsto$ unica soluție $x \in E$ a ecuației $f(x) = y$. Aplicațiile liniare $E \to \mathbb{R}$, cu valori în corpul scalarilor, se numesc *funcționale liniare* ; se notează cu E' spațiul vectorial al tuturor funcționalelor liniare $E \to \mathbb{R}$, numit *dualul algebric al lui* E.

Pentru descrieri matematice mai fine, în particular pentru împletirea metodelor de algebră cu cele de analiză, este utilă noțiunea de spațiu vectorial normat. Vom considera scalari reali, cazul scalarilor complecși putînd fi tratat în mod similar.

Fie un spațiu vectorial real E ; o aplicație $N: E \to \mathbb{R}$ se numește *seminormă* pe E dacă sînt verificate proprietățile :

$$N_1 : N(x) \geqslant 0 \text{ pentru orice } x \in E \text{ și } N(0) = 0 ;$$

$$N_2 : N(\alpha x) = |\alpha| \cdot N(x) \text{ pentru orice } x \in E,\ \alpha \in \mathbb{R} ;$$

$$N_3 : N(x+y) \leqslant N(x) + N(y) \text{ pentru orice } x, y \in E.$$

Dacă în plus este verificată condiția $\{N(x) = 0 \Rightarrow x = 0\}$, se spune că este definită o *normă* pe E și se notează $\|x\|$ în loc de $N(x)$. Un spațiu vectorial E, împreună cu o normă fixată pe E, se numește *spațiu vectorial normat* (SVN). Elementele lui E se numesc *puncte* sau *vectori* ; un punct $x \in E$ poate fi identificat cu vectorul geometric $\overrightarrow{Ox}$. Astfel $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, este un SVN, relativ la norma euclidiană $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$, $(\forall) x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Disponibilitățile de calcul într-un SVN E sînt cele dintr-un spațiu vectorial, la care se adaugă cele legate de normă. Astfel, se poate defini *distanța* între orice două puncte $x, y \in E$, $d(x, y) = \|x - y\|$ și în particular, norma lui x este distanța de la origine la punctul x ; de asemenea se pot defini șiruri convergente, șiruri Cauchy etc. De exemplu, un șir $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$ de puncte din E este convergent în normă către un punct $x \in E$ și se scrie $x_n \xrightarrow{E} x$ dacă $d(x_n, x) \to 0$, adică $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$; orice șir convergent $\{x_n\}_{n \geqslant 0}$ este șir Cauchy (adică $\lim_{m, n \to \infty} \|x_m - x_n\| = 0$). Un SVN în care orice șir Cauchy este convergent se numește *spațiu Banach*. Astfel, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ sînt spații Banach ; o clasă particulară importantă de spații Banach o constituie spațiile Hilbert (v. anexa 3).

Fie E, F două SVN reale ; orice aplicație $f: E \to F$ se numește *operator de la* E *la* F ; se poate spune neriguros că operatorul f transportă informație de la E la F. Operatorul f este *continuu într-un punct* $a \in E$ dacă pentru orice șir $x_n \xrightarrow{E} a$, avem $f(x_n) \xrightarrow{F} f(a)$; dacă acest lucru se întîmplă pentru orice $a \in E$, se spune că f este operator continuu. Se poate arăta că un operator liniar $f: E \to F$ este continuu dacă și numai dacă există $M > 0$ astfel încît $\|f(x)\| \leqslant M \cdot \|x\|$, $(\forall)\, x \in E$; în acest caz, se poate defini *norma lui* f :

$$\|f\| \overset{\Delta}{=} \inf \{M \mid \|f(x)\| \leqslant M \cdot \|x\|,\ (\forall) x \in E\}.$$

Se poate arăta că $\|f\| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|}$ și deci $\|f(x)\| \leqslant \|f\| \cdot \|x\|$, $(\forall) x \in E$; astfel, $\|f\|$ poate fi interpretat ca un grosisment relativ la asocierea $x \mapsto f(x)$. Mulțimea tuturor

ratorilor liniari și continui $E \to F$ se notează cu $\mathcal{L}(E, F)$ și are o structură de SVN relativ la norma introdusă anterior.

Exemple de aplicații liniare. 1. Fie $E = C^1[a, b]$ mulțimea funcțiilor derivabile, cu derivată continuă $[a, b] \to \mathbb{R}$ și $F = C^0[a, b]$ mulțimea funcțiilor continue $[a, b] \to \mathbb{R}$. Pentru orice $f \in E$ se poate defini $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$; în acest mod se definește o normă pe E și similar se poate proceda pentru F.

Operatorul de derivare $D: E \to F$, $f \mapsto f'$ este evident liniar, dar nu este continuu (căci se poate întîmpla ca $f_n \xrightarrow{E} 0$, dar $f_n' \overset{F}{\not\to} 0$, de exemplu pentru $f_n(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$ pe intervalul $[0, 1]$) ; aplicația $I: F \to \mathbb{R}$ de luare a integralei, $I(f) = \int_a^b f(t)\, dt$ este evident liniară și este continuă deoarece dacă $f_n \xrightarrow{F} f$, atunci $|I(f_n) - I(f)| \leqslant (b - a) \cdot \|f_n - f\|$, deci $I(f_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} I(f)$]. Aceste fapte arată de ce în general integrala este mai maneabilă decît derivata și, ca atare, este preferată în aplicarea metodelor aproximative.

2. Fie $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ o matrice de tip $m \times n$; se poate atunci defini o aplicație liniară, $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ în modul următor : orice vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ din $\mathbb{R}^m$ poate fi identificat cu matricea coloană a componentelor sale $\mathbf{x} = [x_1 \ \ldots \ x_n]'$ și se pune $f_A(x) = (Ax') = x' \cdot A'$ (accentul înseamnă luarea transpusei) ; în mod explicit, dacă $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant m \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ atunci $f_A(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$, unde $y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Legătura între matrice și aplicații liniare este mai profundă decît este prezentată aici și este relevată în cadrul algebrei liniare.

Anexa 2

INTEGRABILITATE LEBESGUE

Fie un interval fixat $[a, b]$; în spațiul vectorial real $C^0_{[a,b]}$ al funcțiilor continue $[a, b] \to \mathbb{R}$ se poate introduce o normă $\| \|$, punînd

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)|\, dx, \ (\forall) f \in C^0_{[a,b]}.$$

Acest SVN are o insuficiență cronică, anume nu este complet, deci există șiruri Cauchy neconvergente; prin completare, deci prin adăugare convenabilă de noi funcții se obține un spațiu Banach, anume spațiul $L_1[a, b]$ al funcțiilor integrabile Lebesgue $[a, b] \to \mathbb{R}$. În acest mod, este atins punctul central al integrabilității Lebesgue; este însă util să fie subliniate cîteva etape esențiale, într-un cadru mai general, util și pentru descrierea matematică a fenomenelor aleatoare.

Fie Ω o mulțime nevidă fixată; se numește *σ-algebră* pe Ω orice colecție $\mathcal{M}$ de părți ale lui Ω care conține $\emptyset$ și este închisă la reuniuni și intersecții numărabile, ca și la complementară. Elementele lui $\mathcal{M}$ se numesc *mulțimi M-măsurabile* și orice pereche $(\Omega, \mathcal{M})$ se numește *spațiu măsurabil*. Un exemplu tipic de spațiu măsurabil este perechea $(\Omega, \mathcal{B})$, unde Ω este un spațiu metric (de exemplu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$) iar $\mathcal{B}$ este cea mai mică σ-algebră care conține toți deschișii din Ω; elementele lui $\mathcal{B}$ se numesc atunci *mulțimi boreliene* din Ω. Pe dreapta reală $\mathbb{R}$ toate mulțimile remarcabile (intervale, mulțimi finite, deschișii, închiși etc.) sînt boreliene.

Dacă $(\Omega, \mathcal{M})$ este un spațiu măsurabil, se numește *măsură pozitivă* orice funcție $\mu : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ astfel încît $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A) \geq 0$ pentru orice $A \in \mathcal{M}$ și pentru orice șir de mulțimi $\mathcal{M}$-măsurabile $\{A_n\}_{n \geq 1}$ disjuncte două cîte două, are loc relația $\mu(\bigcup_{n \geq 1} A_n) = \sum_{n \geq 1} \mu(A_n)$. Tripletul $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ se numește *spațiu cu măsură*. Motivația principală a acestei noțiuni constă în generalizarea naturală care este astfel adusă lungimilor, ariilor, volumelor etc.

Exemple de spații cu măsură. 1. Fie $\Omega = \mathbb{R}$ și $\mathcal{A}$ colecția reuniunilor finite de intervale de forma $(a_i, b_i]$, $1 \leq i \leq p$, presupuse disjuncte două cîte două; pentru orice mulțime $A \in \mathcal{A}$ se poate defini lungimea lui A, $\lambda(A) = \sum_{i=1}^{p} (b_i - a_i)$; colecția $\mathcal{A}$ nu este o σ-algebră, dar se poate extinde la o σ-algebră $\mathcal{L}$, ale cărei elemente sînt *mulțimile măsurabile Lebesgue*, iar λ se poate extinde la o măsură pozitivă $\mu_{\mathcal{L}} : \mathcal{L} \to \mathbb{R}$, numită *măsura Lebesgue* pe $\mathbb{R}$. Se obține spațiul cu măsuri $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu_{\mathcal{L}})$; toate submulțimile remarcabile și utilizate curent ale lui $\mathbb{R}$ sînt măsurabile Lebesgue, iar în cazul intervalelor, măsura Lebesgue este tocmai lungimea lor în sens uzual. Se poate considera $\Omega = [a, b]$ și măsura Lebesgue restrînsă la Ω. De asemenea, cele spuse anterior se extind la cazul spațiului $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

2. Fie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție monoton crescătoare, continuă la dreapta; se poate considera funcția λ_F care asociază oricărui interval $(a, b]$, numărul $F(b) - F(a)$; aceasta se extinde la o măsură pozitivă dF pe σ-algebra $\mathcal{L}_F$ a mulțimilor măsurabile Legesgue relativ la F și tripletul $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_F, dF)$ este numit spațiul $\mathbb{R}$ cu măsura Lebesgue-Stieltjes (relativ la F).

3. Un spațiu cu măsură $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ astfel încît $P(\Omega) = 1$ se numește *cîmp de probabilitate*. De exemplu, intervalul $[0, 1]$ cu măsura Lebesgue este un cîmp de probabilitate. Mulțimea din σ-algebra $\mathcal{K}$ se numesc *evenimente*, iar P se numește *măsură probabilistică* pe Ω; dacă $A \in \mathcal{K}$, atunci numărul $P(A)$, cuprins între 0 și 1, se numește *probabilitatea evenimentului* A.

Fie $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un spațiu cu măsură fixat. Se poate defini o clasă $\mathcal{F}$ de funcții $\Omega \to \mathbb{R}$, numite *funcții integrabile pe* Ω și pentru orice $f \in \mathcal{F}$ se poate defini un număr $I(f)$, numit *integrala lui* f, cu proprietățile:

I_1: dacă $f, g \in \mathcal{F}$ și $f \geq g$, atunci $I(f) \geq I(g)$ (monotonie);

I_2: dacă $f, g \in \mathcal{F}$ și $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $af + bg \in \mathcal{F}$ și în plus $I(af + bg) = aI(f) + bI(g)$ (liniaritate);

I_3: dacă $\{f_n\}_{n \geq 0}$ este un șir de funcții din $\mathcal{F}$, $f_n \to f$ punctual și $|f_n| \leq g$ cu $g \in \mathcal{F}$, atunci $f \in \mathcal{F}$ și $I(f_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} I(f)$ (continuitate)? Integrala Riemann (pentru $\Omega = [a, b]$) nu verifică proprietatea I_3 și tocmai acest lucru a impus considerarea integralei Lebesgue.

O funcție $f : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ se numește *$\mathcal{M}$-măsurabilă* dacă $(\forall) a \in \mathbb{R}$ mulțimea $\{f < a\} \overset{\Delta}{=} \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < a\}$ aparține lui $\mathcal{M}$. Suma, produsul, înmulțirea cu o constantă, limitele de șiruri punctual convergente etc. de funcții măsurabile sînt funcții măsurabile. O funcție $s : \Omega \to \mathbb{R}$ se numește *simplă* dacă există un șir de mulțimi măsurabile $\{A_n\}_{n \geq 1}$, disjuncte două cîte două, astfel încît $s = \sum_{n \geq 1} c_n \chi_{A_n}$, adică $s = c_n$ (constant) pe A_n, $n \geq 1$. Evident, orice funcție simplă este măsurabilă și se poate arăta că orice funcție $\mathcal{M}$-măsurabilă pozitivă este limita unui șir monoton crescător de funcții simple pozitive.

Exemple de funcții măsurabile. 1. Pe spațiul cu măsură Lebesgue $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mu_{\mathcal{L}})$ sau pe intervalul $[a, b]$ cu măsura Lebesgue, funcțiile $\mathcal{L}$-măsurabile respective se numesc *funcții măsurabile Lebesgue*; funcțiile continue, ca și funcțiile integrabile Riemann sînt măsurabile Lebesgue.

2. Funcțiile $\Omega \to \mathbb{R}$ care sînt măsurabile pe un cîmp de probabilitate sînt tocmai variabilele aleatoare pe Ω.

Fie $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un spațiu cu măsură; dacă $s : \Omega \to \mathbb{R}$ este o funcție simplă pozitivă ca mai sus, atunci se notează pentru orice $M \in \mathcal{M}$,

$$\int_M s\, d\mu = \sum_{n \geq 1} c_n \cdot \mu(A_n \cap M) \leq \infty$$

și se arată că acest număr este bine definit și depinde liniar și monoton de s. Dacă $f:\Omega\to\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ este o funcție măsurabilă și pozitivă, atunci alegînd un șir $\{s_n\}_{n\geqslant 1}$ de funcții simple pozitive punctual convergent către f, se poate defini

$$\int_M f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_M s_n\,d\mu \leqslant \infty,\quad (\forall)M\in\mathcal{M},$$

definiția fiind independentă de alegerea șirului s_n, iar asocierea $f\mapsto\int_M f\,d\mu$ este liniară și monotonă.

O funcție $f:\Omega\to\mathbb{R}$ se numește *integrabilă Lebesgue* pe o mulțime măsurabilă $M\in\mathcal{M}$ dacă f este $\mathcal{M}$-măsurabilă și, în plus, $\int_M |f|d\mu < \infty$.

Se notează $L_1(\Omega)$ mulțimea funcțiilor integrabile Lebesgue $\Omega\to\mathbb{R}$ (cu convenția de a identifica două funcții care coincid a.p.). Pentru orice $f\in L_1(\Omega)$, funcțiile pozitive $f_+ = \frac{1}{2}(f+|f|)$, $f_- = \frac{1}{2}(|f|-f)$ aparțin lui Ω și se definește

$$\int_M f\,d\mu \overset{\Delta}{=} \int_M f_+\,d\mu - \int_M f_-\,d\mu,\ (\forall)M\in\mathcal{M}.$$

Acest concept de integrală, verifică, luînd $\mathcal{I} = L_1(\Omega)$, proprietățile I_1, I_2. În plus

1) dacă $\int_M f\,d\mu = 0$, $f\geqslant 0$, $\mu(M)>0$, atunci $f = 0$ a.p. în M;

2) dacă $f = g$ a.p. și f este integrabilă pe M, atunci g este integrabilă pe M și $\int_M f\,d\mu = \int_M g\,d\mu$;

3) dacă f este integrabilă pe M, atunci $|f|$ este integrabilă și $\left|\int_M f d\mu\right| \leqslant \int_M |f|\,d\mu$;

4) dacă $f_n\to f$ punctual a.p. pe M, f_n sînt integrabile pe $M\in\mathcal{M}$ și există o funcție g integrabilă pe M astfel încît $|f_n|\leqslant g$ a.p. pe M, atunci f este integrabilă pe M și

$$\int_M f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_M f_n\,d\mu$$

(teorema lui Lebesgue de convergență dominată, tocmai proprietatea I_3).

În teoria integralei Riemann, legătura între derivată și integrală este exprimată astfel: fiind dată o funcție $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, există o funcție continuă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel încît $F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\,dt$, $(\forall)\,x\in[a,b]$ dacă și numai dacă F este de clasă C^1; în plus $F' = f$. În teoria integralei Lebesgue, legătura respectivă este diferită: fiind dată

o funcție $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, există o funcție integrabilă Lebesgue $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ astfel încît $F(x)-F(a)=\int_a^x f(t)\,dt$, $(\forall)\,x\in[a,b]$, dacă și numai dacă F este absolut continuă; în plus $F' = f$ a.p. (faptul că F este absolut continuă înseamnă că pentru orice $\varepsilon>0$ există $\delta>0$ astfel încît pentru orice intervale $[a_k,b_k]$, $1\leqslant k\leqslant p$, conținute în $[a,b]$, fără puncte comune două cîte două, cu $\sum_{k=1}^{p}(b_k-a_k)<\delta$, să aibă loc relația $\sum_{k=1}^{p}|F(b_k)-F(a_k)|<\varepsilon$; orice funcție absolut continuă este derivabilă a.p.).

Cele spuse anterior se extind la cazul funcțiilor cu valori complexe $f:\Omega\to\mathbb{C}$, $f = u+jv$; o astfel de funcție se numește *integrabilă* dacă funcțiile $u = \mathrm{Re}\,f$, $v = \mathrm{Im}\,f$ sînt integrabile ca funcții $\Omega\to\mathbb{R}$ și în plus,

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega u\,d\mu + j\int_\Omega v\,d\mu.$$

Plecînd de la spațiul cu măsură Lebesgue $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}, \mu_{\mathcal{L}})$ se poate defini integrala Lebesgue multiplă (calculată ca o succesiune de integrale simple) și, similar, integrala Lebesgue-Stieltjes, considerînd spațiul cu măsură $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_F, dF)$. Dacă $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ este o funcție integrabilă Riemann, atunci ea este integrabilă Lebesgue și integralele respective pe $[a,b]$ coincid; reciproca este falsă, deoarece funcția

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } x \text{ este rațional,}\\ 0, & \text{dacă } x \text{ este irațional,}\end{cases}$$

este integrabilă Lebesgue pe $[a,b]$, fără a fi integrabilă Riemann. Trebuie subliniat de asemenea că în cadrul teoriei integrabilității Lebesgue, nu este necesară o teorie separată pentru integralele improprii, ca în cazul integralei Riemann.

În ipoteza că $(\Omega, \mathcal{K}, P)$ este un cîmp de probabilitate, pentru orice variabilă aleatoare $\xi\in L_1(\Omega)$ numărul $M\xi = \int_\Omega \xi\,d\mu$ se numește *media lui* ξ.

Fie $M\subset\mathbb{R}$ o mulțime măsurabilă Lebesgue și $p\geqslant 1$ fixat; se notează cu $L_p(M)$ mulțimea funcțiilor măsurabile $f:M\to\mathbb{R}$ astfel încît $\int_M |f|^p\,d\mu<\infty$; spațiul $L_p(M)$ este SVN complet, adică este un spațiu Banach, relativ la norma

$$\|f\|_p = \left(\int_M |f|^p\,d\mu\right)^{1/p},\ (\forall)f\in L_p(M).$$

Se poate de asemenea considera mulțimea $L_\infty(M)$ a tuturor funcțiilor măsurabile $f:M\to\mathbb{R}$ mărginite a.p.; acesta este un spațiu Banach relativ la norma

$$\|f\|_\infty = \inf_c(\mu\{f\geqslant c\} = 0),\ (\forall)f\in L_\infty(M).$$

numită *supremul esențial* $\operatorname{esssup}_{x\in M} |f(x)|$. De exemplu, pentru funcția

$$f\colon [0,1]\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x\in(0,1],\\ 1, & \text{dacă } x=0,\end{cases}$$

avem $f=0$ a.p., $\operatorname{esssup}_{x\in[0,1]} |f(x)|=0$ și $\sup_{x\in[0,1]} f(x)=1$.

Evident, pentru o mulțime măsurabilă Lebesgue M cu măsură finită, avem $L_\infty(M)\subset\ldots\subset L_2(M)\subset L_1(M)$.

Se notează de asemenea cu L_1^{loc} mulțimea funcțiilor măsurabile $\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ care sînt integrabile pe orice interval compact din $\mathbb{R}$.

Dacă $(\Omega, \mathscr{K}, P)$ este un cîmp de probabilitate, atunci se va nota cu $L_p(\Omega)$ mulțimea variabilelor aleatoare $\xi:\Omega\to\mathbb{C}$ astfel încît

$$\|\xi\|_p \overset{\Delta}{=} \left(\int_\Omega |\xi|^p\, d\mu\right)^{1/p} < \infty.$$

Un rol special îl are spațiul $L_2(\Omega)$ al variabilelor aleatoare cu pătrat integrabil, numite și variabile aleatoare cu medie și dispersie finită.

Anexa 3

SPAȚII HILBERT

Spațiile Hilbert constituie o generalizare firească a spațiilor euclidiene $\mathbb{R}^n$, $n\geq 1$; ele sînt un instrument esențial în teoria optimizării, în studiul semnalelor aleatoare și în descrierea oricăror proprietăți fizice de natură energetică.

Pentru orice vectori $x, y\in\mathbb{R}^n$, $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$, se definește produsul scalar euclidian $\langle x, y\rangle \overset{\Delta}{=} \sum_{i=1}^n x_i y_i$, adică în scriere matriceală $\langle x, y\rangle = x'\cdot y$ unde x, y sînt asimilați cu vectori coloană. Este evident că au loc proprietățile:

H_1: $\langle ax+bx', y\rangle = a\langle x, y\rangle + b\langle x', y\rangle$, $(\forall)\, x, x', y\in\mathbb{R}^n$, $(\forall)\, a, b\in\mathbb{R}$;

H_2: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $(\forall)\, x, y\in\mathbb{R}^n$;

H_3: $\langle x, x\rangle\geq 0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}^n$ și $\langle x, x\rangle = 0 \rightleftarrows x=0$.

Produsul scalar este o aplicație $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $(x, y)\mapsto\langle x, y\rangle$.

Un spațiu vectorial real H astfel încît să se poată defini o aplicație $H\times H\to\mathbb{R}$, $(x, y)\mapsto\langle x, y\rangle$ cu proprietățile H_1, H_2, H_3, adică un produs scalar abstract, se numește *spațiu prehilbertian*. În acest caz, punînd $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $(\forall) x\in H$, se obține o normă pe H; în particular, se definește o distanță d pe H, anume $d(x, y) = \|x-y\|$, $(\forall) x, y\in H$.

Un spațiu prehilbertian H în care șirurile Cauchy sînt convergente se numește *spațiu Hilbert*. Disponibilitățile analitico-geometrice ale spațiilor Hilbert sînt foarte mari: există un element nul 0 (zero), se pot forma combinațiile liniare finite de vectori, se poate vorbi de distanță între două puncte și de norma (lungimea) unui vector, se pot defini serii convergente de vectori; în plus, se poate vorbi de unghi a doi vectori nenuli și, în particular, se poate introduce un concept de ortogonalitate ($x\perp y \overset{\Delta}{\rightleftarrows} \langle x, y\rangle = 0$). Dacă $F\subset H$ și $x\in H$, $x\perp F \overset{\Delta}{\rightleftarrows} \{x\perp y, (\forall) y\in F\}$.

Indicăm cîteva consecințe directe ale proprietăților definitorii H_1, H_2, H_3:

a) dacă $\langle x, y\rangle = 0$, $(\forall)\, y\in H$, atunci $x=0$;

b) $|\langle x, y\rangle|\leq\|x\|\cdot\|y\|$, $(\forall) x, y\in H$ (*inegalitatea lui Schwartz*);

c) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2+\|y\|^2)$ (*regula paralelogramului*);

d) dacă $x\perp y$, atunci $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ (*teorema lui Pitagora*);

e) orice spațiu Hilbert este un spațiu Banach relativ la norma indusă de produsul scalar, dar reciproca este falsă [de exemplu, spațiul SVN $E = C^0_{[0,1]}$ este spațiu Banach

relativ la norma $\|f\| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, $(\forall) f \in E$, dar nefiind verificată regula paralelogramului, E nu este spațiu Hilbert.

Aceste disponibilități conduc printre altele la *teorema proiecției a lui Riesz*, care constituie un rezultat fundamental în teoria optimizărilor : „Fie H un spațiu Hilbert și $F \subset H$ un subspațiu vectorial închis al lui H. Atunci pentru orice $x \in H$ există și este unic un vector $p_x \in F$, numit proiecția lui x pe F, astfel încît $\|x - p_x\| = \inf_{z\in F} \|x - z\|$; acest p_x este în același timp unicul vector din F astfel încît $x - p_x$ să fie ortogonal la F".

Un alt rezultat extrem de important este *teorema de reprezentare a funcționalelor liniare*, conform căreia pentru orice funcțională liniară $H \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ pe un spațiu Hilbert există și este unic un vector $a \in H$ astfel încît $f = \langle \cdot, a\rangle$, adică $f(x) = \langle x, a\rangle$, $(\forall) x \in H$. De aici se deduce că există un izomorfism între H și dualul său H' (definit prin asocierea $H \to H'$, $a \to \langle \cdot, a\rangle$).

Toate cele spuse anterior se extind la cazul spațiilor Hilbert complexe (spații vectoriale H peste corpul $\mathbb{C}$ având produs scalar $H \times H \to \mathbb{C}$, $(x, y) \mapsto \langle x, y\rangle$ care verifică H_1, H_2, iar H_2 se înlocuiește cu relația $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pentru orice $x, y \in H$).

Exemple de spații Hilbert. 1. $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$, este un spațiu Hilbert real, relativ la produsul scalar euclidian ; $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, este spațiu Hilbert complex, relativ la produsul scalar $\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w}_i$, $(\forall) z = (z_1, \ldots, z_n)$, $w = (w_1, \ldots, w_n)$.

2. Se notează cu l_2 mulțimea șirurilor $x = \{x_n\}_{n\geqslant 0}$ de numere complexe cu proprietatea că seria numerică $\sum_{n\geqslant 0} |x_n|^2$ este convergentă. În acest caz, pentru orice $x, y \in l_2$, $x = \{x_n\}_{n\geqslant 0}$, $y = \{y_n\}_{n\geqslant 0}$, seria $\sum_{n\geqslant 0} x_n \overline{y}_n$ este convergentă [deoarece $|x_n \overline{y}_n| \leqslant \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2)$, $(\forall) n \geqslant 0$] ; atunci $x + y \in l_2$, $\alpha x \in l_2$, $(\forall)\alpha \in \mathbb{C}$ și, în plus, notînd $\langle x, y\rangle = \sum_{n\geqslant 0} x_n \overline{y}_n$, se obține o structură de spațiu Hilbert pe l_2.

Se pot considera de asemenea șiruri indexate după întreaga mulțime $\mathbb{Z}$.

3. Pentru orice spațiu cu măsură $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ spațiul $L_2(\Omega)$ este spațiu Hilbert relativ la produsul scalar

$$\langle f, g\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega fg \, d\mu, \quad (\forall) f, g : \Omega \to \mathbb{R}, \ f, g \in L_2(\Omega).$$

În cazul în care funcțiile au valori complexe, se definește $\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\bar{g} \, d\mu$. Așadar, spațiul $L_2(\Omega)$ al variabilelor aleatoare pe Ω, având medie și dispersie, este un spațiu Hilbert.

4. Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval fixat și $\rho : I \to \mathbb{R}$ o funcție continuă astfel încît $\rho(x) > 0$ pentru orice $x \in I$ și $\int_I x^k \rho(x)\, dx < \infty$ pentru orice $k \geqslant 0$. Mulțimea $L_2(\rho)$ a funcțiilor

măsurabile Lebesgne $f : I \to \mathbb{R}$ astfel încît $\int_I \rho(x) |f(x)|^2 \, dx < \infty$ este un spațiu Hilbert relativ la produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_I \rho(x) f(x) g(x) \, dx$.

O problemă clasică este ortogonalizarea șirului de funcții [din $L_2(\rho)$] $1, x, x^2, \ldots$ prin procedeul Gram- Schmidt. Dacă $\rho(x) = 1$, $I = [-1, 1]$, se obține șirul polinoamelor Legendre. Dacă $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ și $I = (-1, 1)$ se obține șirul polinoamelor Cebîșev. Dacă $\rho(x) = e^{-x^2}$, $I = (-\infty, \infty)$ se obține șirul polinoamelor Hermite, iar dacă $\rho(x) = e^{-x}$, $I = (0, \infty)$, se obține șirul ortogonal în $L_2(\rho)$ al polinoamelor Laguerre.

Fie H un spațiu Hilbert (complex) astfel încît să existe o bază ortonormală, adică un șir ortonormal $B = \{e_n\}_{n\geqslant 0}$ de vectori cu proprietatea că subspațiul generat de vectorii lui B este dens în H ; așadar, orice element din H este limita unui șir de combinații liniare finite de elemente din B. Pentru orice $x \in H$, scalarii $c_n = \langle x, e_n\rangle$, $n \geqslant 0$, se numesc *coeficienții Fourier ai lui x relativ la B* iar seria $\sum_{n\geqslant 0} c_n e_n$ se numește *seria Fourier a lui x*. Această serie este convergentă cu suma x. Dacă $x, y \in H$, $c_n = \langle x, e_n\rangle$, $d_n = \langle y, e_n\rangle$, $(\forall)\, n \geqslant 0$, atunci $\langle x, y\rangle = \sum_{n\geqslant 0} c_n \bar{d}_n$ și pentru $y = x$ se obține $\|x\|^2 = \sum_{n\geqslant 0} |c_n|^2$ (*relația lui Parseval*).

Ca un exemplu concret, se poate lua $H = L_2[-\pi, \pi)$ cu produsul scalar $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\, dt$ și baza ortonormală $e_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-jnt}$, $n \in \mathbb{Z}$. Pentru orice $f \in L_2[-\pi, \pi)$, notînd $c_n = \langle x, e_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-jnt}\, dt$, rezultă imediat dezvoltarea $x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{jnt}$, iar egalitatea lui Parseval revine în acest caz la

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 \, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2.$$

Teorema lui Riesz-Fischer afirmă că pentru orice șir $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ din l_2 (adică $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$) există $f \in L_2[-\pi, \pi)$ având șirul coeficienților Fourier tocmai $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, anume $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$.

În cazul real se poate lua baza ortonormală $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nt\right\}_{n\geqslant 1}$ și atunci orice funcție $f \in L_2[-\pi, \pi)$ admite o reprezentare Fourier de forma

$$f(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n\geqslant 1} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

cu convergența în norma din $L_2[-\pi, \pi)$; în condițiile teoremei binecunoscute a lui Dirichlet, există o reprezentare de acest tip și pentru convergența punctuală, pentru $\frac{f(t-0)+f(t+0)}{2}$, $(\forall)t \in [-\pi, \pi)$.

Ca o aplicație importantă a teoremei de reprezentare, orice operator liniar continuu $A : H \to H$ al unui spațiu Hilbert admite un adjunct A^*, adică un operator $A^* : H \to H$ astfel încît

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle, (\forall)\, x, y \in H.$$

De exemplu, dacă $H = l_2$ și A este operatorul de deplasare cu un pas spre stînga [adică $A(\{x_n\}) = \{x_{n+1}\}$], atunci A^* este operatorul de deplasare cu un pas spre dreapta. Similar, dacă $H = L_2[a, b]$, $K : [a, b] \times [a, b] \to \mathbb{C}$ este funcție măsurabilă și $\int_a^b \int_a^b |K(x, y)|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y < \infty$ și dacă se definește operatorul Fredholm $A : H \to H$, $f(t) \mapsto \int_a^b K(t, s)\, f(s)\, \mathrm{d}s$, atunci adjunctul acestuia este $A^* : H \to H$, $g(t) \mapsto \int_a^b \overline{K(t, s)}\, g(s)\, \mathrm{d}s$.

În orice spațiu Hilbert H se poate introduce în mod natural o distanță definind $d(x,y) = \|x - y\|$. $(\forall)\, x, y \in H$; pentru orice $a \in H$ și $(\forall)r > 0$ real se notează $B_r(a) = \{x \in H | \mathrm{d}(x, a) < r\}$. O submulțime $A \subset H$ se numește *deschisă* dacă pentru orice punct $a \in A$ există $r > 0$ astfel încît $B_r(a) \subset A$. Submulțimile deschise se mai numesc simplu *deschiși*, iar complementarele lor, *închiși* în H; închiderea $\overline{C}$ a unei submulțimi $C \subset H$ este cel mai mic închis care conține C. O funcție $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, se numește *cu suport compact* dacă f se anulează în afara unei mulțimi mărginite; în aces caz, mulțimea $\mathrm{supp}\, f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n | f(x) \neq 0\}}$ este închisă și mărginită în $\mathbb{R}^n$, deci este într-adevăr compactă.

INDEX

Amplificator ideal 86,307
amplitudinea și faza unui spectru 126,352
autocorelația unui semnal 121,158

Bază standard de semnale discrete 153

Capacitor 172,180
circulator 220
clase de funcții (C^k, C_0^k, L_1, L_1^{loc}, L_2, L_2^{loc}, $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$) 15
codificare Gray 162
condiția de fază minimă 127
convoluția a două semnale-funcție 49
— a două distribuții 59
— a două semnale discrete 107,158
corelația a două semnale 121,158
— (covarianța) a două variabile aleatoare 226
cuantă (pas de cuantizare) 337
cuantizatul unui semnal 337

Defazor ideal 86
densitate (comună) de probabilitate 265
— spectrală (spectru de putere) 292
derivata unei distribuții 32
derivator 307
dezvoltarea Fourier a succesiunii periodice de delte 48
dispersia unei variabile aleatoare 262
distribuția δ (delta) a lui Dirac 24
— de eșantionare analogică 326
— — — ideală 326
distribuție de probabilitate a unui semnal aleator 269
— comună de probabilitate pentru mai multe variabile aleatoare 265
distribuții sau funcții generalizate ($\mathscr{D}'$) 21
— de ordin cel mult k ($\mathscr{D}'_k$) 25
— pare, imare 30
— regulate (asociate la funcții din L_1^{loc}) 23
— singulare 24
— cu suport compact ($\mathscr{E}'$) 22
— — — pozitiv ($\mathscr{D}'_1$) 23
— — — punctual 22
— temperate ($\mathscr{S}'$) 95

Ecuația Einstein-Fokker-Kolmogorov 284
energia unui semnal 137
eșantion al unui semnal 268
eșantionare a unui semnal continual 321
— analogică 326
— ideală 326
— cu reținere 330
exponențiale discrete 120

Fading 306
filtru 139
— analogic 139
— digital 109
formalism de descriere a unui multiport 178
— hibrid 181
— de imitanță 182
— de repartiție 182
formula de filtrare 30
— Poisson de însumare 49
formulele lui Sohoțki 44
funcție analitică 19
— caracteristică a unei variabile aleatoare 267
— de covarianță (corelație) a unui semnal 272
— de eșantionare (funcție de fantă) 322
— Green a unui operator 175
— întreagă de ordin finit 146
— nucleu 88

funcție original 68
— de pondere 175
— de reactanță 213
— de repartiție (comună) 257,265
— spectrală a unui semnal aleator 292
— spline 20
— temperată (cu creștere cel mult polinomială) 88
— de tip pozitiv 290
— de transfer (funcție de sistem) 118,296
funcții Rademacher 164
— Walsh 162

Girator 178

Hiperfuncția lui Dirac 230
hiperfuncții 229

Impuls unitate 40
inductor 172,180
integrala stochastică în raport cu un semnal 290
integrator 307
intensitate spectrală a unui semnal aleator 292
întîrzietor 62

Matrice de disipație 199
— Hadamard 155
— mărginit reală (MR) 199
— pozitiv reală (PR) 197
— real rațională 175
— de repartiție 182
— reziduu 201
măsură probabilistică 257
— spectrală asociată unei funcții de tip pozitiv 292
medie a unei variabile aleatoare 262
modulare prin impulsuri codificate 343
moment (element al unei mulțimi timp) 9
multiplicatori 31,86
multiport 179
— reciproc 207
— rezolubil 222
mulțime timp 9,105

Nucleu distribuțional 189
— reproducător 141

Operator anticauzal 190,239
— cauzal 187,238
— disipativ 248
— fără memorie 190,239
— pasiv 192,249
operator de repartiție 253
— de segmentare 246

Partea pară sau impară a unui semnal discret 124
polinom Hurwitz (stabil) 211
predictor ideal 197
problema filtrării 312
— predicției sau prognozei) 312
— de optimalitate (liniară) 311,318
proces (gaussian, Poisson, Wiener) 271
produsul direct a două distribuții 59

Răspuns frecvențial 109
— impuls 175,286
regularizarea unei distribuții 55
relația de incertitudine (principiul indeterminismului) 264
relații de dispersie 235
repartiție (exponențială, gaussiană, Poisson Rayleign) 259, 260
reprezentarea Cauchy a unei distribuții 225
— sistemelor liniare continue și invariante în timp 56
— spectrală a unui semnal 294
reținerea (sau blocarea) unui semnal discret 325
rezistor 172,180
rezoluție într-un spațiu Hilbert 237

Semnal 9,97
— aleator 10,268
— — cu creșteri independente 272
— — distribuțional 302
— analitic 279
— continual 10
— cuantizat (în scară) 10
— derivabil în medie 282
— deterministic 10
— discret 10,105
— — multidimensional 110
— — periodic 106
— — rapid descrescător 136
— cu durată mărginită 107
— ergodic 280
— impuls 62
— staționar 275
semnale necorelate (necoerente) 272
sistem cauzal 187
— fără memorie 190
— invariant în timp 55
— liniar 180
— nedisipativ 207
sistem pasiv 192
soluție elementară a unui operator 65
spațiu dual 21
— Hilbert cu rezoluție 237
spectru în frecvență al unui semnal 76
— — secvență (secvențial) al unui semnal discret 164
suportul unei funcții 14
— — distribuții 22

Șir reprezentativ pentru o distribuție 36

Traiectoria unui semnal aleator 269
transformare Fourier 76
— — discretă (TFD) 119
— — rapidă (TFR) 345
— Hilbert a funcțiilor din L_2 88
— — discretă 127
— — a distribuțiilor 225
— Laplace a funcțiilor din Ω 67
transformare—Laplace a unei distribuții 100
— — rapidă 354
— Mellin 101
— Walsh-Fourier 356
— z (z-transformare) 111
transformator Hilbert ideal 131
— perfect 180
treapta unitate Heaviside 15
trunchierea unui semnal 237

Valoarea frontieră a unei distribuții din $\mathcal{E}$ 227
— principală Cauchy VP $1/t$ 25
variabilă aleatoare (continuă, discretă) 257, 258
— — gaussiană 259
— — simplă 261
variabile aleatoare independente 265

Zgomot alb 303
— de cuantizare 338

MATHEMATICAL METHODS IN SIGNAL THEORY

by D. STANOMIR and O. STĂNĂŞILĂ

1. GENERAL ASPECTS

In the last time the study of signals has became object of multidisciplinary researches, with large problems, by making use of many powerful mathematical instruments. There are sound signals, optical signals, electric currents, impulses, noises, seismic waves, neurosignals etc. We may assert that any progress in the human knowledge has a correspondent in the study of the world of signals.

In this book different classes of signals are treated by specific mathematical methods : continual, discrete, tempered distributions, random signals etc. The scientifical rigour is accompanied by many suggestive examples, such that each notion and all the important results are illustrated by examples and applications. The book is addressed to a large group of specialists — engineers, physicists, mathematicians, as well as to students in technial sciences. In the world-wide literature there are already some works locally having some tangency with this one ; the original part of this work is the permanent double effort of reconciliation between the spirit of rigour and that of functionality and finality of different methods.

2. SHORT PRESENTATION OF THE CONTENT

The content includes 6 chapters : I. What is a signal ; II. Distributions and their integral transformations : III. Discrete signals ; IV. Realizability theory for some linear systems ; V. Stochastic signals ; VI. Algorithms for processing signals.

In chapter I is given a definition of the signals as functions on time-sets, which permits some useful classifications and underlines a very important fact, namely the important part played by the classical mathematical analysis and the functional analysis. In the last time, a fruitful idea was that of identification of some systems by operators between corresponding signal spaces ; so, the passivity, causality, dissipativity, realizability etc. can be described in functional language.

In chapter II is given an ample and unitary treatment of the integral transformations of signals (functions and distributions). The main operations with distributions, convolution, multipliers, Fourier transform, Laplace transform etc. are illustrated by examples from circuit theory.

Third chapter is dedicated to the study of digital reprezentations of signals ; the discrete signals are considered for themselves, not necessary as an approximation of continuals signals. The Hilbert discrete, Fourier discrete, z-transformations etc. are presented together with their possibilities of transfer of data from time-domain to frequencydomain and conversely. In the same chapter the Whittaker-Kotelnikov-Shannon sampling theorem is studied in detail. In the last part of chapter III is introduced the notion of standard base of discrete signals, due to the authors, which equally extends the discrete exponentials and Walsh functions.

The next chapter reffers to the problems of realizability of some physical systems from both points of view-distributional and operatorial. The real bounded and the real positive matrix play an important part in the mathematical description of the systems which can be organized as multiports ; here the authors have some original contributions.

The causality is connected with the boundary values of some holomorphic functions and with the notion of hiperfunctions ; all these subjects are treated in paragraph 7.

The chapter IV ends with the realizability theory in the frame of resolution Hilbert spaces.

In chapter V the random signals are considered. After an introductory paragraph, the classification and energetical properties of random signals are given. The stationary stochastic signals as well as their ergodicity are illustrated by examples from circuit theory. The white noise and the spectral analysis of continual and discrete random signals are studied in the paragraph 6.

The last chapter of the book deals with the sampling and quantization of signals, including the stochastic case. The fast Fourier and fast Walsh transformation algorithms are presented together with their applications. Some other practical modalities of signal processing are considered.

Three annexes are added at the end of the book : 1. Linear maps and matrix theory ; 2. The Lebesgue integrability ; 3. Hilbert spaces.

3. SHORT PRESENTATION OF THE AUTHORS

DUMITRU STANOMIR, Dr. in engineering, is professor at the Faculty of Electronics, Polytechnical Institute of Bucharest, Chair of Radiocomunications. He is specialist in electroacustic, in circuit theory and wave theory ; in the last time he worked in the pomain of nonlinear electroacoustic transductors. He published over 50 scientifical dapers and is member of the Acoustic Comission of the Romanian Academy.

OCTAVIAN STĂNĂŞILĂ, Dr. in Matehmatics, is professor at the Faculty Automatic, Polytechnical Institute of Bucharest, Chair of Mathematics. He is specialist in complex analysis, author, together with C. Bănică, of a recent monography „Algebraic methods in the global theory of complex spaces" printed in England (Wiley-Interscience) and in France (GautheirVillars). He pulbished over 30 scientifical papers and has been visiting professor at Pise, Regensburg, Genova.

CONTENTS

Chapter I. **What is a signal**

1. The mathematical model
2. Signals and systems

Chapter II. **Distributions and theirs integral transforms**

A. *Distributions. Definitions and operations*
1. Some classes of function signals
2. Basic testing-function space. Classification of the distributions
3. Addition, change of variables and product of distributions
4. Delta sequences. Distributional series
5. Convolution of the distributions

B. *Elementary theory of the integral transformations*
6. Laplace transformation of the function signals
7. Fourier transformation of the signals in L_1
8. Fourier transformation of the signals in L_2
9. Hilbert transformation of the signals in L_2

C. *Integral transformations of the distributions*
10. The general definition of a signal. Fourier transformation in $\mathcal{S}'$
11. Laplace transformation of the distributions

Chapter III. **Discrete signals**

A. *Transformations of the discrete signals*
1. Some classes of discrete signals
2. Transformation z
3. Discrete Fourier transformation
4. Discrete Hilbert transformation
B. *Discrete and analogous signals*
5. Some connections between discrete and analogous signals
6. Sampling of the analogous signals
C. *Discrete signals with a finite sequence of samples*
7. The standard basis for discrete signal
8. Fourier analysis in a standard basis
9. Walsh functions and their applications

Chapter IV. **Realizability theory for some linear systems**

A. *Electrical networks*
1. Network functions
2. Energy functions of electrical networks
3. Formalisms for electrical n ports
4. A fundamental theorem for linear lumped passive time invariant electrical networks
B. *Distributional approach in the realizability theory*
5. Causality and passivity fundamental constraints of physical systems
6. Linear lumped time invariant passive systems
7. Boundary values of the holomorphic functions and their applications
C. *Realizability theory in Hilbert resolution spaces*
8. Causality in a Hilbert resolution space
9. Passivity and dissipativity

Chapter V. **Stochastic signals**

A. *Statistical characteristics of a stochastic signal*
1. An introduction
2. Classification of stochastic signals
3. Covariance functions of stochastic signals
4. Stationary signals
B. *Spectral decomposition of stochastic signals*
5. Spectral decomposition of stationary signals
6. The white noise and its properties
C. *Filtering and prediction*
7. Filtering and prediction
8. Optimality

Chapter VI. **Algorithmis for procesing signals**

1. Sampling of the signals
2. Quantization of the signals
3. Algorithms for fast Fourier transforms

Annexes

1. Linear maps and matrix theory
2. The Lebesgue integrability
3. Hilbert spaces

MÉTHODES MATHÉMATIQUES DANS LA THÉORIE DES SIGNAUS

par D. Stanomir et O. Stănăşilă

1. BUT DE L'OUVRAGE

L'étude des signaux est devenu, au cours des dernières années, un objet de recherche multidisciplinaire, où l'on emploie un appareil mathématique qui n'est point du tout classique. D'autre part, on peut dire que partout, autour de nous, il y a des signaux par lesquels nous recevons et envoyons des messages, soit qu'il s'agit des signaux acoustiqes ou optiques, des ondes séismiques, des signaux des néurones. On peut dire, sans rien exagérer, que tout progrès de la connaissance humaine engendre de nombreux problèmes à résoudre pour la théorie des signaux.

Dans l'ouvrage on présenter, par des moyens mathématiques spécifiques, l'étude des principales classes de signaux- les signaux à temps continu (fonctions et distributions), les signaux echantillonées et finalement les signaux aléatoires. La rigueur scientifique y tient une bonne place mais elle est accompagnée d'un langage qui n'est pas excessivement formalisé. Il y a beaucoup d'exemples et en même temps chaque fait théorique significatif est accompagné d'un exemple soigneusement choisi. L'ouvrage est accessible aux étudiants des facultés techniques, aux ingénieurs, aux physiciens. Au cours de l'élaboration de l'ouvrage les auteurs se sont efforcés à mettre d'accord la rigueur mathématique et la finalité pratique.

A coup sûr il y a d'ouvrages qui ont des points communs avec notre ouvrage. Mais l'esprit dans lequel il faut conçu et la manière de présenter la théorie et les applications font que cet ouvrage ait une place particulière en tant que présentation unifiée de théorie des signaux.

2. CONTENU DE L'OUVRAGE

La table des matières contient six chapitres, à savoir : 1. Le signal ; 2. Distributions et leurs transformations integrales ; 3. Signaux discrets (echantillonnes) ; 4. Theorie de la realisabilité des systèmes linéaires ; 5. Signaux aléatoires ; 6. Algorithmes dans le filtrage et le lissage des signaux.

Dans le chapitre 1 on donne la définition du signal : c'est une fonction définie sur un ensemble des moments, appartenant à un ensemble totalement ordonné. Sans être la plus générale définition, elle permet néanmoins des classifications utiles et met en évidence le lien qui existe entre la théorie des signaux et l'analyse fonctionnelle. Sans doute tout modèle mathématique décrit convenablement une classe précisée de phénomènes et l'on doit sans cesse adapter le modèle à la complexité des systèmes physiques considérés. C'est ici qu'on fait des considérations à la suite desquelles on montre que du point de vue mathématique il y a une identité entre un système physique et l'opérateur entrée-sortie associé. De cette manière les proprietés fondamentales des systèmes physiques comme linéarité, passivité, etc., peuvent être décrites dans un langage fonctionnel.

Dans le chapitre 2 on étudie amplement et d'une manière unitaire les transfo mations intégrales des signaux-fonctions et des signaux distributions. Au début on introduit les fonctions rémarquables de L_1 et L_2, comme la fonction de Heaviside, la fonction d'échantillonnage, etc. On introduit après les espaces de fonctions de base $\mathscr{D}$, $\mathscr{E}$, $\mathscr{S}$, avec les strucures de convergence associées. Les distributions, définies (d'après L.

Schwartz) comme des fonctionnelles linéaires et continues sur les espaces de base, sont classifiées d'après leur régularité, leur support, etc. Les opérations fondamentales sur les distributions comme l'addition, le changement de variables, la multiplication, sont analysées en détail. On établit des conditions dans lesquelles une séquence de fonctions est une séquence delta et en même temps on donne des conditions pour les séquence qui on pour limite la distribution valeur principale, ce qui pe met d'établir directement les fomules de Sohotski.

L'opérateur de convolution est introduit dans le paragraphe 5, pour les signaux de L_1 et de L_2. On donne ici une interprétation géometrique suggestive de la convolution des deux fonctions. On démontre le résultat fondamental de la théorie des systèmes en vertu duquel toute opération linéaire et continue de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{D}$ peut être représentée par une convolution. Tous les résultats fondamentaux de la transformation de Fourier et de la transformation de Laplace sont accompagnés des exemples physiques suggestifs, par exemple on donne des exemples des multiplicateurs dans L_2 qui correspondent à des opérations utilisées en physique. La plupart des exemples sont tirés de la théorie des circuits électriques. Dans le paragraphe 10 on donne la définition générale d'un signal comme élément de $\mathscr{S}$.

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des réprésentations numériques des signaux, en même temps qu'aux méthodes de filtrage et lissage des données. L'étude des signaux discrets est présenté comme un objet en soi même et non comme une approximation des signaux à temps continu. Les transformations z, Hilbert discrète, Fourier discrète sont analysées en connection avec le transfert des données du domaine temps au domaine fréquence. On donne la classification des signaux discrets d'après des propriétés d'espaces de séquences associées.

Le fameux théorème Whittaker-Kotelnikov-Shannon est analysé en connection avec le problème général de l'interpolation.

Dans la dernière partie du chapitre 3 on introduit et l'on étudie la notion de base standard des signaux discrets, notion qui a été crée par les auteurs. Le modèle donné contient comme des cas particuliers les fonctions exponentielles discretes et les fonctions de Walsh.

Les résultats obtenus dans le chapitre 2 sont amplement utilisés dans le chapitre 4, où l'on présente la théorie de la réalisabilité des systemes physiques et techniques. Dans la prémière partie du chapitre on présente les notions fondamentales de la théorie des réséaux électriques dans le langage fonctionnel mathématiques. On définit et l'on étudie les fonctions de réséau, les fonctions d'énergie, les formalismes par lesquls on décrit les systèmes à plusieurs portes, etc. Le point de vue distributionnel permet d'introduire les matrices positives réelles et bornées réelles. Les contributions originales des auteurs apparaissent tant du côté théorique que dans le chois des exemples.

On connait que la notion de causalité est étroitement liée aux valeurs limite des fonctions holomorphes. Le cadre naturel dans lequel les valeurs limite peuvent être définies est fourni par les hyperfonctions. Dans le paragraphe 7 on donne des éléments de ce nouvel points de vue.

A la fin du chapitre 4 on présente la théorie opératorielle de la réalisabilité, ayant comme point de départ les espaces Hilbert à résolution (partition) de l'unité. On définit et l'on les étudies notions fondamentales comme causalité, passivité, dissipativité. Les résultats sont comparés aves ceux qu'on a obtenu dans le point de vue distributionnel.

Il est connu que l'analyse des systèmes physiques ne peut ignorer la structure aléatoire des signax. C'est pour cela que dans le chapitre 5 on a donné des résultats fondamentaux de la théorie des signaux aléatoires. Après un rappel des notions indispensables de la théorie des probabilités, on donne la classification des signaux aléatoires (en tant que processus aléatoires) et l'on étudie les propriétés spectrales. Des exemples pris de la théorie des circuits électriques illustrent la signification des notions centrales de cette théorie : la stationnarité et l'ergodicité. Après avoir introduit le bruit blanc, on étudie la réponse des systèmes linéaires et stationnaires aux signaux aléatoires. A la fin

du chapitre 5 on présente les élements de la théorie du filtrage et de la prédiction au cas des systèmes linéaires.

Dans le chapitre 6, le dernier, on présente les procédés d'échantillonnage et de quantification des signaux, y compris les signaux aléatoires. L'algorithme pour la transformation Fourier rapide aussi bien que celui pour la transformation Walsh rapide sont analysés en vue d'obtenir de procédés pratiques pour le filtrage des signaux.

On a inclu dans l'ouvrage trois annexes : 1. Applications linéaires et matrices ; 2. Propriétés de l'integrale de Lebesgue ; 3. Espaces de Hilbert. Par cela on a voulu compléter les connaissances mathématiques du lecteur et en même temps fixer la terminologie qu'on emploie dans l'ouvrage.

3. PRÉSENTATION DES AUTEURS

Dumitru Stanomir est docteur ingénieur, maître de conférences à la faculté d'Electronique de l'Institut Polytechnique de Bucharest, à la chaire des Radiocommunications. Il est un spécialiste reconnu dans le domaine de l'électroacoustique, de la théorie des circuits électriques, des processus ondulatoires. Au dernier temps il a élaboré des ouvrages concernant la théorie nonlinéaire des transducteurs électroacoustiques. Il a publié plus de 50 d'ouvrages scientifiques and fait partie de la Commission d'Acoustique de l'Académie de la République Socialiste de Roumanie.

Octavian Stănăşilă est docteur en mathématiques, professeur à la faculté d'Automatique de l'Institut Polytechnique de Bucharest, à la chaire des Mathématiques. Il est un spécialiste connu dans le domaine de l'analyse complexe. Récemment est apparu une monographie de C. Bănică et O. Stănăşilă sur les espaces complexes, en englais (Wiley) et en français (Gauthier-Villars). Il a publié plus de 30 d'ouvrages scientifiques. Ses préoccupations actuelles sont dans le domaines de l'analyse réelle et complexe. Il a été professeur visiteur aux universités de Pisa, Regensburg, Genova.

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1. **Le signal**

1. Le modèle mathématique.
2. Signaux et systèmes

Chapitre 2. **Distributions et leurs transformations integrales**

A. *Distributions, Operations sur les distributions*
1. Classes remarquables des signaux-fonctions
2. Espace des fonctions de base $\mathscr{D}$. Classification des distributions
3. Addition, changement de variables, produit des distributions
4. Séquences ayant comme limite la mesure de Dirac. Séries distributionnelles.
5. Convolution des distributions

B. *Theorie elémentaire des transformations integrales*
6. Transformation de Laplace des signaux-fonctions
7. Transformation de Fourier des signaux-fonctions dans L_1.
8. Transformation de Fourier des signaux-fonctions dans L_2.
9. Transformation de Hilbert des signaux-fonctions dans L_2

C. *Transformations integrales des distributions.*
10. Définition générale du signal. Transformation de Fourier des signaux-rdistributions dans $\mathscr{S}$.
11. Transformation de Laplace des signaux-distributions

Chapitre 3. **Signaux discrets (echantillonnés)**

A. *Transformations des signaux discrets*
1. Classes rémarquables des signaux discrets
2. Transformation z.
3. Transformation Fourier discrète
4. Transformation Hilbert discrète

B. *Signax discrets et signaux analogiques*
5. Quelques liaisons spécifiques entre les signaux discrets et les signaux analogiques
6. Echantillonnage des signaux analogiques

C. *Signaux discrets ayant une sequence finie d'echantillons*
7. Base standard des signaux discrets
8. Analyse Fourier dans une base standard
9. Fonctions de Walsh et leurs applications

Chapitre 4. **Théorie de la réalisabilite des systèmes linéaires**

A. *Circuits electriques*
5. Fonctions de réseau.
2. Fonctions d'énergie des réseaux électriques
3. Descriptions des réseaux a plusieurs portes
4. Un théorème fondamental des circuits électriques stationnaires

B. *Le point de vue distributionel dans la theorie de la realisabilité.*
5. Causalité et passivité, propriétés fondamentales des syst mes physiques.
6. Systèmes linéaires, stationnaires et à paramètres concentrés
7. Valeurs limite des fonctions holomorphes et leurs applications

C. *Theorie de la realisabilité dans des espaces de Hilbert a resolution (partition de l'unité).*
8. Causalité dans des espaces de Hilbert à résolution
9. Passivité et dissipativité

Chypter 5. **Signaux aleatoires**

A. *Structure statistique des signaux aleatoires*
1. Introduction
2. Classification des signaux aléatoires
3. Covariance des signaux aléatoires
4. Signaux alétoires stationnaires

B. *Structure spectrale des siganux aléatoires*
5. Décomposition spectrale des signaux aléatoires
6. Bruit blanc.

C. *Filtrage et prediction*
7. Filtrage et prédiction des signaux aléatoires
8. Optimisation

Chapter 6. **Algorithmes dans le filtrage et le lissage des signaux**

1. Echantillonnage des signaux analogiques
2. Quantification des signaux.
3. Algorithmes pour la transformation Fourier rapide

Annexes

1. Applications linéaires et matrices
2. Propriétés de l'integrale de Lebesgue
3. Espaces de Hilbert.